МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

УДК 517.977

© *Д. А. Серков*

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ. II[1]

Для задачи управления в условиях динамических помех изучается влияние, которое оказывает на оптимальный гарантированный результат сужение класса помех до программных помех. В частности, приводится пример задачи оптимального управления, в которой оптимальный гарантированный результат существенно изменяется при таком сужении множества допустимых помех.

Ключевые слова: дифференциальные игры, программная помеха, конструктивное движение.

§ 1. Введение

Рассмотрим задачу управления на конечном промежутке времени $[t_*, \vartheta]$ с показателем качества $\gamma(x(\cdot))$, определенном на траекториях $x(\cdot)$ управляемой системы. В теории дифференциальных игр определяется пучок (множество) конструктивных движений (далее этот пучок будет называться *игровым* и обозначаться $X^*(t_*, z_*, U)$), порожденный из начальной позиции (t_*, z_*) стратегией управления U из какого–либо класса стратегий $\mathbf{U}_{na}$ при произвольных допустимых помехах [1, § 6], [2, гл. 1]. Этот пучок определяет гарантированный результат $\Gamma^*(t_*, z_*, U)$ стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ первого (минимизирующего) игрока. Затем на основе гарантированных результатов для различных стратегий определяется оптимальный гарантированный результат $\Gamma^*(t_*, z_*, \mathbf{U}_{na})$ в выбранном классе стратегий $\mathbf{U}_{na}$ *при произвольных помехах* [1, 2]:

$$\Gamma^*(t_*, z_*, U) \equiv \sup_{x(\cdot)\in X^*(t_*,z_*,U)} \gamma(x(\cdot)), \qquad \Gamma^*(t_*, z_*, \mathbf{U}_{na}) \equiv \inf_{U\in\mathbf{U}_{na}} \Gamma^*(t_*, z_*, U). \tag{1.1}$$

В случае, когда помеха заведомо является программной, пучок конструктивных движений, а с ним гарантированный и оптимальный гарантированный результаты, могут быть сформированы иначе, чем в случае произвольной помехи. Именно для стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ определим пучок $X(t_*, z_*, U, v(\cdot))$ всех конструктивных движений, порожденных этой стратегией при данной программной помехе $v(\cdot)$ из начальной позиции (t_*, z_*). Тогда гарантированный результат для стратегии U в позиции (t_*, z_*) как верхняя грань значений показателя качества на всех возможных конструктивных движениях при всех возможных реализациях помехи и соответственно оптимальный гарантированный результат в классе стратегий $\mathbf{U}_{na}$ *при программных помехах* будут определяться выражениями

$$\Gamma^{pr}(t_*, z_*, U) \equiv \sup_{x(\cdot)\in X^{pr}(t_*,z_*,U)} \gamma(x(\cdot)), \qquad \Gamma^{pr}(t_*, z_*, \mathbf{U}_{na}) \equiv \inf_{U\in\mathbf{U}_{na}} \Gamma^{pr}(t_*, z_*, U), \tag{1.2}$$

где через $X^{pr}(t_*, z_*, U)$ обозначено объединение пучков движений $X(t_*, z_*, U, v(\cdot))$ при всех допустимых программных помехах $v(\cdot)$ (далее именуемое *программный пучок*).

В силу включения $X^{pr}(t_*, z_*, U) \subseteq X^*(t_*, z_*, U)$, вытекающего непосредственно из определений этих пучков, величины гарантированных результатов и оптимальных гарантированных результатов для двух различных классов помех связаны неравенствами

$$\Gamma^{pr}(t_*, z_*, U) \leqslant \Gamma^*(t_*, z_*, U), \tag{1.3}$$

$$\Gamma^{pr}(t_*, z_*, \mathbf{U}_{na}) \leqslant \Gamma^*(t_*, z_*, \mathbf{U}_{na}). \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления», а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00313-а).

Возникал естественный вопрос: могут ли в соотношениях (1.3), (1.4) реализоваться строгие неравенства? В работе [6] положительный ответ был дан для неравенства (1.3). А именно, был построен пример управляемой системы и позиционной стратегии $\bar{U}$, для которых программный пучок конструктивных движений $X^{pr}(t_*, z_*, \bar{U})$ не является плотным в игровом пучке $X^*(t_*, z_*, \bar{U})$ (в топологии равномерной сходимости). Значит, при некотором непрерывном показателе качества для указанной стратегии с переходом к классу программных помех, очевидно, изменялся и гарантированный результат. Вместе с тем, оставался открытым вопрос, может ли предположение о программном характере помехи привести к изменению оптимального гарантированного результата? В данной заметке указанный вопрос также разрешается положительно, однако уже в классе стратегий более широком, чем позиционные стратегии.

