УДК 517.917

© ***А. А. Килин***

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

В данной работе рассматриваются системы материальных точек в евклидовом пространстве, взаимодействующих как друг с другом, так и с внешним полем. Для случая произвольного парного взаимодействия между телами, зависящего только от их взаимного расстояния, указаны новые интегралы, образующие вектор *галилеева момента*. Приведена соответствующая алгебра интегралов, которую образуют интегралы импульса, момента импульса и галилеева момента.

Рассмотрены системы частиц, взаимодействие между которыми описывается однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$. Для этих систем приведена наиболее общая форма дополнительного первого интеграла движения, называемого нами интегралом Якоби. Указана новая нелинейная алгебра интегралов, включающая интеграл Якоби. Систематически описана новая процедура редукции и возможность ее применения в динамике для понижения порядка гамильтоновых систем.

В статье также приводится ряд новых интегрируемых и суперинтегрируемых систем, являющихся обобщением классических. Приведен ряд обобщений тождества Лагранжа для систем с однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$, а также с помощью компьютерных экспериментов доказана неинтегрируемость задачи Якоби на плоскости.

Ключевые слова: многочастичные системы, интеграция Якоби.

§ 1. Задача N тел

Интегралы движения, редукция, алгебра интегралов. Рассмотрим классическую задачу N тел произвольных масс $m_i, i = 1..N$, движущихся в пространстве $\mathbb{R}^n$ под действием потенциальных сил, зависящих от взаимных расстояний между телами. Стандартным образом обозначим положение и импульс i-того тела n-мерными векторами r_i и p_i. Тогда уравнения движения в гамильтоновой форме имеют вид

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}, \quad i = 1 \dots N, H = \frac{1}{2} \sum \frac{p_i^2}{m_i} + U(|r_i - r_j|), \tag{1.1}$$

где гамильтониан H задает полную энергию системы тел.

Хорошо известно, что уравнения (1.1) инвариантны относительно группы $E(n)$ движений пространства $\mathbb{R}^n$. Вследствие этого, по теореме Нётер [13], они допускают $n + \frac{n(n-1)}{2}$ первых интегралов движения

$$P = \sum p_i, \quad M_{\mu\nu} = \sum_i r_\mu^{(i)} p_\nu^{(i)} - r_\nu^{(i)} p_\mu^{(i)}, \tag{1.2}$$

выражающих законы сохранения полного импульса и момента импульса системы тел. Здесь и далее латинские индексы нумеруют тела, а греческие — компоненты векторов и тензоров.

Кроме того, уравнения (1.1) инвариантны относительно преобразований к равномерно движущейся (относительно исходной) системе координат. Совместно с движениями пространства эти преобразования образуют группу преобразований Галилея. Соответствующие (по теореме Нётер) интегралы движения

$$c = R - \frac{P}{\sum m_i} t, \quad \text{где} \quad R = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \tag{1.3}$$

являются неавтономным (явно зависящим от времени) и связаны с равномерным и прямолинейным движением центра масс R.

Интегралы (1.2) и (1.3) позволяют провести редукцию на $n+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ степеней свободы (квадратными скобками здесь и далее обозначена целая часть числа).

Отметим, что интегралы (1.3) являются неавтономными. Это, в частности, не позволяет применить принадлежащий Пуанкаре алгебраический метод понижения порядка, являющийся гамильтоновым вариантом понижения порядка по Раусу и обобщенный Е. Картаном на случай некоммутативной алгебры интегралов [3].

Рассмотрим в качестве примера движение трех тел в пространстве $\mathbb{R}^3$. Автономные интегралы (1.2) в этом случае образуют алгебру $e(3)$, при этом в теореме **??** следует положить $k=6, q=2$. Теорема Ли–Картана в этом случае позволяет провести редукцию на четыре степени свободы. В то же время классическая процедура редукции (см. стр. **??**) позволяет исключить пять степеней свободы. Таким образом, для корректной редукции по Ли–Картану не хватает еще одного независимого автономного интеграла в инволюции с (1.2).

Приведем теперь теорему, обобщающую результаты С. Ли.

Теорема 1. Уравнения (1.1) движения N тел в $\mathbb{R}^n$ помимо (1.2) допускают еще $\frac{n(n-1)}{2}$ автономных интегралов движения

$$Q_{\mu\nu}=R_\mu P_\nu-R_\nu P_\mu, \quad \mu,\nu=1\dots n. \tag{1.4}$$

Причем указанные интегралы связаны друг с другом и интегралами P соотношениями

$$\sum_{<\mu,\nu,\rho>} e_{\mu\nu\rho}Q_{\mu\nu}P_\rho=0, \tag{1.5}$$

где $\mu\neq\nu\neq\rho\neq\mu$, а суммирование ведется по циклическим перестановкам индексов.

