УДК 517.926

© *Н. Х. Розов*

ФЕНОМЕН БУФЕРНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Говорят, что в математической модели нелинейной распределенной автоколебательной системы наблюдается феномен буферности, если подходящим выбором параметров этой системы можно обеспечить существование конечного заранее заданного числа различных устойчивых циклов. В статье исследованы некоторые математические модели естествознания, демонстрирующие феномен буферности.

Ключевые слова: распределенная автоколебательная система, аттрактор, феномен буферности.

Введение

Эффективным инструментом познания разнообразных конкретных объектов и явлений окружающего нас мира служит теоретическое и численное исследование их математических моделей. В то же время именно обстоятельный анализ таких моделей часто приводил к постановке новых чисто математических задач и побуждал разработку новых математических методов.

Интересным примером такого взаимно обогащающего взаимодействия теоретического исследования математической модели и глубокого проникновения в суть реального явления может служить феномен буферности, который лишь сравнительно недавно начал изучаться в полной мере. Исследование этого явления позволило внести новые элементы в трактовку понятия «нелинейного мира», а также яснее понять возможные механизмы сложнейших отношений порядка и хаоса в природе.

0. Реальные объекты и их математические модели. Хорошо известна та исключительная роль, которую играют всевозможные колебательные процессы в механике, физике, технике, химии, биологии, экономике и т. д. Важным аспектом их изучения является теоретический анализ математических моделей конкретных колебательных систем.

При исследовании *колебательных объектов с сосредоточенными параметрами*, или, короче, *сосредоточенных колебательных систем*, описываемых автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, ключевым является понятие *устойчивого предельного цикла* такой системы. Уместно напомнить, что это понятие было введено А. Пуанкаре чисто умозрительно в 80-х годах XIX века. Но лишь в 20-х годах XX века выдающийся советский физик А. А. Андронов установил, что устойчивый предельный цикл — адекватное математическое отражение (описание) реального стационарного колебательного процесса (установившегося периодического режима) в системах с сосредоточенными параметрами.

Совершенно ясно, что в зависимости от специфики прикладной проблемы в одной ситуации принципиально важно наличие лишь единственного такого цикла, а в другой, наоборот, желательно, чтобы их было несколько. Поскольку система обыкновенных дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью, всегда содержит некоторое число параметров (отражающих реальные характеристики исследуемого явления), то при различных значениях этих параметров, вообще говоря, существует разное количество устойчивых предельных циклов. Не составляет труда привести примеры систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых соответствующим выбором значений параметров можно обеспечить существование *любого конечного a priori заданного количества устойчивых предельных циклов*.

В разнообразных областях науки, новой техники и современных технологий часто встречаются *колебательные объекты с распределенными параметрами* или, короче, *распределенные колебательные системы*, состояние которых зависит от времени и от пространственных переменных, причем состояние в каждой точке пространства периодически меняется во времени.

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

Иначе говоря, в таких объектах наблюдаются периодические (по времени) автоколебания, или *автоволновые процессы* (термин Р. В. Хохлова).

Динамика этих объектов моделируется, как правило, системами дифференциальных уравнений в частных производных с определенными краевыми условиями. Такая система содержит и различные параметры, которые характеризуют свойства реального объекта. Автоколебательному режиму отвечает *устойчивый цикл*, или просто *цикл*, то есть периодическое по времени решение системы уравнений в частных производных, удовлетворяющее краевым условиям.

Естественно, в общем случае эта краевая задача допускает один или несколько циклов, и установление их возможного числа весьма важно, поскольку означает выяснение количества существующих в действительности автоколебательных режимов. Конечно, число таких циклов может быть различным при разных значениях параметров. Так возникает чисто математическая проблема исследования зависимости числа устойчивых циклов системы уравнений (или уравнения) в частных производных с краевыми условиями от параметров.

1. Феномен буферности. Будем говорить, что в математической модели распределенной колебательной системы наблюдается *феномен буферности*, если в рассматриваемой краевой задаче для системы дифференциальных уравнений в частных производных надлежащим выбором значений входящих параметров можно обеспечить существование конечного заранее фиксированного числа различных устойчивых циклов. Другими словами, буферность означает теоретическую возможность для любого натурального N так подобрать характеристики объекта, чтобы в нем реализовывалось N разных устойчивых автоколебательных режимов.

Задачу о теоретическом исследовании периодических по времени режимов в колебательных объектах с распределенными параметрами, по-видимому, впервые поставил А. А. Витт [1, 2]. Имя и работы этого замечательного нашего ученого, к сожалению, мало известны. Александр Адольфович Витт — один из ярких представителей советской школы теории колебаний (которая прославилась именами Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова и др.), выполнивший ряд оригинальных, интересных и перспективных исследований. Он являлся и одним из создателей классической книги «Теория колебаний». А. А. Витт был репрессирован (и погиб в 1937 г.), его труды цитировались редко, а его фамилия среди авторов книги «Теория колебаний» (М., 1937) не значилась и была восстановлена лишь через много лет:

Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1959, 1981.