§ 2. Динамика системы и показатель качества

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями и краевым условием

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \\ x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1}$$

при геометрических ограничениях на величины реализующихся управления и помехи

$$u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \tag{2.2}$$

где G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ суть компактные множества, $\equiv$ — равенство по определению. В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что она непрерывна по совокупности аргументов в области $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, локально липшицева по второй переменной

$$\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leqslant L_f \|x_1 - x_2\|, \quad (\tau, x_i) \in G, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}, \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

где G — любое ограниченное подмножество из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $L_f \equiv L_f(G)$ — константа Липшица, зависящая от множества G; а также при любых $(\tau, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ удовлетворяет условию

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \quad \varkappa \geqslant 0.$$

Двойные скобки $\|\cdot\|$ обозначают евклидову норму элемента соответствующего пространства.

Множества всех измеримых по Борелю реализаций управления и помехи, удовлетворяющих ограничениям (2.2), обозначим соответственно $\mathbf{U}_{pr}$ и $\mathbf{V}_{pr}$. При указанных условиях решение $x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$ задачи (2.1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ и единственно для любых реализаций управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{pr}$ и помех $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$ (см. [3, II.4]).

Выделим следующее подмножество пространства состояний системы (2.1):

$$G \equiv \mathbf{cl}_{[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n} \Big\{ (\tau, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \mid x = x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathbf{U}_{pr}, v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr} \Big\}$$

(символы $\mathbf{cl}_Z A$ обозначают слова «замыкание множества $A \subseteq Z$ в топологии пространства Z»). В силу определения множество G компактно в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, и при любых $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{pr}$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$, $(t_*, z_*) \in G$ движение $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ не покинет G вплоть до момента ϑ. Обозначим через $X(t_*, z_*, v(\cdot))$ следующее множество

$$X(t_*, z_*, v(\cdot)) \equiv \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)} \{ x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \ : \ v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr} \},$$

где $C([t_*, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ — множество непрерывных функций из $[t_*, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$ с чебышевской нормой.

Качество движения $x(\cdot)$ оценивается показателем γ терминального типа:

$$\gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)), \tag{2.4}$$

где функция $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ предполагается локально липшицевой. Сторона, формирующая управление $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{pr}$, стремится минимизировать этот показатель.

§ 3. Стратегии и движения

Пусть $\Delta \equiv \{\tau_i, i \in 0,\dots,n_\Delta \mid \tau_0 = t_*, \tau_{n_\Delta} = \vartheta, \tau_{i-1} < \tau_i, i \in 1,\dots,n_\Delta\}$ некоторое разбиение отрезка $[t_*,\vartheta] \subseteq [t_0,\vartheta]$, а $\mathbf{d}(\Delta)$ — диаметр этого разбиения: $\mathbf{d}(\Delta) \equiv \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid i \in 1,\dots,n_\Delta\}$.

Пусть также имеется некоторый класс стратегий $\mathbf{U}_{na}$, формирующих управляющее воздействие $u(\cdot)$ в системе (2.1). Далее символами $x(\cdot,t_*,z_*,\{U,\Delta\},v(\cdot)) \subset X(t_*,z_*,v(\cdot))$ и $u(\cdot,t_*,z_*,\{U,\Delta\},v(\cdot)) \subset \mathbf{U}_{pr}$ будем обозначать соответственно *пошаговое движение* и *реализацию управления*, порожденные законом управления $\{U,\Delta\}$ и помехой $v(\cdot)$ из начальной позиции (t_*,z_*) (см. [1, § 6], [2, гл. I, § 6]).

