ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

УДК 517.911.5/517.938

© *Е. А. Панасенко*

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕКУРРЕНТНЫХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ [1]

Изучаются условия существования рекуррентных и почти периодических решений неавтономного дифференциального включения с параметром, меняющемся в компактном метрическом пространстве. Приводятся соответствующие следствия для обыкновенных дифференциальных включений.

Ключевые слова: дифференциальное включение, рекуррентное и почти периодическое решения, слабо инвариантное множество, топологическая динамическая система.

Введение

Как известно, автономному дифференциальному уравнению $\dot{x} = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$ (или включению $\dot{x} \in F(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$) с достаточно «хорошей» правой частью можно сопоставить топологическую динамическую систему, траектории которой будут соответствовать решениям заданного дифференциального уравнения (или интегральной воронке в случае дифференциального включения), и исследовать движения точек его фазового пространства. В свою очередь, применение аппарата теории динамических систем позволяет изучать вопросы, связанные с асимптотическим поведением решений, их устойчивостью, существованием у системы периодических, почти периодических или рекуррентных решений. Важно отметить, что, в силу свойства инвариантности решений относительно сдвигов по времени, стационарность дифференциального включения (или системы уравнений) автоматически означает равномерность относительно начального момента времени асимптотических свойств решений включения.

Для неавтономных систем дифференциальных уравнений и для дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{0.1}$$

где $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n,$ построить динамическую систему подобным образом не представляется возможным, поскольку произвольный сдвиг по времени решения включения (0.1) уже не обязан быть решением рассматриваемого включения.

Между тем исследование условий равномерности по начальному моменту времени асимптотических характеристик включения (0.1) приводит к конструкциям вида

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.2}$$

где $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n,$ а пара (Σ, h^t) задает топологическую динамическую систему (часто с компактным фазовым пространством). В силу очевидного свойства

$$x(t+\tau, \sigma, x_0) = x\big(t, h^\tau\sigma, x(\tau, \sigma, x_0)\big)$$

решений включения (0.2) по этому включению при определенных условиях можно построить топологическую динамическую систему, которая будет расширением системы (Σ, h^t). Таким образом, удается разработать содержательную теорию нестационарных дифференциальных включений на основе хорошо развитых методов теории динамических систем.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-97503) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант 2.1.1/1131).

Построение семейства дифференциальных включений (0.2), сопровождающих включение (0.1), основано на методике Ж. Фавара [1], где в качестве динамической системы (Σ, h^t) выступает динамическая система сдвигов (система А.А. Маркова [2]), построенная по функции F, определяющей правую часть включения (0.1). Таким образом, все результаты, которые будут иметь место для семейства включений (0.2) при любом значении параметра σ, получат естественное распространение на неавтономные дифференциальные включения.

Основное содержание этой работы посвящено изучению условий существования рекуррентных и почти периодических решений дифференциального включения (0.2). Предполагается, что рассматриваемое включение снабжено топологической динамической системой (Σ, h^t) с компактным и минимальным относительно потока h^t фазовым пространством Σ, правая часть $F(\sigma, x)$ включения (0.2) полунепрерывна сверху и для всех (σ, x) представляет компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Предполагается также, что существует положительно инвариантное (или слабо положительно инвариантное) относительно решений включения (0.2) компактное множество $\mathfrak{M}$, определяемое непрерывной функцией $\sigma \to M(\sigma) \subset \mathbb{R}^n$.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле, $O_r(x_0) \doteq x_0 + O_r$, $\rho(x, M) \doteq \min\limits_{y\in M} |x - y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$. Если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{int} M$ — внутренность, $\operatorname{cl} M$ — замыкание, $\operatorname{fr} M$ — граница, а $\operatorname{co} M$ — замыкание выпуклой оболочки M.

Пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Подпространство в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непустых *выпуклых* компактных подмножеств, обозначим $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$. Пространства $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ будем рассматривать с метрикой Хаусдорфа $\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$, где $d(A, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B : $d(A, B) \doteq \max\limits_{a\in A} \rho(a, B)$. Далее, если M — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, то норму M будем обозначать через $|M| \doteq \max\bigl\{|x| \colon x \in M\bigr\}$.

Пусть Σ — полное метрическое пространство с метрикой ρ_{Σ}. Рассмотрим *топологическую динамическую систему* (Σ, h^t). Это означает [2, гл. V; 3, с. 156–206], что h^t — однопараметрическая группа преобразований фазового пространства Σ в себя, непрерывно зависящая от $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$, то есть выполнены следующие условия:

1) $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$ для каждого $\sigma \in \Sigma$;

2) $h^{t+s}\sigma = h^t h^s \sigma$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и каждого $\sigma \in \Sigma$;

3) функция $(t, \sigma) \to h^t\sigma$ непрерывна в метрике пространства $\mathbb{R} \times \Sigma$.

Пространство Σ называется *фазовым пространством* динамической системы, h^t — *потоком* на Σ, функция $t \to h^t\sigma$ — *движением* точки σ, а множества $\operatorname{orb}(\sigma) \doteq \{h^t\sigma : t \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{orb}_+(\sigma) \doteq \{h^t\sigma \colon t \in [0, \infty)\}$ и $\operatorname{orb}_-(\sigma) \doteq \{h^t\sigma : t \in (-\infty, 0]\}$ — *траекторией* (или *орбитой*), *положительной* и *отрицательной полутраекторией* точки σ соответственно.

Напомним, что функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ называется *полунепрерывной сверху* (*снизу*) в точке (σ_0, x_0), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что соотношение $d(F(\sigma, x), F(\sigma_0, x_0)) \leqslant \varepsilon$ $\bigl(d(F(\sigma_0, x_0), F(\sigma, x)) \leqslant \varepsilon\bigr)$ выполнено при всех (σ, x), удовлетворяющих неравенству $\rho_{\Sigma}(\sigma, \sigma_0) + |x - x_0| \leqslant \delta$. Если F полунепрерывна сверху (снизу) в каждой точке (σ_0, x_0) множества $G = \Sigma \times \mathbb{R}^n$, то F *полунепрерывна сверху* (*снизу*) *на множестве* G. Если функция F полунепрерывна сверху и снизу (в точке или на множестве), то она называется *непрерывной.* Далее, функция F называется *локально липшицевой по второму аргументу*, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое число $l_K > 0$, что $\operatorname{dist}(F(\sigma, x), F(\sigma, y)) \leqslant l_K|x - y|$ для любого $\sigma \in \Sigma$ и всех $x, y \in K$.

Пусть задана функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим дифференциальное включение

вида
$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{1.1}$$
то есть включение с параметром σ (или семейство дифференциальных включений). При каждом фиксированном σ под *решением* включения (1.1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, которая при почти всех $t \in J$ удовлетворяет включению $\dot{\varphi}(t) \in F\big(h^t\sigma, \varphi(t)\big)$, таким образом, нас интересуют решения типа Каратеодори.

Если функция F, которая определяет правую часть включения (1.1), полунепрерывна снизу или полунепрерывна сверху и имеет выпуклые образы, то для любого σ существует локальное решение задачи Коши [4, с. 213; 5, с. 66]
$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(0) = x_0. \tag{1.2}$$
Мы будем рассматривать задачу (1.2) в предположении, что имеет место следующее условие.

Условие 1. *Функция* F *действует из* $\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *в пространство* $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ *и полунепрерывна сверху в каждой точке* (σ, x).

Замечание 1. Отметим, что из условия 1 и компактности Σ следует существование для каждого $r > 0$ такой константы $k_r > 0$, что неравенство $|F(h^t\sigma, x)| \leqslant k_r$ выполнено при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times O_r$ и почти всех $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [5, с. 53]).

Пусть, далее, задана функция $M : \Sigma \to 2^{\mathbb{R}^n}\backslash\varnothing$.

Определение 1. Множество $M(\sigma)$ называется *слабо положительно инвариантным относительно включения* (1.1), если для любого $x_0 \in M(\sigma)$ найдется хотя бы одно решение $t \to \varphi(t, \sigma, x_0)$ задачи (1.2) такое, что $x(t) \in M(h^t\sigma)$ для всех $t \geqslant 0$, для которых решение $\varphi(t, \sigma, x_0)$ существует. Если это свойство выполнено для каждого решения, выходящего из точки x_0, то множество $M(\sigma)$ называется *положительно инвариантным относительно включения* (1.1).