А. А. Витт высказал [1] гипотезу о том, что в так называемом «автогенераторе с отрезком длинной линии в цепи обратной связи» могут сосуществовать сразу несколько устойчивых циклов. Сам факт увеличения числа автоколебательных режимов при изменении значения параметра для реального колебательного объекта с распределенными параметрами впервые был зафиксирован физиками в ходе экспериментальной работы [3]. Математическое же исследование феномена буферности инициировано Ю. С. Колесовым, изучавшим это явление численными методами в параболических системах типа реакция–диффузия [4], а затем теоретически — в гиперболических уравнениях [5].

Подробное изложение строгой математической теории явления буферности можно найти в статьях и монографиях [6–12]. Рассматриваемые математические модели представляют собой краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического или параболического типа, а сценарий возрастания числа устойчивых периодических по времени решений (циклов) обычно разворачивается при увеличении некоторого параметра, отвечающего за энергию системы (или, иными словами, *энергетического параметра*). В качестве такового во многих радиофизических приложениях выступает коэффициент усиления. Существенно, что само понятие «буферность» предполагает наличие некоего бифуркационного процесса, в ходе развития которого и происходит неограниченный рост количества сосуществующих устойчивых циклов.

Доказательства соответствующих утверждений весьма нетривиальны и кропотливы, они требуют громоздких преобразований для преодоления серьезных аналитических трудностей. В их основе лежит идеология метода бесконечномерной нормализации, представляющего собой специальный вариант асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского–

Самойленко и смыкающегося в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю. С. Колесова [13].

Проведенные разнообразные исследования показали, что явление буферности «типично» для весьма широкого класса математических моделей, которые адекватно описывают многие нелинейные колебательные процессы в естествознании (в радиофизике [14], механике [15], оптике [16], теории горения [17], экологии [18]). Помимо этого, удалось проследить несомненную связь буферности с такими явлениями, как возникновение турбулентности или рождение динамического хаоса [19, 20].

2. Система Витта. А. А. Витт изучал [1] автоколебания в физическом объекте, представляющем собой (рис. 1) генератор с двухпроводной длинной линией длины l с равномерно распределенными сопротивлением R, емкостью C и индуктивностью L (проводимость $G = 0$).

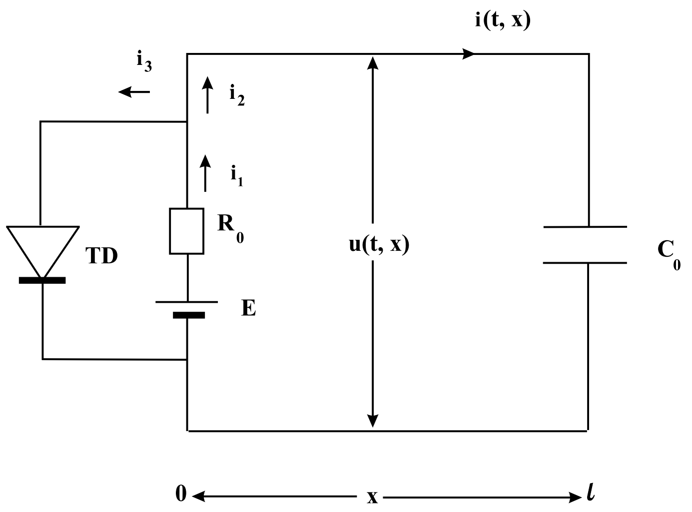

Рис. 1.

К концу $x = l$ линии присоединена емкость C_0, а на конце $x = 0$ имеется источник постоянного напряжения E, сопротивление R_0 и туннельный диод TD с «опрокинутой» симметричной нелинейной характеристикой $i = f(u)$ (рис. 2). (Конечно, у самого А. А. Витта фигурировал не туннельный диод, а электронная лампа.)

Хорошо известен стандартный вывод телеграфных уравнений, связывающих силу тока и напряжение в длинной линии. Далее, легко установить соотношения между силой тока и напряжением на каждом из концов этой линии. Наконец, применим стандартную в теории колебаний аппроксимацию нелинейной характеристики $f(u)$ вблизи рабочей точки A кубической параболой. Опуская все эти подробности, сразу выпишем (при некоторых разумных предположениях) *систему Витта* — краевую задачу, являющуюся математической моделью рассматриваемого автогенератора:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon v, \tag{1}$$

$$v\big|_{x=0} = \varepsilon\alpha(u - u^3/3)\big|_{x=0}, \quad \beta\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=1} + v\big|_{x=1} = 0. \tag{2}$$

Здесь u и v — нормированные переменные составляющие напряжения и силы тока в линии. В задачу входят параметры, связанные с физическими характеристиками автогенератора:

$$\varepsilon = lR\sqrt{C/L}, \quad \beta = C_0/(Cl),$$

а $\alpha > 0$ — так называемый коэффициент усиления (зависящий от крутизны характеристики $f(u)$ в рабочей точке A).