Определим и обозначим $X^*(t_*,z_*,U)$ множество *конструктивных движений* (см. [1, § 6], [2, гл. I, § 6]), порожденных стратегией $U \in \mathbf{U}_{na}$ из начальной позиции $(t_*,z_*) \in G$ при произвольных помехах, как замыкание в пространстве $C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ множества всех предельных элементов последовательностей вида

$$\left\{x(\cdot,t_*,z_k,\{U,\Delta_k\},v_k(\cdot)), k \in \mathbb{N} \mid \lim_{k\to\infty} z_k = z_*, \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0, v_k(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}\right\}.$$

Определим и обозначим $X(t_*,z_*,U,v(\cdot))$ множество *конструктивных движений*, порожденных стратегией U и программной помехой $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$ из начальной позиции $(t_*,z_*) \in G$, как замыкание в пространстве $C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ множества всех предельных элементов последовательностей вида

$$\left\{x(\cdot,t_*,z_k,\{U,\Delta_k\},v(\cdot)), k \in \mathbb{N} \mid \lim_{k\to\infty} z_k = z_*, \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0\right\}.$$

Программный пучок движений $X^{pr}(t_*,z_*,U)$, порожденный стратегией U, определяется как замыкание в пространстве $C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)$ объединения пучков $X(t_*,z_*,U,v(\cdot))$:

$$X^{pr}(t_*,z_*,U) \equiv \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)} \bigcup_{v(\cdot)\in\mathbf{V}_{pr}} X(t_*,z_*,U,v(\cdot)).$$

Из определений при любых $(t_*,z_*) \in G$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ следует справедливость включений

$$X^{pr}(t_*,z_*,U) \subseteq X^*(t_*,z_*,U). \tag{3.1}$$

Гарантированным результатом $\Gamma^*(t_*,z_*,U)$ для стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ и оптимальным гарантированным результатом $\Gamma^*(t_*,z_*,\mathbf{U}_{na})$ для класса стратегий $\mathbf{U}_{na}$ в начальной позиции $(t_*,z_*) \in G$ при *произвольных помехах* назовем (см. [1, 2]) величины (1.1) соответственно.

Соотношениями (1.2) определяются величины гарантированного результата $\Gamma^{pr}(t_*,z_*,U)$ для стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ и оптимального гарантированного результата $\Gamma^{pr}(t_*,z_*,\mathbf{U}_{na})$ для класса стратегий $\mathbf{U}_{na}$ в начальной позиции $(t_*,z_*) \in G$ при *программных помехах.*

§ 4. Пример

Далее на известном примере задачи оптимального управления [2, гл. VI, § 1] показано, что оптимальные гарантированные результаты $\Gamma^{pr}(t_*,z_*,\mathbf{U}_{na})$ и $\Gamma^*(t_*,z_*,\mathbf{U}_{na})$ могут существенно различаться в случае, когда управляемая система не удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре.

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau)\cdot v(\tau), & x(0) = 0, \\ u(\tau) \in \mathcal{P}, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q}, & \tau \in [0,1], \quad \mathcal{P} \equiv \mathcal{Q} \equiv \{-1,1\} \end{cases} \tag{4.1}$$

и показатель качества вида $\gamma(x(\cdot)) \equiv x(1)$. Множества измеримых по Борелю функций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ на интервале $[0,1]$, удовлетворяющих ограничениям (4.1), обозначим $\mathbf{U}_{pr}$ и $\mathbf{V}_{pr}$. Множество $\mathbf{U}_{na}$ предположим состоящим из всех функций U вида $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathcal{P} \ni (x_1,x_2,u') \mapsto$

$U(x_1, x_2, u') \in \mathcal{P}$, то есть из функций, зависящих от двух позиций в фазовом пространстве системы (4.1) и от некоторой величины $u' \in \mathcal{P}$.

1. Заметим, что для каждой стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ и каждого разбиения Δ интервала $[0,1]$ найдется $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$ (которая шаг за шагом копирует реализацию $u(\cdot, 0, 0, \{U, \Delta\}, v(\cdot))$ управления при пошаговом движении $x(\tau, 0, 0, \{U, \Delta\}, v(\cdot))$), обеспечивающая равенство

$$\dot{x}(\tau, 0, 0, \{U, \Delta\}, v(\cdot)) = 1, \quad \tau \in [0,1].$$

И, следовательно, оптимальный гарантированный результат в классе стратегий $\mathbf{U}_{na}$ при произвольных помехах имеет величину

$$\Gamma^*(0, 0, \mathbf{U}_{na}) = 1. \tag{4.2}$$

2. Для всех $(x_1, x_2, u') \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathcal{P}$ определим стратегию $\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}$ следующим условием:

$$\bar{U}(x_1, x_2, u') \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} u \frac{x_2 - x_1}{u'}.$$

