УДК 517.95

© *В. И. Сумин*

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ [1]

Показано, что для широкого класса распределенных оптимизационных задач характерно сильное вырождение особых управлений поточечного принципа максимума, когда вместе с принципом максимума, который можно рассматривать как необходимое условие оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управлений, вырождаются и необходимые условия второго порядка. Описан способ получения содержательных необходимых условий оптимальности сильно вырожденных особых управлений.

Ключевые слова: распределенные задачи оптимизации, управляемые вольтерровы функциональные уравнения, поточечный принцип максимума, особые управления.

Введение

Управления, особые в смысле *поточечного принципа максимума* (п.п.м.), на которых он вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и ее приложениях (см., напр. [1–7]). Однако для распределенных систем вопросы получения *необходимых условий оптимальности* (н.у.о.) *особых управлений* (о.у.) изучены еще относительно слабо: в основном рассматривались управляемые системы Гурса–Дарбу и близкие им (см., напр. [2, 8–17]). Главные усилия были направлены на конструирование с учетом специфики таких систем формул приращения, удобных для вычисления старших вариаций функционалов. За допустимые брались обычно кусочно-непрерывные управления. Предполагалось, как правило, что каждому допустимому управлению отвечает единственное глобальное решение управляемой начально–краевой задачи. Принципиально важно изучение более широкого класса управлений — измеримых (см., напр. [3, с. 291], [4–7], [18, 19]), причем без указанного ограничительного условия на разрешимость управляемой начально–краевой задачи. Соответствующий достаточно общий способ изучения о.у. п.п.м., опирающийся на возможность представления управляемой начально-краевой задачи в форме функционального уравнения вида (1) в лебеговом пространстве и использующий теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов, был предложен в [20]. В [21–23] была представлена обобщающая способ [20] схема изучения о.у., обслуживающая широкий класс распределенных управляемых систем, описываемых вольтерровыми функциональными уравнениями вида (1) (самые разнообразные примеры начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений с частными производными, приводимых к форме (1), можно найти, например, в [24]), а также обширный аксиоматически описанный в [21–23] класс способов варьирования, включающий большинство способов, традиционно использующихся в теории н.у.о. (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, варьирование пакетами, сдвигом и др.). В данной статье дана конкретизация схемы [21–23] применительно к игольчатому варьированию. Показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно сильное вырождение о.у. п.п.м., когда вместе с п.п.м. (н.у.о. 1-го порядка при игольчатом варьировании) вырождаются и н.у.о. 2-го порядка (теоремы 5 и 8). Это происходит, если задача «устроена не слишком сложно» (теорема 4), как часто и бывает в приложениях. Получены содержательные н.у.о. сильно вырожденных о.у. (теоремы 7 и 9).

[1]Финансовая поддержка РФФИ (грант 07-01-00495), аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П-13).

Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\mathbf{R}^n$ — пространство n-векторов $a \equiv \{a^1, \ldots, a^n\}$; $\langle a, b\rangle_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a^i b^i$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$; если $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^n$, то $\{a_1, \ldots, a_k\} \equiv \{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1^1, \ldots a_1^n, \ldots, a_k^1, \ldots, a_k^n\} \in \mathbf{R}^{kn}$; модуль вектора равен сумме модулей его компонент; если X, Y — нормированные пространства, то $\mathfrak{L}(X, Y)$ — класс линейных ограниченных операторов из X в Y, а норма в прямом произведении $X \times Y$ определяется формулой $\|\{x, y\}\|_{X\times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$; если X — функциональное пространство, то X^n — пространство n-вектор-функций, а $X^{n\times m}$ — $(n \times m)$-матриц-функций, составленных из функций пространства X; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; знаком * обозначаются операции перехода к сопряженному пространству и сопряженному оператору, операция транспонирования.

1. Оптимизационная задача. Рассмотрим управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \tag{1}$$

где: $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное, измеримое (по Лебегу) множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных[2] $t \equiv \{t^1, \ldots, t^n\}$; $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — функция, дважды дифференцируемая по $\mathbf{p}$ для всех $\mathbf{v}$ при почти всех t и вместе с производными $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ измеримая по t для всех $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ и непрерывная по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ для почти всех t; $A \in \mathfrak{L}\left(L_1^m, L_1^l\right)$; $v(.) \in L_\infty^s$ — управление из класса $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$, множество $U \subset \mathbf{R}^s$ ограничено. Будем предполагать выполненными сформулированные ниже условия **K**), а)–в).

K) *Функции f, $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ ограничены на любом ограниченном множестве. Это означает, что существует функция $\mathcal{N}(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что при любом $v \in \mathcal{D}$*

$$|f(t, \mathbf{p}, v(t))| \leqslant \mathcal{N}(M), \quad \left|f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, v(t))\right| \leqslant \mathcal{N}(M), \quad \left|f''_{\mathbf{pp}}(t, \mathbf{p}, v(t))\right| \leqslant \mathcal{N}(M), \text{ если } t \in \Pi, \ |\mathbf{p}| \leqslant M.$$

а) *Оператор A имеет квазинильпотентную положительную мажоранту $B \in \mathfrak{L}(L_1, L_1)$.*

б) $B[L_\infty] \subset L_\infty$.

Из условия б) получаем (см. [25, с. 30]), что формула $B_\infty[z] \equiv B[z]$, $z \in L_\infty$ определяет оператор $B_\infty \in \mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$. Условия **K**), а), б) позволяют говорить о решениях уравнения (1) класса L_∞^m.