Достаточные условия слабой положительной инвариантности и положительной инвариантности множества относительно дифференциального включения могут быть сформулированы в терминах конусов опорных к $M(\sigma)$ (см., например, [6, 7]) или в терминах функций Ляпунова [8, 9, 10]. Если функция M имеет компактные образы и является непрерывной, то из положительной инвариантности множества $M(\sigma)$ следует, что любое решение задачи (1.2), выходящее из точки $x_0 \in M(\sigma)$, бесконечно продолжаемо вправо, а из слабой положительной инвариантности $M(\sigma)$ следует наличие хотя бы одного решения с бесконечным правым интервалом существования.

Предположим, что фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, h^t) компактно и выполнено условие 1. Построим пространство $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой $\rho_{\Omega} = \rho_{\Sigma} + \operatorname{dist}$, которое будет полным метрическим пространством, и каждой точке $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$ и любому $t \geqslant 0$ поставим в соответствие сечение $S(t, \omega)$ интегральной воронки включения (1.1), то есть множество значений в момент времени t всех решений включения (1.1), когда начальное значение $x(0)$ пробегает всё множество X. Если каждое решение включения (1.1) существует при любом $t \geqslant 0$, то в силу высказанных предположений множество $S(t, \omega)$ *непусто* и *компактно* для любого $t \geqslant 0$ (см., например, [4, с. 216]). Тогда для каждого $t \geqslant 0$ можно определить функцию $g^t : \Omega \to \Omega$ равенством
$$g^t\omega \doteq (h^t\sigma, S(t, \omega)), \quad \omega = (\sigma, X). \tag{1.3}$$
Для каждого $\omega \in \Omega$ будут выполнены свойства
$$g^t\omega|_{t=0} = \omega \quad \text{и} \quad g^{t+s}\omega = g^t g^s\omega, \quad t, s \geqslant 0,$$

(см. [7, 9]). Кроме того, для любых положительных чисел ε и ϑ и любой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$ множества Ω найдется такое $\delta > 0$, что для всякой точки $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$, удовлетворяющей неравенству $d_{\Omega}(\omega, \omega_0) \leqslant \delta$, при всех $t \in [0, \vartheta]$ выполнено неравенство $d_{\Omega}(g^t\omega, g^t\omega_0) \leqslant \varepsilon$, где

$$d_{\Omega}(\omega, \omega_0) \doteq \rho_{\Sigma}(\sigma, \sigma_0) + d(X, X_0).$$

Таким образом, функция $\omega \to g^t\omega$ задаёт *полупоток* на Ω и *полунепрерывна сверху* равномерно относительно t на каждом отрезке $[0, \vartheta]$. Если функция $x \to F(\sigma, x)$ является локально липшицевой, то (Ω, g^t) превращается в полудинамическую систему (с непрерывным полупотоком, $t \geqslant 0$), а в предположении неограниченной продолжаемости решений включения (1.1) влево (Ω, g^t) становится классической топологической динамической системой ($t \in \mathbb{R}$) и расширением динамической системы (Σ, h^t).

По непрерывной функции $M\colon \Sigma \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ построим множество

$$\mathfrak{M} \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega : X \subseteq M(\sigma)\}. \tag{1.4}$$

Определение 2. Множество (1.4) называется *положительно инвариантным* (относительно g^t) [2, гл. V; 3, с. 156–206], если $g^t\omega \in \mathfrak{M}$ для каждого $\omega \in \mathfrak{M}$ и всех $t \geqslant 0$.

Определение 3. Множество (1.4) называется *слабо положительно инвариантным* (относительно g^t), если $g^t\omega \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ для каждого $\omega \in \mathfrak{M}$ и всех $t \geqslant 0$.

Очевидно, что, в силу задания полупотока g^t, положительная инвариантность множества $\mathfrak{M}$ означает равномерную положительную инвариантность множества $M(\sigma)$ относительно включения (1.1) в смысле определения 1: для любого компакта $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ вложение $S(t, \omega) \subset M(h^t\sigma)$, $\omega = (\sigma, X(\sigma))$ выполнено при всех $\sigma \in \Sigma$ и $t \geqslant 0$. Сказанное имеет место и для свойства слабой положительной инвариантности.

Если множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно, то для любого $\sigma \in \Sigma$ и всякого начального компактного множества $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ сечение интегральной воронки $S(t, \omega)$, $\omega = (\sigma, X(\sigma))$ определено для каждого $t \geqslant 0$. Следовательно, в качестве расширения динамической системы (Σ, h^t) может выступать система $(\mathfrak{M}, g^t)$ с компактным фазовым пространством $\mathfrak{M}$ (с метрикой $\rho_{\mathfrak{M}} \doteq \rho_{\Omega}$) и полупотоком g^t, определенным равенством (1.3).

Лемма 1. *Если пространство* Σ *компактно, функция* $\sigma \to M(\sigma)$ *непрерывна, а функция* $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ *удовлетворяет условию* 1, *то для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *все решения задачи* (1.2) *удовлетворяющие включению* $\varphi(t, \sigma) \in M(h^t\sigma)$ *при* $t \geqslant 0$, *равномерно ограничены и равностепенно непрерывны при* $t \in [0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из компактности Σ и непрерывности функции M следует, что M ограничена, то есть существует такое $m > 0$, что $|M(\sigma)| \leqslant m$ для любого $\sigma \in \Sigma$. Пусть $\varphi(t, \sigma)$ есть решение включения (1.1), соответствующее некоторому $\sigma \in \Sigma$, такое, что $\varphi(t, \sigma) \in M(h^t\sigma)$ для любого $t \geqslant 0$. Тогда $|\varphi(t, \sigma)| \leqslant |M(h^t\sigma)| \leqslant \max\limits_{\sigma \in \Sigma} |M(\sigma)| = m$ и, следовательно, $\varphi(t, \sigma) \in O_m$. Таким образом, каждое решение $\varphi(t, \sigma)$ включения (1.1), удовлетворяющее включению $\varphi(t, \sigma) \in M(h^t\sigma)$, ограничено одной и той же константой.

Далее, при почти всех t имеет место включение $\dot{\varphi}(t, \sigma) \in F(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma))$, откуда, согласно замечанию 1, следуют оценки

$$|\dot{\varphi}(t, \sigma)| \leqslant |F(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma))| \leqslant \max_{(\sigma, x) \in \Sigma \times O_m} |F(\sigma, x)| = k.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при почти всех t имеют место неравенства

$$|\varphi(t + \varepsilon, \sigma) - \varphi(t, \sigma)| \leqslant \int_t^{t+\varepsilon} |\dot{\varphi}(s, \sigma)| \leqslant k\varepsilon.$$

Таким образом, функция $\varphi(t, \sigma)$ равномерно непрерывна, и все сказанное верно для любого решения включения (1.1), содержащегося в $M(h^t\sigma)$. $\square$

§ 2. Рекуррентность и почти периодичность интегральной воронки

Пусть (Σ, h^t) произвольная топологическая динамическая система. Напомним, что множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ называется *инвариантным* (относительно потока h^t), если $h^t\Sigma_0 = \Sigma_0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и *минимальным*, если оно замкнуто, инвариантно и не содержит замкнутого инвариантного подмножества, не совпадающего с Σ_0. В силу леммы Цорна имеет место следующая теорема Д. Биркгофа (см. [2, с. 400; 11, с. 15]): *любое инвариантное компактное множество содержит компактное минимальное подмножество.*

Далее, если пространство Σ компактно, то каждой точке $\sigma \in \Sigma$ отвечает *омега-предельное множество* $\Sigma_0(\sigma)$, то есть множество всех частичных пределов (в метрике ρ_{Σ}) движения $t \to h^t\sigma$ при $t \to \infty$. Множество $\Sigma_0(\sigma)$ непусто, компактно, связно и инвариантно. Поэтому для любой точки $\sigma_0 \in \Sigma_0(\sigma)$ замыкание её траектории $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ содержится в $\Sigma_0(\sigma)$. Если, кроме того, множество $\Sigma_0(\sigma)$ минимально, то $\Sigma_0(\sigma) = \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ для каждого $\sigma_0 \in \Sigma_0(\sigma)$. Пусть Σ_0 минимально, тогда всякое движение $t \to h^t\sigma_0$ в Σ_0 *рекуррентно* по Биркгофу [2]. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\ell(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \rho_{\Sigma}(h^\tau\sigma_0, \sigma_0) \leqslant \varepsilon\} \tag{2.1}$$

относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$ (то есть $\ell(\varepsilon) \bigcap [t_0, t_0 + s] \neq \varnothing$ для некоторого $s > 0$ и всех $t_0 \in \mathbb{R}$).