Доказательство. Доказательство первой части теоремы проводится с помощью исключения времени из различных пар интегралов (1.3). Действительно,

$$Q_{\mu\nu}=c_\mu P_\nu-c_\nu P_\mu=R_\mu P_\nu-R_\nu P_\mu. \tag{1.6}$$

Уравнения связи (1.5) при этом непосредственно следуют из вида интегралов (1.4). □

Приведем теперь скобки Пуассона интегралов (1.2) и (1.4). Здесь и далее мы ограничимся случаем движения N тел в $\mathbb{R}^3$. Обобщение на случай более высоких размерностей не представляет сложности и может быть проведено, следуя, например, [18]. Стандартным образом перейдем от тензоров к векторам полного и галилеева моментов $M_{\mu\nu}=e_{\mu\nu\rho}M_\rho$, $Q_{\mu\nu}=e_{\mu\nu\rho}Q_\rho$. Скобка Пуассона при этом имеет вид

$$\begin{gathered}\{M_\mu,\, M_\nu\}=e_{\mu\nu\rho}M_\rho, \quad \{M_\mu,\, Q_\nu\}=e_{\mu\nu\rho}Q_\rho, \quad \{M_\mu,\, P_\nu\}=e_{\mu\nu\rho}P_\rho,\\ \{Q_\mu,\, Q_\nu\}=e_{\mu\nu\rho}Q_\rho, \quad \{Q_\mu,\, P_\nu\}=e_{\mu\nu\rho}P_\rho, \quad \{P_\mu,\, P_\nu\}=0.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Алгебра интегралов (1.7) обладает тремя функциями Казимира

$$K_0=(Q,\, P), \quad K_1=(M,\, P), \quad K_2=|M-Q|^2, \tag{1.8}$$

одна из которых необходимо равна нулю $K_0=0$ и представляет собой уравнение связи (1.5).

Задача двух тел в пространствах постоянной кривизны. Постановка задачи. Рассмотрим теперь задачу N тел в пространствах постоянной кривизны. Для этого параметризуем сферу $\mathbb{S}^3$ (псевдосферу $\mathbb{L}^3$), используя избыточные координаты четырехмерного евклидова пространства R^4 (пространства Минковского M^4) со связью

$$\Phi(q)=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}q^\mu q^\nu\mp R^2\right)=\frac{1}{2}\left(\langle q,\, q\rangle\mp R^2\right)=0, \tag{1.9}$$

Здесь и далее верхний знак соответствует сфере, а нижний знак — псевдосфере. Метрика соответствующего пространства $\langle\cdot,\cdot\rangle$ индуцирует метрику сферы на $\mathbb{S}^3$ и метрику Лобачевского на псевдосфере $\mathbb{L}^3$.

Движение N частиц в избыточных координатах в потенциале $U(q_1,\ldots,q_N)$ описывается лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle\dot{q}_i,\,\dot{q}_i\rangle - U(q_1,\,\ldots,\,q_N)$$

со связью (1.9). Используя гамильтонов формализм систем со связями [13], получаем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(< p_i,\,p_i > - \frac{< p_i,\,q_i >^2}{< q_i,\,q_i >}\right) + U(q_1,\,\ldots,\,q_N). \tag{1.10}$$

Уравнения движения $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ в переменных q, p являются каноническими.

Как хорошо известно [9, 4, 14, 6, 8, 10], аналогом ньютоновского потенциала взаимодействия между телами на сфере является

$$U(q_i,q_j) = -\gamma\operatorname{ctg}\theta_{ij} = -\gamma\frac{\langle q_i,\,q_j\rangle}{\sqrt{R^2\mp\langle q_i,\,q_j\rangle^2}}, \quad i,j=1,\,\ldots,\,N, i\neq j. \tag{1.11}$$