Пусть даны какая–либо помеха $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$, последовательность $\{z_k \in \mathbb{R}^1 \mid \lim_{k\to\infty} z_k = 0\}$ начальных позиций и (для упрощения) регулярные разбиения $\Delta_k \equiv \{\tau_i^k \equiv i \cdot l_k : i \in 0, \ldots, k,\ l_k \equiv k^{-1},\ k \in \mathbb{N}\}$ интервала управления $[0,1]$, такие что $\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0\}$. Определим управление $u^k(\tau) \equiv u_0^k \equiv 1$ для всех моментов $\tau \in [\tau_0^k, \tau_1^k)$ из первого интервала разбиений Δ_k. На последующих интервалах при $i \in 1..k$, определим управление $u^k(\cdot)$ с помощью стратегии $\bar{U}$:

$$u^k(\tau) = u_i^k \equiv \bar{U}(x^k(\tau_{i-1}^k), x^k(\tau_i^k), u_{i-1}^k),\ \tau \in [\tau_i^k, \tau_{i+1}^k),$$

где $x^k(\cdot) \equiv x(\cdot, 0, z_k, \{\bar{U}, \Delta_k\}, v(\cdot))$ — пошаговое движение системы (4.1) порожденное стратегией $\bar{U}$ разбиением Δ_k и помехой $v(\cdot)$ из начальной позиции z_k. Значение управления u_k^k определено только для дальнейших оценок и не влияет на движение $x_k(\cdot)$. Таким образом, для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения:

$$x_k(1) = z_k + \int_0^1 u^k(s) v(s) ds = z_k + \sum_{i=0}^{k-1} u_i^k \int_{\tau_i^k}^{\tau_{i+1}^k} v(s) ds.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ введем вспомогательные величины

$$y_k(1) \equiv z_k + \sum_{i=0}^{k-1} u_{i+1}^k \int_{\tau_i^k}^{\tau_{i+1}^k} v(s) ds.$$

По определению управлений u_i^k

$$u_{i+1}^k \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} u \int_{\tau_i^k}^{\tau_{i+1}^k} v(s) ds,$$

откуда при всех $k \in \mathbb{N}$ следуют равенства

$$y_k(1) = z_k - \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{\tau_i^k}^{\tau_{i+1}^k} v(s) ds \right|. \tag{4.3}$$

Для оценки $y_k(1)$ введем множества $T_+ \equiv \{\tau \in [0,1] \mid v(\tau) = 1\}$, $T_- \equiv \{\tau \in [0,1] \mid v(\tau) = -1\}$, удовлетворяющие соотношениям $T_+ \cap T_- = \varnothing$, $\mu(T_+ \cup T_-) = 1$, где $\mu(A)$ означает величину меры Бореля $\mu(\cdot)$ (измеримого) подмножества $A \subseteq [0,1]$. Обозначим T'_+, T'_- подмножества точек $\tau \in [0,1]$, удовлетворяющих равенствам

$$\lim_{h\to+0} \frac{\mu(T_+ \cap [\tau+h, \tau-h])}{2h} = 1, \quad \lim_{h\to+0} \frac{\mu(T_- \cap [\tau+h, \tau-h])}{2h} = 1 \tag{4.4}$$

соответственно. Согласно теореме Лебега о точках плотности (см. [4, гл. IX, § 6], [5, Theorem 3.20]) два этих множества также удовлетворяют равенствам

$$T'_+ \cap T'_- = \varnothing, \quad \mu(T'_+ \cup T'_-) = 1. \tag{4.5}$$

Рассмотрим последовательность кусочно постоянных функций $\{\nu_k(\cdot) : [0,1] \mapsto [0,1] : k \in \mathbb{N}\}$ вида

$$\nu_k(\tau) \equiv (\tau^k_{i+1} - \tau^k_i)^{-1} \left| \int_{\tau^k_i}^{\tau^k_{i+1}} v(s)ds \right|, \quad \tau \in [\tau^k_i, \tau^k_{i+1}),$$