Предположим, что Σ компактно, что выполнено условие 1, а также следующее условие положительной инвариантности.

Условие 2. *Существует непрерывная функция* $M : \Sigma \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *такая, что множество* $\mathfrak{M}$, *определенное равенством* (1.4)*, положительно инвариантно.*

Рассмотрим обобщенную динамическую систему $(\mathfrak{M}, g^t)$, $t \geqslant 0$, введённую в предыдущем параграфе, и для всякой точки $\omega = (\sigma, X) \in \mathfrak{M}$ построим множество $\mathfrak{M}_0(\omega) \subset \mathfrak{M}$, состоящее из всех частичных пределов (в метрике $\rho_{\mathfrak{M}}$) движения $t \to g^t\omega = (h^t\sigma, S(t, \omega))$ при $t \to \infty$. Следовательно, точка $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$ принадлежит $\mathfrak{M}_0(\omega)$ в том и только в том случае, если найдется такая последовательность $\{t_i\}$ моментов времени, что $t_i \to \infty$ и

$$\rho_{\mathfrak{M}}(g^{t_i}\omega, \omega_0) = \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, \sigma_0) + \mathrm{dist}(S(t_i, \omega), X_0) \to 0.$$

В силу компактности множества Σ и непрерывности функции $\sigma \to M(\sigma)$, для каждой точки $\omega \in \mathfrak{M}$ множество $\mathfrak{M}_0(\omega)$ непусто. Если же в дополнение к сказанному правая часть F дифференциального включения (1.1) удовлетворяет локальному условию Липшица по второму аргументу, то функция $(t, \omega) \to S(t, \omega)$ непрерывна, и поэтому $\Omega_0(\omega)$ становится омега-предельным множеством точки $\omega \in \Omega$ в классическом смысле.

Определение 4. Функция $t \to S(t, \omega)$, определяющая интегральную воронку включения (1.1), называется *рекуррентной*, если для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ множество

$$\Delta(\varepsilon, \vartheta) \doteq \left\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant \vartheta} \mathrm{dist}\,(S(t + \tau, \omega), S(t, \omega)) \leqslant \varepsilon\right\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Пусть $\Sigma_0(\sigma)$ — омега-предельное множество точки $\sigma \in \Sigma$. Обозначим $\widehat{\Sigma} \doteq \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma} \Sigma_0(\sigma)$. Напомним, что если Σ минимально, то $\widehat{\Sigma} = \Sigma$.

Теорема 1 (см. [9]). *Пусть пространство* Σ *компактно и имеют место условия* 1, 2. *Тогда для всякой точки* $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ *найдется такое множество* $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$, *что интегральная воронка* $t \to S(t, \omega)$ *включения* (1.1), *где* $\omega = (\sigma, X(\sigma))$, *определена при всех* $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in \Sigma$ и $\omega = (\sigma, M(\sigma))$. Тогда $\omega \in \mathfrak{M}$, и в силу компактности Σ множество частичных пределов $\Omega_0(\omega)$ движения $t \to g^t\omega$ не пусто. Далее, для всякой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \Omega_0(\omega)$, $X_0 \subseteq M(\sigma_0)$ найдется последовательность $\{t_i\}$ такая, что $t_{i+1} > t_i$, $t_i \to \infty$, $\rho_\Omega(\omega_i, \omega_0) \to 0$, $\omega_i = g^{t_i}\omega$. Из равенства $S(t + t_i, \omega) = S(t, \omega_i)$, выполненного при всех $t \geqslant -t_i$, следует, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такой индекс i, что функция $t \to S(t, \omega_i)$ определена на полуинтервале $[-t_i, \infty)$. В силу полунепрерывности сверху функции $\omega \to S(t, \omega)$ полуотклонение $d(S(t, \omega_i), S(t, \omega_0))$ стремится к нулю с возрастанием i. Следовательно, интегральная воронка $S(t, \omega_0)$ включения (1.1) при $\sigma = \sigma_0$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$. Сказанное верно для каждой точки $\sigma = \sigma_0 \in \widehat{\Sigma}$ с $X(\sigma) = X_0$. □

Замечание 2. Из доказательства теоремы 1 следует, что если Σ компактно и выполнены условия $1, 2$, то для любого $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ найдется $\sigma_0 \in \Sigma$, для которого существует хотя бы одно решение $t \to x(t, \sigma_0)$ включения $\dot{x} \in F(h^t\sigma_0, x)$ такое, что $x(t, \sigma_0) \in M(h^t\sigma_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2 (см. [9]). *Пусть пространство Σ компактно, имеют место условия 1 и 2 и при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функция $x \to F(\sigma, x)$ локально липшицева. Тогда для любой точки $\omega = (\sigma, X(\sigma)) \in \mathfrak{M}$ такой, что множество $S(t, \omega)$ определено при всех t, справедливо включение $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) \subset \mathfrak{M}$, где $\mathrm{orb}(\omega) \doteq \{g^t\omega : t \in \mathbb{R}\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ и множество $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ таково, что интегральная воронка $S(t, \omega)$, где $\omega = (\sigma, X(\sigma))$, определена при всех $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) \subset \mathfrak{M}$. Действительно, из вложения $S(t, \omega) \subset M(h^t\sigma)$, справедливого для каждого $t \geqslant 0$, вытекает, что $\mathrm{orb}_+(\omega) = \{(h^t\sigma, S(t, \omega)) : t \geqslant 0\} \subset \mathfrak{M}$. Далее, из теоремы 1 следует, что найдется такая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \to \infty$, что $\rho_\Omega(\omega_i, \omega) \to 0$, где $\omega_i = g^{t_i}\omega$, функция $t \to S(t, \omega_i)$ определена на $[-t_i, \infty)$ и $S(t, \omega_i) \subset M(g^t\omega_i)$ для любого $t \in [-t_i, \infty)$. Так как функция $x \to F(\sigma, x)$ локально липшицева, то интегральная воронка $(t, \omega) \to S(t, \omega)$ непрерывна, и, следовательно, $\mathrm{dist}(S(t, \omega_i), S(t, \omega)) \to 0$ при $i \to \infty$. Отсюда, в силу непрерывности функции $\sigma \to M(\sigma)$, получаем, что $S(t, \omega) \subset M(g^t\omega)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Так как $\mathfrak{M}$ замкнуто, то $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) \subset \mathfrak{M}$. □

Теорема 3 (см. [9]). *Предположим, что пространство Σ компактно и минимально, при каждом σ функция $x \to F(\sigma, x)$ локально липшицева и имеют место условия 1 и 2. Тогда всякой точке $\sigma \in \Sigma$ отвечает множество $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ такое, что функция $t \to S(t, \omega)$, $\omega = (\sigma, X(\sigma))$ рекуррентна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\omega = (\sigma, M(\sigma))$, $\sigma \in \Sigma$. Так как F локально липшицева по x, а Σ — компактно, то омега-предельное множество $\Omega_0(\omega)$ точки ω непусто, компактно и инвариантно. Более того, из доказательства теоремы 2 следует, что $\Omega_0(\omega) \subset \mathfrak{M}$. Далее, $\Omega_0(\omega)$ как инвариантное компактное множество содержит компактное минимальное подмножество. Обозначим его $\mathfrak{M}_0$. Тогда для каждой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \mathfrak{M}_0$ имеет место равенство $\overline{\mathrm{orb}}(\omega_0) = \mathfrak{M}_0$ (из минимальности Σ вытекает, что $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0) = \Sigma$), и, следовательно, для любого $\sigma \in \Sigma$ найдется такое компактное множество $M_0(\sigma) \subseteq M(\sigma)$, что $\mathfrak{M}_0 = \{\omega = (\sigma, X) : \sigma \in \Sigma,\ X \subseteq M_0(\sigma)\}$. Так как всякое движение в $\mathfrak{M}_0$ рекуррентно, то для каждого $\omega \in \mathfrak{M}_0$ и любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество

$$L(\varepsilon, \vartheta, \omega) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant \vartheta} \rho_{\mathfrak{M}}(g^{t+\tau}\omega, g^t\omega) \leqslant \varepsilon\Big\} =$$

$$= \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant \vartheta} \big(\rho_\Sigma(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma) + \mathrm{dist}(S(t + \tau, \omega), S(t, \omega))\big) \leqslant \varepsilon\Big\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$, что означает рекуррентность функции $t \to S(t, \omega)$ для любой точки ω множества $\mathfrak{M}_0$. □