Напомним, что потенциал (1.11) может быть получен либо из решения уравнения Лапласа–Бельтрами на сфере $\mathbb{S}^3$, инвариантного относительно группы $SO(3)$ и имеющего особенность в полюсе $\theta = 0$, либо при перенесении теоремы Бертрана на сферу [16, 9]. Таким образом, классическая задача N тел в пространствах постоянной кривизны описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(< p_i,\,p_i > - \frac{< p_i,\,q_i >^2}{< q_i,\,q_i >}\right) - \gamma\sum_{i>j=1}^{N}\frac{\langle q_i,\,q_j\rangle}{\sqrt{R^2\mp\langle q_i,\,q_j\rangle^2}}. \tag{1.12}$$

Как было показано в [2], задача двух тел в пространствах постоянной кривизны является неинтегрируемой. Однако в пределе $R\to\infty$ она переходит в интегрируемую классическую задачу двух тел. Отметим, что при обратном переходе от плоской к искривленной задаче сохраняются интегралы типа момента, однако пропадает галилеева инвариантность. В связи с этим было бы интересно построить стандартную теорию возмущения для плоской задачи, используя в качестве параметра возмущения кривизну пространства, а интегралы галилеева момента (или их комбинации) — в качестве адиабатических инвариантов.

§ 2. Натуральная система с однородным потенциалом степени $\alpha = -2$

Интегралы движения. Рассмотрим натуральную систему с потенциалом $U_\alpha(r)$, являющимся однородной функцией степени однородности α по переменным r_i, $i = 1..N$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{m_i} + U_\alpha(r). \tag{2.1}$$

Как известно, для потенциала $U_\alpha(r)$ справедливо тождество Эйлера

$$(r,\,\frac{\partial U_\alpha}{\partial r}) = \alpha U_\alpha. \tag{2.2}$$

Эволюция центрального момента инерции $I = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ для таких систем описывается *формулой Лагранжа*

$$\ddot{I} = 4H - 2(\alpha+2)U_\alpha. \tag{2.3}$$

Некоторые обобщения формулы Лагранжа на системы со связями на случай, когда потенциальная энергия квазиоднородна по координатам, а также на континуум взаимодействующих частиц можно найти в недавней работе [7].

В рассматриваемом случае $\alpha = -2$ формула Лагранжа упрощается, при этом уравнение для момента инерции может быть проинтегрировано явно

$$I(t) = 2Ht^2 + at + b, \tag{2.4}$$

здесь a и b — константы интегрирования. Из (2.4) следует восходящее к Якоби утверждение для системы N частиц с потенциалом $U_{-2}(r)$.

Утверждение 1 (Якоби). В случае отрицательных энергий $H < 0$ все частицы системы столкнутся за конечное время, а в случае положительной энергии $H > 0$ по крайней мере одно взаимное расстояние между телами будет бесконечно возрастать при стремлении $t \to \pm\infty$.

Константы интегрирования a и b являются неавтономными (явно зависящими от времени) интегралами движения. Впервые на их существование указал Якоби [**?**], при исследовании задачи трех тел на прямой с потенциалом $U = \sum\limits_{i,j=1,i>j}^{N} \frac{m_i m_j}{(x_i - x_j)^2}$. В явном виде для произвольного потенциала $U = U_{-2}(r)$ интегралы a и b записываются следующим образом:

$$a = 2(r,\, p) - 4Ht, \quad b = 2Ht^2 - 2(r,\, p)t + I, \tag{2.5}$$

где H — гамильтониан системы.

Заметим, что при $\alpha = -2$ на фиксированном уровне интеграла энергии формула Лагранжа (2.3) принимает вид уравнения Ньютона с постоянной силой. Данное уравнение допускает очевидный интеграл энергии

$$h = \frac{1}{2}\dot{I}^2 - 4IH = \frac{a^2}{2} - 4bH, \tag{2.6}$$

который будет являться интегралом движения и для всей системы.

Можно показать, что уравнения движения системы (2.1) с потенциалом $U_{-2}(r)$ инвариантны относительно однопараметрических групп преобразований координат и времени следующего вида

$$G_a : \begin{cases} r \to e^{\lambda} r, \\ t \to e^{2\lambda} t; \end{cases} \qquad G_b : \begin{cases} r \to \dfrac{r}{1 - \lambda t}, \\ t \to \dfrac{t}{1 - \lambda t}, \end{cases} \tag{2.7}$$

где λ — параметр растяжения. Указанным преобразованиям по теореме Нётер соответствуют неавтономные интегралы a и b (2.5). Скобки Пуассона этих интегралов друг с другом и с гамильтонианом имеют вид

$$\{H,\, a\} = -4H, \quad \{H,\, b\} = -a, \quad \{a,\, b\} = -4b, \tag{2.8}$$

они образуют скобку Ли–Пуассона, соответствующую алгебре $sl(2)$. Функцией Казимира этой алгебры является автономный интеграл. Причем, в отличие от интегралов (2.5), его существование связано со скрытой симметрией задачи, которой не соответствует никакой очевидной группы преобразований фазового пространства.