Следуя [24, с. 15], будем называть оператор $\mathcal{F}$, действующий из L_p^n в пространство измеримых на Π вектор-функций, вольтерровым на некоторой системе T измеримых подмножеств Π, если для любого $H \in T$ сужение $\mathcal{F}[z]\Big|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \setminus H$. Обозначим через P_H оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \subset \Pi$. Пусть $\delta > 0$ — некоторое число, T_* — система множеств $\{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$, где $\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_k = \Pi$; положим $h_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \ldots, k$. Если некоторый оператор $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$ вольтерров на системе T_* и $\|P_{h_i}\mathcal{F}P_{h_j}\|_{L_p\to L_p} \leqslant \delta$ при $i = 1, \ldots, k$, то, следуя [20, с. 24], назовем T_* вольтерровой δ-цепочкой оператора $\mathcal{F}$.

в) *Для любого $\delta > 0$ у оператора B_∞ существует вольтеррова δ-цепочка*[3].

При сформулированных условиях управлению $v \in \mathcal{D}$ может отвечать не более одного в классе L_∞^m решения уравнения (1) [24, с. 37]. Будем считать, что семейство Ω тех управлений $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное в L_∞^m решение z_v уравнения (1), непусто. Пусть v_0 — фиксированный элемент Ω и $z_0 \equiv z_{v_0}$ — соответствующее управлению v_0 решение уравнения (1). Положим

$$\rho(v) \equiv \left\|B\left[\left|\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\right|\right]\right\|_{L_\infty}, \quad v \in \mathcal{D},$$

используя обозначение

$$\Delta_{\mathbf{w}}f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

[2]В обозначениях пространств значок Π, как правило, опускаем; в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность. Например, вместо $L_p^m(\Pi)$, $L_p^1(\Pi)$ пишем соответственно L_p^m, L_p.

[3]Заметим, что из условия в) следует квазинильпотентность оператора B_∞ [26].

Справедлива следующая теорема об устойчивости (при возмущении управления) существования глобальных решений уравнения (1) (см., напр. [27, §3, теорема 4]).

Теорема 1. *Для любого управления* $v_0 \in \Omega$ *существуют числа* $\varkappa > 0$, $C > 0$ *такие, что всякое управление* $v \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющее неравенству* $\rho(v) < \varkappa$, *принадлежит* Ω *и при этом*

$$\|z_v - z_0\|_{L^m_\infty} \leqslant C \left\|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\right\|_{L^m_\infty}, \qquad \|A\,[z_v - z_0]\|_{L^l_\infty} \leqslant C\rho(v). \tag{2}$$

Пусть $F : L^m_1 \to \mathbf{R}$ — некоторый функционал, дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше. Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[v] \equiv F[z_v] \to \max, \quad v \in \Omega, \tag{3}$$

для определенности понимая ее как задачу нахождения L^s_1-локального максимума. Сформулируем н.у.о. типа п.п.м., которому удовлетворяет решение этой задачи. Везде ниже: v_0 — фиксированное решение задачи (3), $z_0 \equiv z_{v_0}$; v — некоторый элемент Ω, $\Delta z \equiv z_v - z_0$.

2. Принцип максимума. Определим оператор $S : L^m_1 \to L^m_1$ формулой

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_{\mathbf{p}}(t) A[z](t), \quad z \in L^m_1, \quad t \in \Pi,$$

где используется обозначение $f'_{\mathbf{p}}(t) \equiv f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0](t), v_0(t))$, $t \in \Pi$; очевидно, $S \in \mathfrak{L}\left(L^m_1, L^m_1\right)$. Пусть $a_0[.] \equiv F'(z_0)[.]$ — производная Фреше функционала $F : L^m_1 \to \mathbf{R}$ в точке z_0, а $\omega \in L^m_\infty$ — функция Рисса функционала a_0 как элемента сопряженного пространства $(L^m_1)^*$. Уравнение

$$S^*[\psi] = \omega, \tag{4}$$

где $S^* \in \mathfrak{L}\left(L^m_\infty, L^m_\infty\right)$ — сопряженный к S оператор, имеет единственное в L^m_∞ решение ψ. Положим

$$\pi(t, \mathbf{w}) \equiv \langle \psi(t), \Delta_{\mathbf{w}} f(t)\rangle_m, \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Для задачи (3) справедливо следующее н.у.о. в виде п.п.м.

Теорема 2. *Для каждого* $\mathbf{w} \in U$ *при почти всех* $\tau \in \Pi$ *выполняется неравенство* $\pi(\tau, \mathbf{w}) \leqslant 0$.

Докажем теорему 2, используя специальную асимптотическую формулу для приращения $\Delta_v J \equiv J[v] - J[v_0]$, $v \in \Omega$ целевого функционала. Положим

$$r(v) \equiv \|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\|_{L^m_1}, \quad r_1(v) \equiv \|\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\|_{L^{m\times l}_1}, \quad v \in \mathcal{D},$$

где

$$\Delta_{\mathbf{w}} f'_{\mathbf{p}}(t) \equiv f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Теорема 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{gathered} \Delta_v J = \int_\Pi \pi(t, v(t))dt + o(r(v) + r_1(v)), \\ r(v) \to 0, \quad r_1(v) \to 0, \quad \rho(v) \to 0 \quad (v \in \Omega). \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство теоремы 3. По теореме о конечных приращениях в интегральной форме

$$\Delta z\,(t) = \left\{ \int_0^1 f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z],\, v(t))\, d\xi \right\} A[\Delta z]\,(t) + \Delta_{v(t)} f(t), \quad t \in \Pi, \tag{6}$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + \theta_0, \tag{7}$$