$i \in 0, \ldots, (k-1)$. Покажем что для всех $\tau \in T'_+ \cup T'_-$ последовательность $\{\nu_k(\tau) : k \in \mathbb{N}\}$ сходится и $\lim_{k\to\infty} \nu_k(\tau) = 1$. Предположим противное — нашлись момент $\bar\tau \in T'_+ \cup T'_-$, подпоследовательность

$$\{(a_j, b_j) \mid \bar\tau \in (a_j, b_j) \subseteq [0,1],\ j \in \mathbb{N},\ \lim_{j\to\infty}(b_j - a_j) = 0\} \tag{4.6}$$

последовательности интервалов $\{(\tau^k_i, \tau^k_{i+1}) \mid \bar\tau \in (\tau^k_i, \tau^k_{i+1}), k \in \mathbb{N}\}$ и $c < 1$ такие, что

$$\left| \int_{a_j}^{b_j} v(s)ds \right| \leq c(b_j - a_j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Если $\bar\tau \in T'_+$, то из этих неравенств следуют неравенства $\mu(T_+ \cap [a_j, b_j]) \leqslant c'(b_j - a_j)$, $j \in \mathbb{N}$, $c' < 1$. Поставим последовательности (4.6) в соответствие последовательность интервалов $\{[\bar\tau - h_j, \bar\tau + h_j] \mid h_j \equiv \max\{\bar\tau - a_j, b_j - \bar\tau\},\ j \in \mathbb{N}\}$ и получим противоречие с первым из равенств (4.4). В случае $\bar\tau \in T'_-$ аналогично получим противоречие со вторым равенством в (4.4).

Так как функции $\nu_k(\cdot)$ измеримы, ограничены в совокупности и сходятся почти всюду на $[0,1]$ к функции $\nu(\cdot) \equiv 1$ (см. (4.5)), то интегралы этих функций на интервале $[0,1]$ также сходятся к интегралу от функции $\nu(\cdot)$ на интервале $[0,1]$ (см. [3, п. I.4.18]). А именно,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \nu_k(s)ds = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{\tau^k_i}^{\tau^k_{i+1}} v(s)ds \right| = \int_0^1 \nu(s)ds = 1.$$

Отсюда, принимая во внимание (4.3), мы получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} y_k(1) = -1, \tag{4.7}$$

справедливое для произвольной $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$.

Теперь оценим величины $|y_k(1) - x_k(1)|$:

$$|y_k(1) - x_k(1)| \leqslant \left| \sum_{i=0}^{k-1} (u^k_{i+1} - u^k_i) \int_{\tau^k_i}^{\tau^k_{i+1}} v(s)ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2l_k + \left| \sum_{i=0}^{k-2} u^k_{i+1} \int_{\tau^k_i}^{\tau^k_{i+1}} (v(s) - v(s+l_k))ds \right| \leqslant 2l_k + \int_0^{1-l_k} |v(s) - v(s+l_k)|\, ds.$$

В силу известного свойства измеримых функций последняя величина при любом $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$ стремится к нулю, если l_k стремится к нулю. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} |y_k(1) - x_k(1)| = 0. \tag{4.8}$$

Соотношения (4.7) и (4.8) дают равенство $x(1) = -1$ для произвольной $x(\cdot) \in X(0, 0, \bar U, v(\cdot))$ и $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{pr}$. И, следовательно, оптимальный гарантированный результат в рассматриваемом классе стратегий управления при программных помехах имеет величину

$$\Gamma^{pr}(0, 0, \mathbf{U}_{na}) = -1, \tag{4.9}$$

существенно лучшую, чем оптимальный гарантированный результат (4.2) в общем случае. С некоторыми модификациями приведенных рассуждений можно построить также стратегию, обеспечивающую результат (4.9) при произвольных достаточно мелких разбиениях интервала $[t_*, \vartheta]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
2. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
5. Oxtoby J. C. Measure and category. — New York: Springer–Verlag, 1971. Русский перевод: Окстоби Дж. Мера и категория. — М.: Мир, 1974. — 160 с.
6. Серков Д. А. Об одном свойстве конструктивных движений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 98–103.

Поступила в редакцию 01.03.10

D. A. Serkov

On a property of the constructive motions. II

The control problem under dynamical disturbance is considered. The example of the control system and the terminal type quality index, such that optimal guarantee decrease substantially while narrowing the set of allowed disturbances to the programm ones is given.

Keywords: differential games, program disturbance, constructive motion.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 93B52

Серков Дмитрий Александрович, к. ф.-м. н., главный программист, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: serkov@imm.uran.ru