Естественным продолжением теоремы о рекуррентности интегральной воронки $t \to S(t,\omega)$ включения (1.1) является утверждение о существовании точек ω, для которых интегральная воронка $t \to S(t,\omega)$ обладает свойством почти периодичности. Основным инструментом при доказательстве следующей теоремы служит известное утверждение А. А. Маркова [11, с. 15]: *если семейство движений $t \to f^t\omega$ топологической динамической системы (Ω, f^t) с компактным минимальным фазовым пространством Ω устойчиво по Ляпунову (равностепенно непрерывно), то всякое движение в Ω почти периодично в смысле Бора.*

Напомним, что точка σ пространства Σ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\ell(\varepsilon) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho_\Sigma\big(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma\big) \leqslant \varepsilon\Big\}$$

ε-почти периодов относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$. В этом случае движение $t \to h^t\sigma$ точки σ называется *почти периодическим.* Очевидно, что всякое почти периодическое движение рекуррентно (обратное неверно), и если σ — почти периодическая точка, а пространство Σ — полное, то замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(\sigma)$ траектории $\operatorname{orb}(\sigma)$ компактно и минимально в Σ относительно потока $h : \Sigma \to \Sigma$. Далее, функция $t \to S(t,\omega)$, определяющая интегральную воронку включения (1.1), называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$L(\varepsilon,\omega) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}\big(S(t+\tau,\omega), S(t,\omega)\big) \leqslant \varepsilon\Big\}, \quad \text{где} \quad \omega = (\sigma, X),$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Теорема 4. *Предположим, что пространство Σ имеет почти периодическую точку σ_0, функция $x \to F(\sigma,x)$ локально липшицева при каждом $\sigma \in \overline{\operatorname{orb}}(\sigma_0)$ и выполнены условия 1 и 2. Тогда всякой точке $\sigma \in \overline{\operatorname{orb}}(\sigma_0)$ отвечает компактное множество $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ такое, что функция $t \to S(t,\omega)$, где $\omega = \big(\sigma, X(\sigma)\big)$, почти периодична.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой точки $\sigma \in \overline{\operatorname{orb}}(\sigma_0)$ отметим такое компактное множество $X(\sigma) \subseteq M(\sigma)$, что вложение $S\big(t, (\sigma, X(\sigma))\big) \subseteq M(h^t\sigma)$ выполнено при всех t на числовой прямой $\mathbb{R}$ (в силу теоремы 1 и условий 1 и 2, такое множество $X(\sigma)$ найдется). Согласно теореме Д. Биркгофа, не уменьшая общности, можно считать, что множество $X(\sigma) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ такое, что замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(\omega)$ траектории $\operatorname{orb}(\omega)$ точки $\omega = \big(\sigma, X(\sigma)\big)$ компактно (в метрике $\rho_{\mathfrak{M}}$) и минимально относительно потока g^t. Далее, так как при каждом $\sigma \in \overline{\operatorname{orb}}(\sigma_0)$ функция $t \to h^t\sigma$ почти периодична, то семейство таких функций равностепенно непрерывно и равномерно ограниченно на $\mathbb{R}$. Кроме того, в силу условий 1, 2 и теоремы 2, семейство функций $t \to S\big(t, (\sigma, X(\sigma))\big)$ также равностепенно непрерывно и равномерно ограниченно на $\mathbb{R}$. Таким образом, согласно теореме А. А. Маркова, всякое движение $t \to g^t\omega$ в фазовом пространстве $\overline{\operatorname{orb}}(\omega)$ динамической системы $(\overline{\operatorname{orb}}(\omega), g^t)$ почти периодично. □

§ 3. Существование рекуррентного и почти периодического решений дифференциального включения

Изучим теперь условия, при которых рассматриваемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

имеет хотя бы одно рекуррентное или почти периодическое решение. В этом параграфе мы используем условие слабой положительной инвариантности множества относительно включения.

Условие 3. *Существует непрерывная функция $M : \Sigma \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ такая, что множество $\mathfrak{M}$, определенное равенством (1.4), слабо положительно инвариантно.*

Одноточечные множества $\{x\}$ пространства $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ мы отождествляем с точками пространства $\mathbb{R}^n$ и используем запись $\omega = (\sigma, x) \in \Omega$ вместо $\omega = (\sigma, \{x\}) \in \Omega$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 3. *Тогда для всякой точки* $\omega_0 = (\sigma_0, x_0) \in \mathfrak{M}$ *найдутся такая точка* $\widehat{\omega} = (\widehat{\sigma}, \widehat{x}) \in \mathfrak{M}$ *и определенное для всех* $t \in \mathbb{R}$ *решение* $\varphi(t, \widehat{\omega})$ *дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(h^t \widehat{\sigma}, x), \tag{3.2}$$

что включение $\varphi(t, \widehat{\omega}) \in M(h^t \widehat{\sigma})$ *имеет место для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Фиксируем $\omega_0 = (\sigma_0, x_0) \in \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно, то существует решение $\varphi(t, \omega_0)$ включения (3.1), которое бесконечно продолжаемо вправо и удовлетворяет соотношению $\varphi(t, \omega_0) \in M(h^t \sigma_0)$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда для каждого $\tau \geqslant 0$ и всех $t \in [-\tau, \infty)$ имеет место включение $\varphi_\tau(t, \omega_0) \doteq \varphi(t + \tau, \omega_0) \in M(h^t(h^\tau \sigma_0))$. Кроме того, как легко проверить, на полуинтервале $[-\tau, \infty)$ функция $t \to \varphi_\tau(t, \omega_0)$ является решением включения $\dot{x} \in F(h^t(h^\tau \sigma_0), x)$.

Пусть $\widehat{\sigma}$ — некоторая омега-предельная точка для σ_0, которая существует в силу компактности пространства Σ. Таким образом, найдется последовательность $\{\tau_i\}$, $\tau_i \to \infty$ такая, что $\sigma_i \doteq h^{\tau_i} \sigma_0 \to \widehat{\sigma}$ при $i \to \infty$. Более того, в силу ограниченности решения $\varphi(t, \omega_0)$, существует предел $\lim\limits_{i \to \infty} \varphi(\tau_i, \omega_0) = \lim\limits_{i \to \infty} \varphi_{\tau_i}(0, \omega_0)$, обозначим его $\widehat{x}$. Очевидно, что $\widehat{x} \in M(\widehat{\sigma})$.

Далее, рассмотрим решения $\varphi_{\tau_i}(t, \omega_0) \doteq \varphi_i(t)$. Согласно лемме 1 на любом конечном отрезке $-\vartheta_i \leqslant t < \vartheta_i$ функции $\varphi_i(t)$, начиная с некоторого i, определены, равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. Тогда из последовательности $\varphi_i(t)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $-1 \leqslant t < 1$ к функции $\widehat{\varphi}(t)$, из нее выбрать подпоследовательность, сходящуюся при $-2 \leqslant t < 2$ к той же функции $\widehat{\varphi}(t)$, продолженной на отрезок $[-2, 2]$ и так далее. Получим функцию $\widehat{\varphi}(t)$, определенную на $\mathbb{R}$.