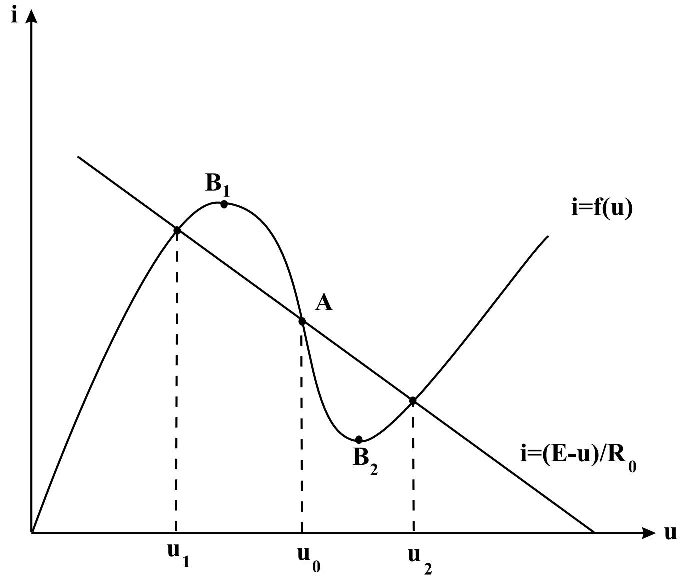

Рис. 2.

Таким образом, в математическом плане объектом исследования явилась линейная система телеграфных уравнений с нелинейностью в одном из граничных условий. Будем считать, что $0 < \varepsilon \leqslant 1$ (т. е. малы нормированные активные потери в линии). Представляет интерес изучение динамики возможных аттракторов системы Витта (1), (2) в случае увеличения коэффициента усиления α. Соответствующий анализ показал [10], что в этой математической модели наблюдается явление буферности.

Теорема. *При любом фиксированном $\alpha > 1$ в системе Витта* (1), (2) *имеет место явление буферности: при подходящем уменьшении параметра ε можно гарантировать существование у нее любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов. При этом динамика системы Витта по параметру α такова: каждый цикл бифурцирует из нулевого состояния равновесия при прохождении параметром α некоторого «своего» критического значения и рождается неустойчивым, но затем при прохождении параметром α некоторого большего критического значения этот цикл становится устойчивым и остается таковым при дальнейшем увеличении параметра α.*

3. Буферность в распределенных механических системах. Исследования показали, что феномен буферности наблюдается и в слабо нелинейных механических системах с распределенными параметрами. Ограничимся лишь одним, но интересным примером — математической моделью линейных плоских колебаний струны, взаимодействующей с автоколебательным контуром типа Ван дер Поля.

Рассмотрим автоколебательную систему (рис. 3), состоящую из однородной возбуждаемой струны с закрепленными концами и нелинейного генератора механических колебаний (резонатора), груз которого закреплен в середине струны. Введем следующие обозначения для физических характеристик системы.

Струна: l — длина, ρ — плотность массы, T — натяжение, h — плотностью сил трения, u_1 и u_2 — смещения участков струны слева и справа от ее середины.

Резонатор: M — масса груза, k — упругость пружины, v — смещение груза от положения равновесия, нелинейный элемент трения работает по закону $h_r(v) = \lambda(v^2 - 1)$, $\lambda > 0$.

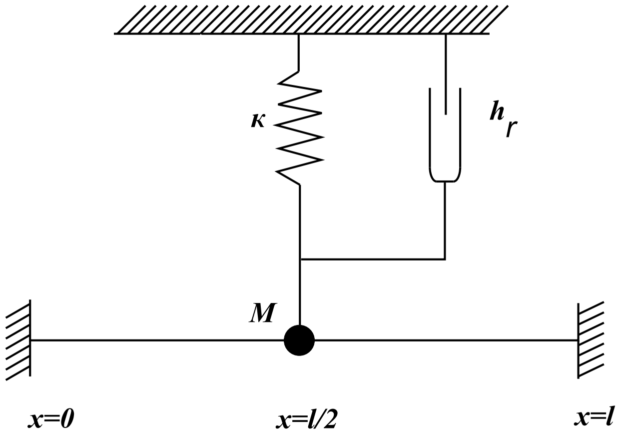

Рис. 3.