где $\theta_0 \equiv \int\limits_0^1 \{F'(z_0 + \xi\Delta z) - F'(z_0)\}\, d\xi[\Delta z]$. С помощью (4), (6) формула (7) переписывается в виде

$$\Delta_v J = \int_\Pi \left\langle \psi, \Delta_{v(t)} f(t)\right\rangle dt + \theta_0 + \theta_1, \tag{8}$$

$$\theta_1 \equiv \int_\Pi \left\langle \psi(t), \int_0^1 \left\{ f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v) - f'_{\mathbf{p}}(t) \right\} d\xi \cdot A[\Delta z](t) \right\rangle_m dt.$$

В силу (2) из (6) и обобщенной леммы Гронуолла[4] следует существование такой постоянной C_1, что

$$\|\Delta z\|_{L_1^m} \leqslant C_1 r(v), \text{ если } \rho(v) < \varkappa. \tag{9}$$

Это дает $|\theta_0| = o(r(v))$, $r(v) \to 0$. Из (2), (9) получаем $|\theta_1| = o(r(v) + r_1(v))$, $r(v) + r_1(v) \to 0$, $\rho(v) \to 0$. Теорема 3 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\}$, в каждом из которых $\mathbf{w}$ — какой-то элемент U, $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot, \mathbf{w})$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^n$ принадлежит Π. Каждому $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление

$$v_h(t) \equiv \{\mathbf{w}, \quad t \in \Pi_\varepsilon(\tau); \quad v_0(t), \quad t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\},$$

а каждому набору *параметров варьирования* $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$ соответствует семейство функций $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$, *простейшая одноточечная игольчатая варианта* (п.о.и.в.) управления v_0. Из теоремы 1 и свойств функции f имеем

$$r(v_h) + r_1(v_h) = O(\varepsilon^n), \varepsilon \to 0.$$

Из (5) следует, что для любого $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$ существует равный $\pi(\tau, \mathbf{w})$ предел $\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau, \mathbf{w}) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^{-n} \Delta_{v_h} J)$, который естественно назвать первой вариацией функционала J на варианте $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$. Очевидное н.у.о. $\delta J(\sigma) \leqslant 0$, $\sigma \in \Sigma$ записывается в виде п.п.м.

$$\pi(\tau, \mathbf{w}) \leqslant 0, \quad \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma. \tag{10}$$

Теорема 2 доказана. □

3. Особые управления. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество $\{\{t, \mathbf{w}\} \in \Pi \times U \ : \ \pi(t, \mathbf{w}) = 0\}$. При почти каждом $t \in \Pi$ значение $v_0(t)$ оптимального управления v_0 принадлежит сечению

$$\mathcal{M}(t) \equiv \{\mathbf{w} \in U \ : \ \{t, \mathbf{w}\} \in \mathcal{M}\}$$

множества $\mathcal{M}$. Управление v_0 называется о.у. п.п.м., если

$$\text{mes } \{t \in \Pi \ : \ \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\} > 0. \tag{11}$$

Говорят, что п.п.м. вырождается на о.у. v_0, о.у. называют *вырожденным управлением п.п.м.*, а также *вырожденным управлением для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования.* Множество $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi \ : \ \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\}$ будем называть множеством вырождения п.п.м. на управлении v_0. Случай, когда $\text{mes}\,\Pi_* = \text{mes}\,\Pi$ и при почти всех $t \in \Pi$ сечения $\mathcal{M}(t)$ множества $\mathcal{M}$ совпадают с U, назовем случаем *полного вырождения п.п.м.* Сначала, в пп. 4, 5, рассмотрим именно этот случай. Общий случай вырождения п.п.м. будет рассмотрен в п. 6.

4. Сильное вырождение особых управлений. Пусть v_0 — о.у. для п.п.м., причем имеет место случай полного вырождения. Предел $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\gamma} \Delta_{v_h} J$, если он существует при некотором $\gamma > n$, назовем *вариацией порядка* $\gamma - n + 1$ *функционала* J *на п.о.и.в.* $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$; соответственно н.у.о. вида $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \leqslant 0$ ($\sigma \in \Sigma$) назовем н.у.о. порядка

---

[4]Обобщенной леммой Гронуолла мы называем следующее утверждение, частный случай теоремы 1.9.3 из [28]. *Пусть банахово пространство B полуупорядочено по конусу $K \subset B$; $G \in \mathfrak{L}(B, B)$ — квазинильпотентный оператор, для которого K инвариантен. Если для некоторых x, $y \in B$ выполняется неравенство $x \leqslant G[x] + y$, то $x \leqslant R(G)[y]$, где $R(G) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} G^i$.*

При этом K считаем конусом в B, если K выпукло, замкнуто и для любого отличного от нуля элемента $x \in K$ весь луч $\{\lambda x \colon \lambda \geqslant 0\}$ принадлежит K, но $(-x) \notin K$.

$\gamma - n + 1$ управления v_0 на п.о.и.в. Типичной является ситуация, когда для о.у. v_0 вместе с $\delta J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$ имеем $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, $n < \gamma < n+1$ и содержательны, вообще говоря, лишь н.у.о., начиная с порядка 2. Поэтому назовем *о.у. v_0 сильно вырожденным для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования* $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$.