Покажем теперь, что функция $\widehat{\varphi}(t)$ есть решение включения (3.2). Прежде всего, из ограниченности производных $\{\dot{\varphi}_i\}$ следует, что $\widehat{\varphi}(t)$ абсолютно непрерывна [5, с. 51]. Далее, из включения $\dot{\varphi}_i(t) \in F\big(h^t \sigma_i, \varphi_i(t)\big)$ следует, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\big\langle \xi, \dot{\varphi}_i(t) \big\rangle \leqslant c\big(\xi, F\big(h^t \sigma_i, \varphi_i(t)\big)\big), \tag{3.3}$$

где $c(\xi, A) = \max\limits_{a \in A} \langle \xi, a \rangle$ — значение опорной функции множества $A \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ в точке $\xi \in \mathbb{R}^n$. Интегрируя (3.3) по независимой переменной в пределах от t до $t + \varepsilon$, получим

$$\big\langle \xi, \varphi_i(t + \varepsilon) - \varphi_i(t) \big\rangle \leqslant \int_t^{t+\varepsilon} c\Big(\xi, F\big(h^s \sigma_i, \varphi_i(s)\big)\Big) ds. \tag{3.4}$$

В силу полунепрерывности сверху F по (σ, x), для всякого i найдется такое $\delta_i > 0$, что $F\big(h^t \sigma_i, \varphi_i(t)\big) \subset F\big(h^t \widehat{\sigma}, \widehat{\varphi}(t)\big) + O_{\delta_i}$. Следовательно, при $i \to \infty$ из (3.4) получим соотношение

$$\big\langle \xi, \widehat{\varphi}(t + \varepsilon) - \widehat{\varphi}(t) \big\rangle \leqslant \int_t^{t+\varepsilon} c\Big(\xi, F\big(h^s \widehat{\sigma}, \widehat{\varphi}(s)\big)\Big) ds. \tag{3.5}$$

Поделим (3.5) на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда в каждой правильной точке t (точке Лебега) получим неравенство

$$\big\langle \xi, \dot{\widehat{\varphi}}(t) \big\rangle \leqslant c\Big(\xi, F\big(h^t \widehat{\sigma}, \widehat{\varphi}(t)\big)\Big). \tag{3.6}$$

Поскольку неравенство (3.6) выполнено при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то в силу выпуклости $F(\sigma, x)$ имеет место включение $\dot{\widehat{\varphi}}(t) \in F\big(h^t \widehat{\sigma}, \widehat{\varphi}(t)\big)$. Следовательно, $\widehat{\varphi}(t)$ — решение включения (3.2), и так как $\widehat{\varphi}(0) = \lim\limits_{i \to \infty} \varphi_{\tau_i}(0, \omega) = \widehat{x}$, то $\widehat{\varphi}(t) = \varphi(t, \widehat{\omega})$. □

Для дальнейшего нам потребуется динамическая система, которая строится по заданному семейству функций, определенных на всей числовой прямой, так называемая *динамическая система сдвигов.*

Пусть $\mathfrak{R}$ — пространство непрерывных функций $t \to \varphi(t)$, определенных на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и принимающих значения в некотором полном метрическом пространстве (например, в $\mathbb{R}^n$). В $\mathfrak{R}$ введем метрику Бебутова [2]

$$\rho_{\mathfrak{R}}(\varphi,\psi) = \sup_t \min\bigl\{|\varphi(t)-\psi(t)|, |t|^{-1}\bigr\}, \quad \varphi,\psi \in \mathfrak{R}. \tag{3.7}$$

В метрике (3.7) пространство $\mathfrak{R}$ является полным метрическим. Кроме того, метрика Бебутова порождает на $\mathfrak{R}$ сходимость, равномерную на отрезках, то есть неравенство $\rho_{\mathfrak{R}}(\varphi,\psi) < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $|\varphi(t)-\psi(t)| < \varepsilon$, выполненному при $|t| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Далее, в пространстве $\mathfrak{R}$ определим оператор сдвига f^τ : если $\varphi \in \mathfrak{R}$, то $f^\tau\varphi = \varphi_\tau$, где $\varphi_\tau(t) \doteq \varphi(\tau+t)$. Такое преобразование f^τ удовлетворяет свойствам группы, и функция $(\tau,\varphi) \to f^\tau\varphi$ является непрерывной. Следовательно, пара $(\mathfrak{R}, f^t)$ образует топологическую динамическую систему, называемую *динамической системой сдвигов* (системой А.А. Маркова).

Пусть $\varphi \in \mathfrak{R}$. Рассмотрим траекторию $\operatorname{orb}(\varphi) \doteq \{f^\tau\varphi : \tau \in \mathbb{R}\}$ и ее замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(\varphi)$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Это означает, что $\widehat{\varphi} \in \overline{\operatorname{orb}}(\varphi)$ в том и только в том случае, если найдется последовательность $\{\tau_i\}$ моментов времени такая, что каждому $\varepsilon > 0$ и любому $\vartheta > 0$ отвечает номер i_0 последовательности $\{\tau_i\}$, начиная с которого при всех $t \in [-\vartheta,\vartheta]$ выполнены неравенства $|\varphi_{\tau_i}(t) - \widehat{\varphi}(t)| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 3 (см. [2]). *Для того чтобы замыкание траектории, определяемой функцией* $\varphi \in \mathfrak{R}$ *в метрике* (3.7), *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функция* $t \to \varphi(t)$ *была ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Пространство $\mathfrak{R}$ можно рассмотреть с метрикой

$$\rho_{\sup}(\varphi,\psi) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)-\psi(t)|, \tag{3.8}$$

а замыкание траектории $\operatorname{orb}(\varphi)$ взять в топологии равномерной сходимости на всей числовой прямой. Обозначим такое замыкание $\overline{\operatorname{orb}}_{\mathbb{R}}(\varphi)$, тогда $\widehat{\varphi} \in \overline{\operatorname{orb}}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ в том и только в том случае, если существует последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер i_0, начиная с которого неравенства $|\varphi_{\tau_i}(t) - \widehat{\varphi}(t)| \leqslant \varepsilon$ выполнены при всех $t \in \mathbb{R}$. Нетрудно показать, что *замыкание* $\overline{\operatorname{orb}}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ *будет компактным в метрике* (3.8) *тогда и только тогда, когда функция* $t \to \varphi(t)$ *ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Напомним, что функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ называется *рекуррентной*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество (ε,ϑ)-почти периодов

$$l(\varepsilon,\vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t|\leqslant\vartheta} |\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. А если для всякого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество ε-почти периодов

$$l(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon\},$$

то функция $t \to \varphi(t)$ называется *почти периодической*. Если функция $t \to \varphi(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то она рекуррентна тогда и только тогда, когда движение $\tau \to f^\tau\varphi$ рекуррентно, и почти периодична тогда и только тогда, когда движение $\tau \to f^\tau\varphi$ почти периодично [1].

Перейдем теперь к основным результатам этого параграфа.

Теорема 5. *Пусть фазовое пространство* Σ *компактно и минимально, функция* F *удовлетворяет условию* 1 *и имеет место условие* 3. *Тогда для любого* $\sigma \in \Sigma$ *существует, по крайней мере, одно рекуррентное решение* $x(t,\sigma)$ *включения* (3.1) *такое, что для всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено* $x(t,\sigma) \in M(h^t\sigma)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma$ и $\varphi(t,\sigma)$ есть решение включения (3.1) такое, что $\varphi(t,\sigma) \in M(h^t\sigma)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Из леммы 2 следует, что такое решение существует. Далее, построим замыкание множества сдвигов функции φ в топологии равномерной сходимости на отрезках: $\mathfrak{R}(\varphi) \doteq \mathrm{cl}\{\varphi_\tau(\cdot,\sigma) : \tau \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi_\tau(t,\sigma) \doteq \varphi(t+\tau,\sigma)$. То есть $\widehat{\varphi}$ принадлежит пространству $\mathfrak{R}(\varphi)$ только в том случае, если существует последовательность моментов времени $\{\tau_i\}$ такая, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдется такой номер i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ имеет место неравенство

$$\max_{|t|\leqslant\vartheta} |\varphi_{\tau_i}(t,\sigma) - \widehat{\varphi}(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку функция $\varphi(t,\sigma)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\mathfrak{R}(\varphi) = \overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$, где $\mathrm{orb}(\varphi) = \{\varphi_\tau(t,\sigma) : \tau \in \mathbb{R}\}$, то согласно лемме 3 пространство $\mathfrak{R}(\varphi)$ компактно.