Взаимодействие такой струны с резонатором описывается краевой задачей [21]

$$\rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+h\frac{\partial u_j}{\partial t}=T\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2},\quad j=1,2,$$
$$u_1|_{x=0}=u_2|_{x=l}=0,\quad u_1|_{x=l/2}=u_2|_{x=l/2}=v(t),$$
$$M\frac{d^2v}{dt^2}+h_r\frac{dv}{dt}+kv=T\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=l/2}.$$

Полагая (в силу симметрии)

$$u_1(t,x)=u_2(t,l-x)=u(t,x),\quad 0\leqslant x\leqslant l/2$$

и выполняя подходящие нормировки переменных t,x, приходим к краевой задаче

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t\geqslant 0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u|_{x=0}=0,\quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon\alpha(u^2-1)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u\right]\Big|_{x=1}=-\gamma\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}.\end{gathered}\tag{3}$$

Предположим, что $0<\varepsilon\leqslant 1$, а параметры $\alpha,\beta,\gamma>0$ имеют порядок единицы. Будем интересоваться вопросом о существовании и устойчивости циклов задачи (3), бифурцирующих из нуля при увеличении параметра α. Опуская технические детали и точные формульные выражения накладываемых условий, приведем сразу окончательный результат [15].

Теорема. *При подходящем увеличении α, уменьшении ε и при некоторой общности положения относительно параметров β, γ можно гарантировать существование у краевой задачи* (3) *любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов, то есть в этой задаче наблюдается явление буферности.*

Отметим, что при уменьшении γ и при фиксированных других параметрах явление буферности разрушается — у задачи (3) остается единственный устойчивый цикл с частотой, близкой к частоте осциллятора Ван дер Поля. Иначе говоря, при малых γ, то есть при слабом обратном воздействии струны на осциллятор, наблюдается *явление захвата*: существует единственный периодический режим с частотой, близкой к частоте внешнего воздействия. С другой стороны, при $\gamma\geqslant 1$ происходит полное гашение колебаний. Таким образом, буферность в задаче (3) реализуется в некотором «среднем» диапазоне значений параметра γ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. техн. физ. — 1934. — Т. 4, вып. 1. — С. 144–157.

2. Витт А. А. К теории скрипичной струны // Журн. технич. физ. — 1936. — Т. 6, № 9. — С. 1459–1479.
3. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. Об автоколебаниях в системах с запаздывающей обратной связью // Радиотехника и электроника. — 1956. — Т. 1, № 4. — С. 126–130.
4. Захаров А. А., Колесов Ю. С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник–жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. — С. 3–15.
5. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // ДАН СССР. — 1990. — Т. 315, № 2. — С. 281–283.
6. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. — 1998. — Т. 222. — С. 1–192.
7. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений // Успехи матем. наук. — 2000. — Т. 55, вып. 2. — С. 95–120.
8. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Феномен буферности в нелинейной физике // Тр. МИАН. — 2005. — Т. 250. — С. 112–182.
9. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. К вопросу о теоретическом объяснении явления диффузионной буферности // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2020–2040.
10. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Асимптотическая теория колебаний в системе Витта // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. — М.: ВИНИТИ, 1999. — Т. 67. — С. 5–68.
11. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 103–141.
12. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. О природе явления буферности в слабо диссипативных системах // Теор. и матем. физ. — 2006. — Т. 146, № 3. — С. 447–466.
13. Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. — 1995. — Т. 186, вып. 10. — С. 57–72.
14. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в $RCLG$-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 233. — С. 153–207.
15. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в распределенных механических системах // Прикл. матем. и мех. — 2001. — Т. 65, вып. 2. — С. 183–198.
16. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 140, № 1. — С. 14–28.
17. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в теории горения // Докл. АН. — 2004. — Т. 396, № 2. — С. 170–173.
18. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионная буферность в одной математической модели биологии // Изв. РАН. Сер. Матем. — 1998. — Т. 62, № 5. — С. 135–164.
19. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005.
20. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А. Жизнь на кромке хаоса // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — Вып. 23. — С. 219–266.
21. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М., 1988.

Поступила в редакцию 01.03.10

N. Kh. Rozov

The buffer phenomenon in mathematical models of natural sciences

We say that in mathematical model of nonlinear distributed self-oscillatory system the buffer phenomenon is observed if in this model there is any predetermined finite numbers of attractors of the same type (stable equilibrium states, stable periodic solutions, etc.) for an appropriate choice of its parameters. We investigate some mathematical models of natural sciences, which exhibit the buffer phenomenon.

Keywords: distributed self-oscillatory system, attractor, buffer phenomenon.

Mathematical Subject Classifications: 35B25, 35B10, 35C20

Розов Николай Христович, д. ф.-м. н., профессор кафедры дифференциальных уравнений, декан факультета педагогического образования, Московский государственный университет, 119899, Россия, г. Москва, В 234, Воробьёвы горы, МГУ.
E-mail: fpo.mgu@mail.ru