Сформулируем условия (условия **A**), обеспечивающие при $n > 1$ сильное вырождение о.у. и позволяющие с помощью теории тензорных произведений лебеговых пространств построить удобную для изучения о.у. асимптотическую формулу приращения $\Delta_v J$. Введем специальные обозначения:

$$f''_{\mathbf{pp}}(\cdot)[x,y] \equiv \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} f''_{\mathbf{p}^i\mathbf{p}^j}(\cdot)x^i y^j,\ x,y \in \mathbf{R}^l;$$

$$\Gamma \equiv \left\{\{i,j\} :\ i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,l};\ \Delta_{\mathbf{w}} f^{i\prime}_{\mathbf{p}^j}(t) = 0 \ \text{ для любого } \mathbf{w} \in U \text{ при почти всех } t \in \Pi\right\};$$

если $X = (X_{ij})$ — $(m \times l)$-матрица, то $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_{ij})$ — $(m \times l)$-матрица, в которой

$$\widetilde{X}_{ij} \equiv \{0,\ \{i,j\} \in \Gamma;\ X_{ij},\ \{i,j\} \notin \Gamma\},$$

X^0 — ml-столбец, полученный развертыванием матрицы X по правилу

$$X^0 \equiv \{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{m1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{ml}\},$$

а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания ml-столбца в $(m \times l)$-матрицу.

Условия A. $\mathbf{A}_1$. *Для любых $\xi \in L^l_\infty$, $v \in \Omega$ формула*

$$b_1(\xi,v)[x,y] \equiv 2^{-1}\int_\Pi \left\langle \psi(t),\ f''_{\mathbf{pp}}(t,\xi(t),v(t))[A[x](t), A[y](t)]\right\rangle_m dt,\quad x,y \in L^m_1$$

определяет над $L^m_1 \times L^m_1$ ограниченный билинейный функционал $b_1(\xi,v)[.,.]$, непрерывно в норме $L^l_\infty \times L^s_1$ зависящий от $\{\xi,v\}$.

$\mathbf{A}_2$. *Формула*

$$b_2[x,y] \equiv \int_\Pi \left\langle \psi(t),\ \widetilde{M[y(t)]}A[x](t)\right\rangle_m dt,\ x \in L^m_1,\ y \in L^{ml}_1$$

определяет над $L^m_1 \times L^{ml}_1$ ограниченный билинейный функционал $b_2[.,.]$.

Укажем некоторые простые для проверки, но важные для приложений случаи, когда условия **A** заведомо выполняются.

Теорема 4. *Условия* **A** *выполняются в каждом из следующих случаев:*

i) $\psi(t) \equiv 0$, $t \in \Pi$;

ii) $A[L^m_1] \subset L^l_\infty$;

iii) $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v}) = f_1(t,\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2 + f_2(t,\mathbf{p}_1,\mathbf{v})$, $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\}$, $\mathbf{p}_i \in \mathbf{R}^{l_i}$ $(i=1,2)$, $l_1 + l_2 = l$, f_1 *является $(m \times l_2)$-матрицей, $A[\cdot] = \{A^{(1)}[\cdot], A^{(2)}[\cdot]\}$, $A^{(i)}[\cdot] : L^m_1 \to L^{l_i}_1$ $(i=1,2)$, причем $A^{(1)}[L^m_1] \subset L^{l_1}_\infty$.*

Теорема 5. *Если v_0 — о.у. для п.п.м. и выполняются условия* **A**, *то из н.у.о., полученных для v_0 с помощью п.о.и.в., вырождаются все условия до порядка n включительно, и содержательными могут быть лишь н.у.о. порядка, большего n; таким образом, в случае $n > 1$ о.у. v_0 будет сильно вырожденным о.у..*

Мы докажем теорему 5 с помощью второй специальной асимптотической формулы для приращения $\Delta_v J$, $v \in \Omega$. Чтобы выписать ее, вспомним (см., напр. [29, гл. 3, пп. 6.2, 6.4, 6.5]), что любой ограниченный билинейный над $L^m_1 \times L^k_1$ функционал $b[\cdot,\cdot]$ единственным образом представим в виде

$$b[x,y] = \int_\Pi dt \int_\Pi x^*(t)\Theta(t,s)y(s)ds,\quad x \in L^m_1,\quad y \in L^k_1, \tag{12}$$

где $\Theta \in L_\infty^{m\times k}(\Pi\times\Pi)$. Пусть

$$b_0[x,y] \equiv 2^{-1}\cdot F''(z_0)[x,y],\ \ x,y\in L_1^m,$$

где $F''(z_0)[\cdot,\cdot]$ — билинейный функционал второй производной Фреше $F''(z_0)$; $\Theta_0(t,s)$ и $\Theta_1(t,s)$ — $(m\times m)$-матрицы, отвечающие по формуле (12) функционалам b_0 и

$$b_{10}\equiv b_1(A[z_0],v_0);$$

$\Theta_2(t,s)$ — $(m\times ml)$-матрица, отвечающая функционалу b_2; I_k — тождественный оператор в L_1^k; $L_1^m\otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^m и L_1^k, натянутое на элементы $x(t)\otimes y(s)\equiv x(t)y^*(s)$ ($x\in L_1^m$, $y\in L_1^k$) и совпадающее с $L_1^{m\times k}(\Pi\times\Pi)$ [29, гл. 3, пп. 6.4, 6.5].

Рассматриваемое над $L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ уравнение

$$(S\otimes S)^*[\eta(t,s)] = \Theta_i(t,s) \tag{13_i}$$

имеет единственное решение $\eta_i(t,s)$ $(i=0,1)$. Уравнение

$$(S\otimes I_{ml})^*[\eta(t,s)] = \Theta_2(t,s) \tag{14}$$

имеет единственное в $L_\infty^{m\times ml}(\Pi\times\Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$. По поводу уравнений (13_i) и (14) см. п.7.