Далее, на $\mathfrak{R}(\varphi)$ определим поток h^τ равенством $h^\tau\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_\tau(t,\sigma)$ и рассмотрим топологическую динамическую систему $(\mathfrak{R}(\varphi), h^\tau)$. Так как $\mathfrak{R}(\varphi)$ компактно, то в нем существует минимальное компактное подмножество. Обозначим его через $\mathfrak{R}_0(\varphi)$. В силу теоремы Д. Биркгофа любое движение в $\mathfrak{R}_0(\varphi)$ рекуррентно и, следовательно, любая функция в $\mathfrak{R}_0(\varphi)$ рекуррентна. Пусть $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{R}_0(\varphi)$. Это означает, что найдется такая последовательность $\{\tau_i\}$, что $\varphi_{\tau_i} \doteq \varphi_i \to \widehat{\varphi}$, $i \to \infty$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Напомним, что отсюда следует поточечная сходимость φ_i к $\widehat{\varphi}$. Так как Σ компактно и минимально, то $h^{\tau_i}\sigma \doteq \sigma_i \to \widehat{\sigma} \in \Sigma$, и поскольку при каждом $\tau_i \in \mathbb{R}$ функция φ_i является решением включения $\dot{x} \in F(h^t\sigma_i, x)$, из доказательства леммы 2 следует, что функция $\widehat{\varphi}$ есть решение включения $\dot{x} \in F(h^t\widehat{\sigma}, x)$ и $\widehat{\varphi}(t) \in M(h^t\widehat{\sigma})$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, найдется $\widehat{\sigma} \in \Sigma$, для которого существует рекуррентное решение $\widehat{\varphi}$ соответствующего включения.

Построим теперь множество $\mathfrak{R}(\widehat{\varphi}) \doteq \mathrm{cl}\{\widehat{\varphi}_\tau(\cdot) : \tau \in \mathbb{R}\}$. Так как $\widehat{\varphi}$ рекуррентна, то и любая функция $x \in \mathfrak{R}(\widehat{\varphi})$ также является рекуррентной (в силу того, что множество $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{\varphi}) = \mathfrak{R}(\widehat{\varphi})$ минимально [2]). Поскольку Σ минимально, то $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{\sigma}) = \Sigma$, и для любого $\sigma \in \Sigma$ существует последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что $h^{\tau_i}\widehat{\sigma} \to \sigma$, $i \to \infty$. Для любого i функция $t \to \widehat{\varphi}_{\tau_i}(t)$ является рекуррентным решением включения

$$\dot{x} \in F(h^t(h^{\tau_i}\widehat{\sigma}), x).$$

Кроме того, в силу компактности $\mathfrak{R}(\widehat{\varphi})$, получаем, что $\widehat{\varphi}_{\tau_i} \to \widehat{x} \in \mathfrak{R}(\widehat{\varphi})$, $i \to \infty$, где функция $\widehat{x}$ рекуррентна и абсолютно непрерывна. Тогда, используя предельный переход при $i \to \infty$, из включения

$$\dot{\widehat{\varphi}}_{\tau_i}(t) \in F(h^t(h^{\tau_i}\widehat{\sigma}), \widehat{\varphi}_{\tau_i}(t))$$

при почти всех t получаем включение

$$\dot{\widehat{x}}(t) \in F(h^t\sigma, \widehat{x}(t)).$$

Таким образом, для любого $\sigma \in \Sigma$ найдется хотя бы одно рекуррентное решение включения (3.1). □

Теорема 6. *Предположим, что пространство Σ имеет почти периодическую точку σ_0 и выполнены условия 1 и 3. Тогда для любого $\sigma \in \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ существует, по крайней мере, одно почти периодическое решение $x(t,\sigma)$ включения (3.1) такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $x(t,\sigma) \in M(h^t\sigma)$.*

Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы 5. Так как $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ минимально, то для каждого $\sigma \in \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ согласно лемме 2 найдется решение $\varphi(t,\sigma)$, определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее включению $\varphi(t,\sigma) \in M(h^t\sigma)$, $t \in \mathbb{R}$. Построим замыкание множества сдвигов функции φ в топологии равномерной сходимости на числовой прямой, то есть множество $\overline{\mathrm{orb}}_{\mathbb{R}}(\varphi)$, которое будет компактным, и определим динамическую систему сдвигов $\left(\overline{\mathrm{orb}}_{\mathbb{R}}(\varphi), h^\tau\right)$. В $\overline{\mathrm{orb}}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ существует минимальное компактное подмножество, которое мы снова обозначим через $\mathfrak{R}_0(\varphi)$. Каждая функция $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{R}_0(\varphi)$, согласно теореме Маркова, является почти периодической, и найдется $\widehat{\sigma} \in \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ такое, что $\widehat{\varphi}$ будет решением включения $\dot{x} \in F(h^t\widehat{\sigma}, x)$.

Далее, по функции $\widehat{\varphi}$ построим множество $\overline{\mathrm{orb}}_{\mathbb{R}}(\widehat{\varphi})$. Оно компактно, минимально, и каждая его функция является почти периодической, кроме того, $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{\sigma}) = \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$. Тогда для каждого $\sigma \in \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ существует последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что $h^{\tau_i}\widehat{\sigma}$ сходится к σ при $i \to \infty$, а предел последовательности $\{\widehat{\varphi}_{\tau_i}\}$ почти периодических функций есть почти периодическое решение включения $\dot{x} \in F(h^t\sigma, x)$. $\square$

Замечание 3. Из доказательств теорем 5 и 6 следует, что для существования рекуррентного или почти периодического решения включения (3.1) вместо условия 3 можно потребовать, чтобы для каждого $\sigma \in \Sigma$ (в теореме 5) или каждого $\sigma \in \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ (в теореме 6) существовало ограниченное на всей оси $\mathbb{R}$ решение (3.1).

§ 4. Следствия для обыкновенного дифференциального включения

В этом параграфе получим следствия теорем 3 – 6 для обыкновенного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{4.1}$$

где $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Решения включения (4.1), как и ранее, понимаются в смысле Каратеодори. Рассмотрим функцию $M : \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ с графиком

$$\mathcal{M} \doteq \{(t, X) \in \mathbb{R} \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) : X \subseteq M(t)\}. \tag{4.2}$$

Определение 5. Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо положительно инвариантным относительно включения* (4.1), если для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}$ найдется решение $t \to \varphi(t)$ включения (4.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$ и включению $\varphi(t) \in M(t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Множество $\mathcal{M}$ называется *положительно инвариантным относительно включения* (4.1), если любое его решение, выходящее из точки множества $\mathcal{M}$, не покидает это множество с увеличением t.

Очевидно, что если функция M непрерывна и имеет компактные образы, а соответствующее множество $\mathcal{M}$ положительно инвариантно (слабо положительно инвариантно), то для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}$ каждое решение (найдется решение) $t \to \varphi(t)$ включения (4.1), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$, бесконечно продолжаемо вправо.

Далее, через $S(t, t_0, X_0)$ будем обозначать сечение интегральной воронки включения (4.1) с начальным условием $S(t, t_0, X_0)|_{t=t_0} = X_0$.

Для того чтобы изучить свойства решений неавтономного включения (4.1), мы заменим его включением вида (3.1) (правая часть которого является автономной относительно сдвигов по переменной t), для чего используем динамическую систему сдвигов, порожденную функциями F, M и известную конструкцию Фавара (см. [9]).

Пусть $F_\tau(t, x) \doteq F(t+\tau, x)$, $M_\tau(t) \doteq M(t+\tau)$ — сдвиги функций F и M по времени t на константу τ. Построим множества $\Sigma(F) \doteq \mathrm{cl}\left\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\right\}$ и $\Sigma(FM) \doteq \mathrm{cl}\left\{(F_\tau, M_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\right\}$, где замыкания взяты в топологии равномерной сходимости на компактах. То есть, например, $(\widehat{F}, \widehat{M}) \in \Sigma(FM)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что для любых $\vartheta \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ найдется номер i_0, начиная с которого при всех $(t, x) \in [-\vartheta, \vartheta] \times O_\vartheta$ имеет место неравенство

$$\mathrm{dist}\big(F_{\tau_i}(t, x), \widehat{F}(t, x)\big) + \mathrm{dist}\big(M_{\tau_i}(t), \widehat{M}(t)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{4.3}$$

Аналогично для множества $\Sigma(F)$. На $\Sigma(F)$ и $\Sigma(FM)$ определим метрику Бебутова

$$\beta(F^1,F^2)=\sup_{\vartheta\geqslant 0}\min\left\{\max_{|t|,|x|\leqslant\vartheta}\operatorname{dist}\bigl(F^1(t,x),F^2(t,x)\bigr),\frac{1}{\vartheta}\right\}; \tag{4.4}$$

$$\beta(F^1M^1,F^2M^2)=\sup_{\vartheta\geqslant 0}\min\left\{\max_{|t|,|x|\leqslant\vartheta}\bigl(\operatorname{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x))+\operatorname{dist}(M^1(t),M^2(t))\bigr),\frac{1}{\vartheta}\right\}.$$

Можно показать, что сходимость в этой метрике эквивалентна сходимости, равномерной на компактах. Везде далее будем предполагать, что имеет место следующее условие.

Условие 4. 1. *Функция* $t\to F(t,x)$ *равномерно непрерывна равномерно относительно* x *на компактах в* $\mathbb{R}^n$ (то есть для любого $\varepsilon>0$ и каждого $K\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ найдется такое $\delta>0$, что при всех $\tau\in[-\delta,\delta]$, всех $t\in\mathbb{R}$ и всех $x\in K$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}(F_\tau(t,x),F(t,x))\leqslant\varepsilon$) *и ограничена на числовой прямой* $\mathbb{R}$ (то есть при каждом x выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|F(t,x)|<\infty$);
2. *Функция* $t\to M(t)$ *равномерно непрерывна и ограничена на числовой прямой.*

Далее, на $\Sigma(F)$ определим поток $h^\tau:\Sigma(F)\to\Sigma(F)$ равенством $h^\tau\widehat{F}=\widehat{F}_\tau$, а на $\Sigma(FM)$ — равенством $h^\tau(\widehat{F},\widehat{M})=(\widehat{F}_\tau,\widehat{M}_\tau)$. Опираясь на известный результат в [12], можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Если выполнено условие* 4, *то пары* $(\Sigma(F),h^\tau)$ *и* $(\Sigma(FM),h^\tau)$ *задают топологические динамические системы с компактными фазовыми пространствами* $\Sigma(F)$ *и* $\Sigma(FM)$, *соответственно.*

Замыкания множеств сдвигов функций F и M мы построим также в топологии равномерной сходимости на всей числовой оси равномерно относительно x, обозначим эти замыкания $\Sigma_{\mathbb{R}}(F)$ и $\Sigma_{\mathbb{R}}(FM)$. То есть, например, $(\widehat{F},\widehat{M})\in\Sigma_{\mathbb{R}}(FM)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что для любых $\varepsilon>0$, $\vartheta\geqslant 0$ найдется номер i_0, начиная с которого при всех $t\in\mathbb{R}$ и $x\in O_\vartheta$ имеет место неравенство

$$\operatorname{dist}\bigl(F_{\tau_i}(t,x),\widehat{F}(t,x)\bigr)+\operatorname{dist}\bigl(M_{\tau_i}(t),\widehat{M}(t)\bigr)\leqslant\varepsilon.$$

$\Sigma_{\mathbb{R}}(F)$ и $\Sigma_{\mathbb{R}}(FM)$ будем рассматривать с метриками

$$\beta_{\mathbb{R}}(F^1,F^2)=\sup_{\vartheta\geqslant 0}\min\left\{\sup_{t\in\mathbb{R},|x|\leqslant\vartheta}\operatorname{dist}\bigl(F^1(t,x),F^2(t,x)\bigr),\frac{1}{\vartheta}\right\};$$

$$\beta_{\mathbb{R}}(F^1M^1,F^2M^2)=\sup_{\vartheta\geqslant 0}\min\left\{\sup_{t\in\mathbb{R},|x|\leqslant\vartheta}\bigl(\operatorname{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x))+\operatorname{dist}(M^1(t),M^2(t))\bigr),\frac{1}{\vartheta}\right\}.$$

Если выполнено условие 4, то $(\Sigma_{\mathbb{R}}(F),h^\tau)$ и $(\Sigma_{\mathbb{R}}(FM),h^\tau)$ задают топологические динамические системы с компактными фазовыми пространствами.

Теперь на $\Sigma(F)\times\mathbb{R}^n$ определим функцию $\mathcal{F}:\Sigma(F)\times\mathbb{R}^n\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\sigma,x)=\widehat{F}(0,x)$, $\sigma=\widehat{F}$, а на $\Sigma(FM)\times\mathbb{R}^n$ будем рассматривать функции $\mathcal{F}:\Sigma(F)\times\mathbb{R}^n\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\sigma,x)=\widehat{F}(0,x)$ и $\mathcal{M}:\Sigma(FM)\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}(\sigma)=\widehat{M}(0)$, где $\sigma=(\widehat{F},\widehat{M})$. Тогда $\mathcal{F}(h^t\sigma,x)=\widehat{F}(t,x)$ и $\mathcal{M}(h^t\sigma)=\widehat{M}(t)$.

Таким образом, построено семейство дифференциальных включений

$$\dot{x}\in\mathcal{F}(h^t\sigma,x) \tag{4.5}$$

и множество

$$\mathfrak{M} = \{(\sigma, X) \in \Sigma(FM) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \colon\ X \subset \mathcal{M}(\sigma)\}, \tag{4.6}$$

аналогичные семейству включений (3.1) и множеству (1.4).

Функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ мы определим тем же способом и на пространствах $\Sigma_{\mathbb{R}}(F)$ и $\Sigma_{\mathbb{R}}(FM)$.

Рассмотрим свойства, которые наследуют функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ от функций F и M соответственно.

Лемма 5. *Пусть функция $x \to F(t,x)$ локально липшицева при почти всех t. Тогда для любого $\sigma \in \Sigma(F)$ (любого $\sigma \in \Sigma_{\mathbb{R}}(F)$) функция $x \to \mathcal{F}(\sigma, x)$ локально липшицева, а функция $(\sigma, x) \to \mathcal{F}(\sigma, x)$ непрерывна.*

Доказательство. Поскольку $x \to F(t,x)$ локально липшицева, то для любого компакта $Q \subset \mathbb{R}^n$ и всех $t \in \mathbb{R}$ существует такая константа $l_Q > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in Q$ выполнено неравенство

$$\mathrm{dist}\,\big(F(t,x_1), F(t,x_2)\big) \leqslant l_Q|x_1 - x_2|. \tag{4.7}$$

Покажем, что для любого $\widehat{F} \in \Sigma(F)$ функция $x \to \widehat{F}(t,x)$ также локально липшицева. Так как $\widehat{F} \in \Sigma(F)$, то найдется последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что для $r \doteq |Q|$ и любых $\varepsilon_k > 0$ ($\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$) существует номер $i_k = i(\varepsilon_k)$, начиная с которого для любых $(t,x) \in [-r,r] \times Q$ выполняется неравенство

$$\mathrm{dist}\,\big(F(\tau_i + t, x), \widehat{F}(t,x)\big) \leqslant \varepsilon_k.$$

Тогда для любых $x_1, x_2 \in Q$ получим оценки

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}\,\big(\widehat{F}(t,x_1), \widehat{F}(t,x_2)\big) \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{dist}\,\big(\widehat{F}(t,x_1), F(\tau_i + t, x_1)\big) + \mathrm{dist}\,\big(F(\tau_i + t, x_1), F(\tau_i + t, x_2)\big) + \mathrm{dist}\,\big(F(\tau_i + t, x_2), \widehat{F}(t,x_2)\big) \leqslant \\
&\leqslant 2\varepsilon_k + l_K|x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Покажем далее, что функция $(\sigma, x) \to \mathcal{F}(\sigma, x)$ непрерывна. Пусть $(\sigma_0, x_0) = (\widehat{F}_0, x_0)$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$, что

$$\mathrm{dist}\,\big(\mathcal{F}(\sigma, x), \mathcal{F}(\sigma_0, x_0)\big) = \mathrm{dist}\,\big(\widehat{F}(0,x), \widehat{F}_0(0,x)\big) \leqslant \varepsilon$$

для всех $(\widehat{F}, x) \in \Sigma(F) \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам $\beta(\widehat{F}, \widehat{F}_0) \leqslant \delta, |x - x_0| \leqslant \delta$, где β — метрика Бебутова в $\Sigma(F)$. Согласно определению метрики Бебутова неравенство

$$\max_{|t|,|x| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}} \mathrm{dist}\big(\widehat{F}(t,x), \widehat{F}_0(t,x)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

равносильно оценке $\beta(\widehat{F}, \widehat{F}_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, поскольку $x \to \widehat{F}_0(t,x)$ локально липшицева, то функция $x \to \widehat{F}_0(t,x)$ непрерывна, следовательно, для $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что $\mathrm{dist}\big(\widehat{F}_0(0,x), \widehat{F}_0(0,x_0)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x - x_0| \leqslant \delta_1$. Таким образом, при $\delta \doteq \min\big\{\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}, \delta_1\big\}$ имеют место соотношения

$$\mathrm{dist}\,\big(\widehat{F}(0,x), \widehat{F}_0(0,x_0)\big) \leqslant \mathrm{dist}\,\big(\widehat{F}(0,x), \widehat{F}_0(0,x)\big) + \mathrm{dist}\,\big(\widehat{F}_0(0,x), \widehat{F}_0(0,x_0)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Замечание 4. Из доказательства леммы 5 следует, что если функция $x \to F(t,x)$ полунепрерывна сверху (непрерывна), то и функция $(\sigma, x) \to \mathcal{F}(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху (непрерывна).