Положим

$$E(t,s;\mathbf{v},\mathbf{w}) \equiv \left\langle \Delta_{\mathbf{v}} f(t), \{\eta_0(t,s)+\eta_1(t,s)\}\Delta_{\mathbf{w}} f(s) + \eta_2(t,s)\{\Delta_{\mathbf{w}} f'_{\mathbf{p}}(s)\}^0\right\rangle_m,\quad t,s\in\Pi,\quad \mathbf{v},\mathbf{w}\in U.$$

Теорема 6. *При условиях* **A** *справедлива следующая асимптотическая формула для приращения функционала*

$$\begin{gathered}\Delta_v J = \int\limits_\Pi \pi(t,v(t))dt + \int\limits_\Pi dt\int\limits_\Pi E(t,s;v(t),v(s))ds + o(\{r(v)+r_1(v)\}^2),\\ r(v)\to 0,\quad r_1(v)\to 0,\quad \rho(v)\to 0,\quad \|v-v_0\|_{L_1^s}\to 0,\quad v\in\Omega.\end{gathered} \tag{15}$$

Доказательство теоремы 6. В силу условия а) существует оператор $S^{-1}\in\mathfrak{L}(L_1^m,L_1^m)$, причем $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$. С помощью формулы Тейлора находим

$$S[\Delta z](t) = Q(t),\quad t\in\Pi, \tag{16}$$

$$Q(t)\equiv \Delta_{v(t)} f(t) + Q_0(t),\quad Q_0(t)\equiv\sum_{i=1}^3 Q_i(t),$$

$$Q_1(t)\equiv\left\{\Delta_{v(t)} f'_{\mathbf{p}}(t)\right\}\cdot A[\Delta z](t),\qquad Q_2(t)\equiv 2^{-1} f''_{\mathbf{pp}}(t)\left[A[\Delta z](t),\ A[\Delta z](t)\right],$$

$$Q_3(t)\equiv\int_0^1(1-\xi)\cdot\left\{f''_{\mathbf{pp}}(t,A[z_0]+\xi A[\Delta z],v(t)) - f''_{\mathbf{pp}}(t)\right\}\left[A[\Delta z](t),\ A[\Delta z](t)\right]d\xi,$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + b_0[\Delta z,\Delta z] + \theta_2, \tag{17}$$

$$\theta_2\equiv\left\{\int_0^1(1-\xi)\cdot\left\{F''(z_0+\xi\Delta z) - F''(z_0)\right\}d\xi\right\}[\Delta z,\Delta z].$$

Из (5) и (16) получаем

$$a_0[\Delta z] = \int_\Pi \pi(t,v(t))dt + b_{10}\left[\Delta z,\ \Delta z\right] + b_2\left[\Delta z(\cdot),\ \left\{\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\right\}^0\right] + \theta_3,$$

$$\theta_3 = a_0[Q_3(\cdot)]. \tag{18}$$

Каждый билинейный функционал (12) однозначно отождествляется с некоторым линейным функционалом $c[\cdot]$ над проективным тензорным произведением $L_1^m \otimes L_1^k \equiv L_1^{m\times k}(\Pi\times\Pi)$ равенством

$$c\,[x(t)\cdot y^*(s)] = b[x,y], \quad x\in L_1^m, \quad y\in L_1^k. \tag{19}$$

Пусть: c_0, c_1, c_2 — функционалы, отождествляемые по (19) соответственно с b_0, b_{10}, b_2; функционалы l_0, $l_1 \in (L_1^m\otimes L_1^m)^*$, $l_2\in(L_1^m\otimes L_1^{ml})^*$ определяются формулами

$$l_i = \left(S^{-1}\otimes S^{-1}\right)^*[c_i] \quad (i=0,1); \quad l_2 = \left(S^{-1}\otimes I_{ml}\right)^*[c_2], \tag{20}$$

а $\eta_i(t,s)\in L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ $(i=0,1)$, $\eta_2(t,s)\in L_1^{m\times ml}(\Pi\times\Pi)$ — функции Рисса для l_i $(i=0,1)$, l_2 соответственно. Учитывая, что $(S^{-1}\otimes S^{-1})^* = ((S\otimes S)^*)^{-1}$, $(S^{-1}\otimes I_{ml})^* = ((S\otimes I_{ml})^*)^{-1}$, равенства (20) можно переписать в виде $(S\otimes S)^*[l_i]=c_i$ $(i=0,1)$, $(S\otimes I_{ml})^*[l_2]=c_2$ или, переходя от функционалов к соответствующим функциям Рисса, в виде

$$(S\otimes S)^*[\eta_i]=\Theta_i \ (i=0,1), \qquad (S\otimes I_{ml})^*[\eta_2]=\Theta_2,$$

что означает: $\eta_i(t,s)$ — единственное в $L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ решение уравнения (13_i) $(i=0,1)$, $\eta_2(t,s)$ — единственное в $L_\infty^{m\times ml}(\Pi\times\Pi)$ решение уравнения (14). Соотношения (16), (20) дают

$$b_0[\Delta z,\Delta z] = l_0\left[\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\otimes\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\right]+\theta_4^{(0)}, \tag{21}$$

$$b_{10}[\Delta z,\Delta z] = l_1\left[\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\otimes\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\right]+\theta_4^{(1)}, \tag{22}$$

$$b_2\left[\Delta z,\ \left\{\Delta_{v(\cdot)}f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\right\}^c\right] = l_2\left[\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\otimes\left\{\Delta_{v(\cdot)}f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\right\}^0\right]+\theta_5, \tag{23}$$