Лемма 6. *Если функция $t \to F(t,x)$ рекуррентна равномерно на компактах в $\mathbb{R}^n$, то пространство $\Sigma(F)$ минимально; если функции $t \to F(t,x)$ и $t \to M(t)$ совместно рекуррентны равномерно на компактах в $\mathbb{R}^n$, то есть для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ множество*

$$\Delta(\varepsilon,\vartheta) = \left\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t|,|x|\leqslant\vartheta}\bigl(\operatorname{dist}(F(t+\tau,x),F(t,x)) + \operatorname{dist}(M(t+\tau),M(t))\bigr) \leqslant \varepsilon\right\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$, то пространство $\Sigma(FM)$ минимально.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы Биркгофа (см. [2]). Если $t \to F(t,x)$ рекуррентна и $\Sigma(F)$ компактно, то множество $\overline{\operatorname{orb}}(F) = \operatorname{cl}\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\} = \Sigma(F)$ минимально. Аналогично если функция $t \to (F(t,x), M(t))$ рекуррентна и $\Sigma(FM)$ компактно, то замыкание траектории этой функции $\overline{\operatorname{orb}}(FM) = \operatorname{cl}\{(F_\tau, M_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$, которое совпадает с пространством $\Sigma(FM)$, также минимально. □

Лемма 7. *Если функция $t \to F(t,x)$ почти периодична равномерно относительно x, то есть для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ множество*

$$\Delta(\varepsilon,\vartheta) = \left\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R},|x|\leqslant\vartheta} \operatorname{dist}(F(t+\tau,x),F(t,x)) \leqslant \varepsilon\right\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$, то пространство $\Sigma_{\mathbb{R}}(F)$ минимально; если функции $t \to F(t,x)$ и $t \to M(t)$ почти периодичны равномерно относительно x, то пространство $\Sigma_{\mathbb{R}}(FM)$ минимально.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 6. □

Лемма 8. 1. *Если функция $x \to F(t,x)$ локально липшицева, а множество $\mathcal{M}$, определенное равенством* (4.2), *положительно инвариантно относительно включения* (4.1), *то множество $\mathfrak{M}$, определенное равенством* (4.6), *положительно инвариантно относительно включения* (4.5).

2. *Если множество $\mathcal{M}$ слабо положительно инвариантно относительно включения* (4.1), *то множество $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно относительно включения* (4.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение. Пусть множество $\mathcal{M}$ положительно инвариантно относительно включения (4.1). Это означает, что включение $S(t,t_i,X_i) \subset M(t)$ верно для любого $t \geqslant t_i$ и любого компакта $X_i \subset M(t_i)$. Тогда для любого $t \geqslant 0$ справедливо включение $S_{t_i}(t,0,X_i) \subset M_{t_i}(t)$, где $S_{t_i}(t,0,X_i)$ — сечение интегральной воронки включения $\dot{x} \in F_{t_i}(t,x)$, выходящей в нулевой момент времени из множества X_i.

Далее, пусть $\mathcal{S}(t,\sigma,X)$ — сечение интегральной воронки включения (4.5) в момент времени t с начальным множеством X (при $t=0$) и пусть $\widehat{\sigma} = (\widehat{F},\widehat{M}) \in \Sigma(FM)$. Напомним, что для доказательства положительной инвариантности множества

$$\mathfrak{M} = \{(\sigma,X) \in \Sigma(FM) \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n) \colon X \subset \mathcal{M}(\sigma)\}$$

относительно включения (4.5) достаточно показать, что $\mathcal{S}(t,\widehat{\sigma},\widehat{X}) \subset \widehat{M}(t)$ для любого $t \geqslant 0$ и $\widehat{X} \subseteq \widehat{M}(0)$. Так как $(\widehat{F},\widehat{M}) \in \Sigma(FM)$, то найдется такая последовательность $\{t_i\}$, что для любого t и $\varepsilon > 0$ при достаточно больших i имеет место неравенство

$$\operatorname{dist}\bigl(M_{t_i}(t),\widehat{M}(t)\bigr) \leqslant \varepsilon.$$

Согласно лемме 6 функция $x \to \widehat{F}(t,x)$ локально липшицева, тогда, в силу [9, лемма 8], имеет место соотношение $\operatorname{dist}\bigl(S_{t_i}(t,0,X_i),\mathcal{S}(t,\widehat{\sigma},\widehat{X})\bigr) \to 0$ при $i \to \infty$. Таким образом, справедливы оценки

$$d\bigl(\mathcal{S}(t,\widehat{\sigma},\widehat{X}),\widehat{M}(t)\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{dist}\bigl(\mathcal{S}(t,\widehat{\sigma},\widehat{X}),S_{t_i}(t,0,X_i)\bigr) + d\bigl(S_{t_i}(t,0,X_i),M_{t_i}(t)\bigr) + \operatorname{dist}(M_{t_i}(t),\widehat{M}(t)) \to 0,$$

и, следовательно, множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно. $\square$

Из лемм 5–8 вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* 4, *функции* $t \to F(t,x)$ *и* $t \to M(t)$ *совместно рекуррентны* (*почти периодичны*) *равномерно на компактах в* $\mathbb{R}^n$ *и функция* $(t,x) \to F(t,x)$ *полунепрерывна сверху. Тогда:*

1) *если функция* $t \to F(t,x)$ *локально липшицева, а функция* $t \to M(t)$ *такова, что множество* $\mathcal{M}$ *положительно инвариантно относительно включения* (4.1), *то найдется такое множество* $X_0 \subseteq M(t_0)$, *что интегральная воронка* $t \to S(t,t_0,X_0)$ *включения* (4.1) *рекуррентна* (*почти периодична*);

2) *если функция* $t \to M(t)$ *такова, что множество* $\mathcal{M}$ *слабо положительно инвариантно относительно включения* (4.1), *то включение* (4.1) *имеет хотя бы одно рекуррентное* (*почти периодическое*) *решение* $t \to x(t)$ *такое, что* $x(t) \in M(t)$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Е. Л. Тонкову за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Favard J. Sur les equation differentielles a coefficients presque-periodiques // Acta Math. — 1927. — Vol. 51. — P. 31–81.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.
3. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 1. — М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. — 244 с.
4. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 194–252.
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 223 с.
6. Aubin J.-P. Viability Theory. — Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 1991. — 543 p.
7. Ирисов А. Е., Тонков Е. Л. Достаточные условия оптимальности рекуррентных по Биркгофу движений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2005. — № 1. С. 59–74.
8. Roxin E. Stability in general control systems // J. Different. Equat. — 1965. — Vol. 1, № 2. — P. 115–150.
9. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2008. — Т. 262. — С. 202–221.
10. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, №3. — С. 185–201.
11. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1978. 204 с.
12. Бебутов М. В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень механико-математического факультета МГУ. — 1941. — № 5. С. 1–52.

Поступила в редакцию 01.03.10

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 3

E. A. Panasenko

On existence of recurrent and almost periodic solutions to differential inclusion

There are studied the conditions of existence of recurrent and almost periodic solutions to nonautonomous differential inclusion with a parameter that changes in a compact metric space. The corresponding results for ordinary differential inclusions are derived.

Keywords: differential inclusion, recurrent and almost periodic solutions, weakly invariant set, topological dynamical system.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37B35

Панасенко Елена Александровна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33, E-mail: panlena_t@mail.ru