где

$$\theta_4^{(i)} \equiv l_i\left[Q_0(\cdot)\otimes\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\right]+l_i\left[\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\otimes Q_0(\cdot)\right]+l_i\left[Q_0(\cdot)\otimes Q_0(\cdot)\right] \qquad (i=0,1),$$

$$\theta_5 \equiv l_2\left[Q_0(\cdot)\otimes\left\{\Delta_{v(\cdot)}f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\right\}^0\right].$$

Для завершения доказательства (15) достаточно показать (см. (15), (7), (8), (21)–(23)), что каждая из величин θ_2, θ_3, $\theta_4^{(0)}$, $\theta_4^{(1)}$, θ_5 подчиняется условию

$$|\theta| = o\left(\{r(v)+r_1(v)\}^2\right), \ r(v)\to 0, \ r_1(v)\to 0, \ \rho(v)\to 0 \ (v\in\Omega).$$

Для θ_2 это следует из (9) и непрерывности F'', для θ_3 — из (9) и условия $\mathbf{A}_1$, для $\theta_4^{(i)}$ $(i=1,0)$ — из (2), (9), для θ_5 — из (2), (9) и условия $\mathbf{A}_2$. Теорема 6 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Ввиду полного вырождения п.п.м. $\int\limits_\Pi \pi(t,v_h(t))dt = 0$ для любого $h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}$. Из теоремы 1 и свойств функции f следует: $r(v_h)+r_1(v_h)=O(\varepsilon^n)$, $\varepsilon\to 0$. Поэтому формула (15) при любом $\sigma\in\Sigma$ дает: $\Delta_{v_h}J=O(\varepsilon^{2n})$, $\varepsilon\to 0$. Теорема 5 доказана.

5. Необходимые условия оптимальности сильно вырожденных особых управлений. В условиях теоремы 5 формула (15) позволяет, если существует вариация $\delta^{n+1}J(\sigma)$, $\sigma\in\Sigma$, вывести н.у.о. порядка $n+1$. Для существования вариации $\delta^{n+1}J(\sigma)\equiv\delta^{n+1}J(\tau,\mathbf{w})$ достаточно, например, выполнения следующих условий **Б**.

Условия Б. $\mathbf{Б_i}$) *Для функции $\eta_i(t,s)$ правильные относительно $2n$-мерной меры Лебега на $\Pi\times\Pi$ точки Лебега образуют на «диагонали» $\{\{t,s\}\in\Pi\times\Pi : t=s\}$ множество полной меры относительно n-мерной «диагональной» меры Лебега.* $(i=0,1,2)$

О возможностях проверки условий **Б** в конкретных задачах см. п.7.

Теорема 7. *Пусть v_0 — $L_{1,s}$-локальное решение* (3) *и полностью вырожденное о.у. для п.п.м. Если выполняются условия* **А** *и* **Б**, *то*

$$\textit{для каждого } \mathbf{w}\in U \textit{ при почти всех } \tau\in\Pi: \quad \delta^{n+1}J(\tau,\mathbf{w}) = E(\tau,\tau;\mathbf{w},\mathbf{w}) \leqslant 0.$$

Доказательство теоремы 7. Ввиду полного вырождения п.п.м. $\int\limits_{\Pi}\pi(t,v_h(t))dt=0$ для любого $h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}$. Из формулы (15) и условия **Б** следует, что для каждого $\mathbf{w}\in U$ при почти всех $\tau\in\Pi$ существует вариация $\delta^{n+1}J(\tau,\mathbf{w})$ и она равна $E(\tau,\tau;\mathbf{w},\mathbf{w})$. Н.у.о. $\delta^{n+1}J(\tau,\mathbf{w})\leqslant 0$ очевидно. Теорема 7 доказана. □

6. Общий случай вырождения. В пп. 4, 5 рассматривался случай полного вырождения п.п.м. на о.у. v_0, когда $\Pi_*=\Pi$ и $\mathcal{M}(t)=U$ при всех $t\in\Pi$. В общем случае вырождение п.п.м. на о.у. v_0 означает, что mes $\Pi_*>0$, но Π_* уже может не совпадать с Π и не обязательно $\mathcal{M}(t)=U$ для $t\in\Pi_*$. Чтобы распространить на общий случай вырождения полученные выше в случае полного вырождения п.п.м. результаты, воспользуемся более общим способом одноточечного игольчатого варьирования, чем п.о.и.в.

Пусть v_0 — о.у. п.п.м. Заметим, что $\pi(t,\mathbf{v}):\Pi\times\overline{U}\to\mathbf{R}$ — функция Каратеодори и поэтому отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}:\Pi\to 2^{\overline{U}}$ измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых сечений (см. [30, п. 8.1.5]) $\mathcal{K}\equiv\{v_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\overline{\mathcal{M}(t)}=\overline{\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{v_k(t)\}\right\}},\quad t\in\Pi_0,\quad \text{mes }\Pi_0=\text{mes }\Pi.$$

Обозначим через Π_l ту часть множества Π_0, каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции $\pi(\cdot,v_k(\cdot))$ для любой функции $v_k(\cdot)$ семейства $\mathcal{K}$. Очевидно,что mes $\Pi_l=$ mes Π.

Пусть $\mathbf{\Sigma}$ — совокупность всех наборов $\eta\equiv\{\tau,v_k\}$, в каждом из которых v_k — какой-то элемент $\mathcal{K}$, $\tau\in\Pi_l$; $\mathbf{H}$ — семейство всех пар $\mathbf{h}\equiv\{\eta,\varepsilon\}$, в каждой из которых $\eta\equiv\{\tau,v_k\}\in\mathbf{\Sigma}$, а ε — такое положительное число, что $\Pi_\varepsilon(\tau)\subset\Pi$. Каждому $\mathbf{h}\equiv\{\eta,\varepsilon\}\in\mathbf{H}$ отвечает допустимое управление

$$v_{\mathbf{h}}(t)\equiv\{v_k(t),\ t\in\Pi_\varepsilon(\tau);\ v_0(t),\ t\in\Pi\setminus\Pi_\varepsilon(\tau)\},$$

а каждому набору *параметров варьирования* $\eta\equiv\{\tau,v_k\}\in\mathbf{\Sigma}$ соответствует семейство функций $\{v_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h}\equiv\{\eta,\varepsilon\}\in\mathbf{H}}$, одноточечная игольчатая варианта управления v_0. Для указанного способа варьирования первая вариация $\delta J(\eta)\equiv\delta J(\tau,v_k)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-n}\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J)$ при любом $\eta\equiv\{\tau,v_k\}\in\mathbf{\Sigma}$ существует и равна $\pi(\tau,v_k(\tau))$. Так как $\mathcal{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то для о.у. v_0 имеем: $\delta J(\eta)\equiv 0$, $\eta\in\mathbf{\Sigma}$.

При условиях **А** из формулы (15) получаем $\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J=O(\varepsilon^{2n})$, $\varepsilon\to 0$ $(\sigma\in\mathbf{\Sigma})$. То есть справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему 5.

Теорема 8. *Если v_0 — о.у. для п.п.м. и выполняются условия* **А**, *то из н.у.о., полученных для v_0 с помощью предложенного способа одноточечного игольчатого варьирования, вырождаются все условия до порядка n включительно, и содержательными могут быть лишь н.у.о. порядка, большего n; таким образом, в случае $n>1$ о.у. v_0 будет сильно вырожденным о.у. для этого способа варьирования.*

Из (15) следует также, что каково бы ни было n при условиях **А**, **Б** вариация $(n+1)$-го порядка $\delta^{n+1}J(\tau,v_k)\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^{-2n}\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J\right)$ для каждого $v_k\in\mathcal{K}$ при почти всех $\tau\in\mathbf{\Pi}$ существует и равна $E(\tau,\tau;v_k(\tau),v_k(\tau))$. Так как $\mathcal{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то отсюда вытекает следующее н.у.о. порядка $n+1$, обобщающее н.у.о. теоремы 7.

Теорема 9. *Пусть v_0 — о.у. для п.п.м. Если выполняются условия* **А** *и* **Б**, *то для оптимальности управления v_0 необходимо выполнение условия:*

$$E(\tau,\tau;\mathbf{w},\mathbf{w})\leqslant 0\quad \textit{для любого } \mathbf{w}\in\mathcal{M}(\tau)\ \textit{при почти всех } \tau\in\Pi.$$

7. Некоторые замечания. В более подробной записи уравнения (13_i) и (14) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}&\eta(t,s)-(I_m^*\otimes A^*)\left[\eta(t,s)\cdot\left\{f'_{\mathbf{p}}(s)\right\}^*\right]-(A^*\otimes I_m^*)\left[\left\{f'_{\mathbf{p}}(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\right]+\\&+(A^*\otimes A^*)\left[\left\{f'_{\mathbf{p}}(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\cdot\left\{f'_{\mathbf{p}}(s)\right\}^*\right]=\Theta_i(t,s)\quad(t,s\in\Pi),\end{aligned}\qquad(24_i)$$

$$\eta(t,s) - (A^* \otimes I^*_{ml}) \left[\left\{ f'_{\mathbf{p}}(t) \right\}^* \cdot \eta(t,s) \right] = \Theta_0(t,s) \quad (t,s \in \Pi). \tag{25}$$

Здесь каждый первый сомножитель в тензорном произведении операторов «действует по переменной t», а каждый второй сомножитель — по переменной s, I^*_m есть тождественный оператор в L^m_∞.

В конкретных задачах условия **Б**, как правило, сравнительно легко проверяются. При этом удобно бывает воспользоваться тем, что уравнения (4), (24_i), (25) имеют вид

$$Z(\xi) - \mathcal{L}[Z](\xi) = \Theta(\xi), \quad \xi \in \Xi,$$

где $\mathcal{L} \in \mathfrak{L}\left(L^k_\infty(\Xi), L^k_\infty(\Xi)\right)$ — квазинильпотентный оператор. Поэтому если некоторое замкнутое в $L^k_\infty(\Xi)$, инвариантное относительно $\mathcal{L}$ множество G содержит функцию Θ, то и $L^k_\infty(\Xi)$-решение уравнения принадлежит G. Так, например, в задачах оптимизации гиперболических и сосредоточенных систем с терминальными и интегральными функционалами функции Θ_i обычно непрерывны везде на $\Pi \times \Pi$ за исключением, быть может, конечного числа фиксированных гиперповерхностей разрыва типа конечного скачка. Уравнения (24_i), (25) позволяют доказать, что таковы же и функции η_i, а это означает выполнение условия **Б** (см. примеры в [23]).

Для доказательства формул (5), (15) достаточно потребовать, чтобы F был определен и дважды дифференцируем по Фреше лишь над L^m_∞, но при этом для любого $z \in L^m_\infty$ линейная форма $F'(z)[\cdot] : L^m_\infty \to \mathbf{R}$ (соответственно билинейная форма $2^{-1}F''(z)[\cdot,\cdot] : L^m_\infty \times L^m_\infty \to \mathbf{R}$) допускала продолжение до линейного непрерывного функционала над L^m_1, обозначим его $a_1(z)[\cdot]$ (соответственно до билинейного непрерывного функционала над $L^m_1 \times L^m_1$, обозначим его $b_{(0)}(z)[\cdot,\cdot]$) такое, что $a_1(z_v) \to a_1(z_0)$ равномерно в норме $(L^m_1)^*$ (соответственно $b_{(0)}(z_v) \to b_{(0)}(z_0)$ равномерно в норме пространства билинейных непрерывных форм над $L^m_1 \times L^m_1$) при условии $\|z_v - z_0 - \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\|_{L^m_\infty} \to 0$. При этом $\omega(\cdot)$ — функция Рисса для $a_1(z_0)$, $\Theta_0(t,s)$ — $(m \times m)$-матрица, отвечающая по (12) функционалу $b_{(0)}(z_0)$.

Требование $\mathbf{A}_2$ можно заменить следующим более простым требованием $\mathbf{A}'_2$.

$\mathbf{A}'_2$. *Формула*

$$b_{(2)}[x,y] \equiv \int_\Pi \langle \psi(t), M[y(t)] \cdot A[x](t) \rangle_m \, dt, \quad x \in L^m_1, \quad y \in L^m_1,$$

определяет над $L^m_1 \times L^m_1$ *ограниченный билинейный функционал* $b_{(2)}[\cdot,\cdot]$.

Формула (15) и все выводы из нее остаются справедливыми, если заменить Θ_2 на функцию $\Theta_{(2)}$, отвечающую по (12) функционалу $b_{(2)}$. Упрощенные таким образом условия **A** выполняются, например, в случаях i), ii) теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
2. Васильев О. В. Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами: автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. — Л., 1984.
3. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
4. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Тр. МИАН СССР. — 1991. — Т. 197. — С. 85–166.
5. Борисов В. Ф. Экстремали с бесконечным числом переключений в окрестности особых экстремалей высоких порядков: автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. — М., 2000.
6. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 90. Оптимальное управление 4. — М.: ВИНИТИ, 2001.
7. Зеликин М. И., Манита Л. А. Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления балкой Тимошенко // Прикл. матем. и мех. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 295–304.
8. Васильев О. В. Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами // Управляемые системы. — Новосибирск, 1972. — Вып. 10. — С. 27–34.

9. Срочко В. А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1108–1115.
10. Меликов Т. К. Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Баку, 1976. — 17 с.
11. Ащепков Л. Т., Васильев О. В., Коваленок И. Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 6. — С. 1054–1059.
12. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. — Минск, 1982. — 32 с. (Препринт/АН БССР. Ин-т математики, № 31).
13. Мансимов К. Б. Оптимальность особых управлений в квазилинейных системах Гурса–Дарбу при наличии ограничений. I // Изв. АН Азерб. ССР., сер. физ.-тех. и матем. наук. — 1986. — № 3. — С. 129–134.
14. Бурдуковский А. Н. Условия оптимальности особых управлений в задаче Гурса–Дарбу // Управляемые системы. — Новосибирск, 1986. — Вып. 26. — С. 16–24.
15. Мансимов К. Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления системами с распределенными параметрами // ДАН СССР. — 1988. — Т. 301, № 3. — С. 546–550.
16. Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1989.
17. Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Баку, 1994.
18. Силин Д. Б. Об особых оптимальных управлениях в линейной задаче со свободным правым концом // Некоторые проблемы современной математики и их приложение к задачам математической физики. — М., 1985. — С. 125–128.
19. Силин Д. Б. Линейные задачи оптимального быстродействия с разрывными на множестве положительной меры управлениями // Матем. сб. — 1986. — Т. 26, № 3. — С. 439–448.
20. Сумин В. И. Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. ... канд физ.-мат. наук. — Горький, 1975. — 158 с.
21. Сумин В. И. Дифференцирование функционалов оптимального управления // Материалы итоговой науч. конф. радиофиз. фак. ГГУ за 1982 г., Горький, 1-2 февр. 1983. — Часть 2. Деп. в ВИНИТИ: № 6035-83 ДЕП. С. 84–91.
22. Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320, № 2. — С. 295–299.
23. Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем // Оптимизация: сб. науч. тр. — Новосибирск, 1993. — № 52 (69). С. 74–94.
24. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. — Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. — 110 с.
25. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 500 с.
26. Сумин В. И., Чернов А. В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1402–1411.
27. Сумин В. И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н.Новгород, 1998. — Вып. 2(19). — С. 138–151.
28. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
29. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
30. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

Поступила в редакцию 01.03.10

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

V. I. Sumin

On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems

It is proved that for distributed optimization problems a sufficiently typical situation is strong degeneration of the singular controls in the sense of the pointwise maximum principle, when together with the maximum principle (which is a first order necessary optimality condition in the case of spike-shaped variation) a second order necessary optimality conditions also degenerates. A derivation of constructive necessary optimality conditions for singular controls is suggested.

Keywords: distributed optimization problems, guided Volterra functional equations, pointwise maximum principle, singular controls.

Mathematical Subject Classifications: 49K20, 49K22, 49N65, 46A32, 45D05

Сумин Владимир Иосифович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математической физики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23.
E-mail: v_sumin@mail.ru