Процедура редукции Здесь мы систематически обсудим новый тип редукции, который имеет негамильтонов характер и существенно отличается от классической процедуры. Проблема конструктивной редукции при наличии квадратичных по импульсам первых интегралов в общем случае является очень сложной и, видимо, не может быть разрешена. Но в некоторых частных случаях процедура, оказывается, может быть доведена до конца.

Приведем здесь наиболее симметричный вид редукции, обобщенный нами на случай произвольной системы с потенциалом.

Теорема 2. Натуральная система вида (2.1) с потенциалом допускает редукцию на одну степень свободы с помощью замены времени и координат

$$dt = I d\tau, \quad q_i = \sqrt{\frac{m_i}{I}} r_i, \quad q,\, r \in \mathbb{R}^N. \tag{2.9}$$

Уравнения движения в новых переменных описывают движении материальной точки по $(N-1)$-мерной сфере $(q,\, q) = 1$

$$q'' = -\frac{\partial \widetilde{U}_{-2}}{\partial q} + \lambda q, \tag{2.10}$$

где $\lambda = (q, \frac{\partial \widetilde{U}_{-2}}{\partial q}) - q'^2$ — неопределенный множитель Лагранжа,

$$\widetilde{U}_{-2}(q) = IU_{-2}(r) = U_{-2}(\frac{q_i}{\sqrt{m_i}}), \tag{2.11}$$

а штрих обозначает дифференцирование по новому времени. При этом интеграл (**??**) принимает вид

$$J = {q'}^2 + 2\widetilde{U}_{-2}(q) \tag{2.12}$$

и с точностью до константы совпадает с полной энергией приведенной системы.

Гамильтоново представление системы (2.10)получается с помощью преобразования Лежандра на сфере для функции Лагранжа вида

$$L = \frac{1}{2}{q'}^2 - \widetilde{U}_{-2}(q).$$

При этом интеграл (2.12) с точностью до множителя совпадает с гамильтонианом приведенной системы.

Рассмотрим отдельно случай $N = 3$ движения трех тел по прямой. В этом случае уравнения приведенной системы (2.10) описывают движение материальной точки по двумерной сфере S^2, и, в силу хорошо известной аналогии с динамикой твердого тела [**?**], их можно представить в гамильтоновом виде со скобкой Пуассона, определяемой алгеброй $e(3)$. Действительно, введем новые переменные $M = q \times q'$, $\gamma = q$. Гамильтониан в этих переменных имеет вид

$$H = \frac{1}{2}M^2 + \widetilde{U}_{-2}(\gamma), \tag{2.13}$$

а скобки Пуассона

$$\{M_i,\, M_j\} = e_{ijk}M_k, \quad \{M_i,\, \gamma_j\} = e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i,\, \gamma_j\} = 0 \tag{2.14}$$

являются вырожденными и обладают двумя функциями Казимира $(M,\, \gamma) = c$ и $(\gamma,\, \gamma) = 1$. Уравнения, задаваемые (2.13) и (2.14), при этом совпадают с уравнениями движения шарового волчка в потенциале $\widetilde{U}_{-2}(\gamma)$. Кроме того, в рассматриваемом случае необходимо выполняется $(M,\, \gamma) = 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Задача о движении трех тел на прямой, взаимодействие которых описывается потенциалом вида (**??**), с помощью замены (2.9) приводится к задаче о движении шарового волчка в потенциале $\widetilde{U}_{-2}(\gamma) = U_{-2}(\frac{\gamma_i}{\sqrt{m_i}})$ на нулевом уровне интеграла площадей $c = (M,\, \gamma) = 0$.

Заметим также, что приведенная система на сфере (2.10) не содержит слагаемого $V(I)$, входящего в исходный потенциал (**??**). Таким образом, натуральные системы с различными добавками $V(I)$ редуцируются к одной и той же системе на сфере.

Система Рососхатиуса. Рассмотрим в качестве примера систему Рососхатиуса [?], описывающую движение материальной точки по двумерной сфере $\mathbb{S}^2$, с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}({M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2) + \frac{c_1}{{\gamma_1}^2} + \frac{c_2}{{\gamma_2}^2} + \frac{c_3}{{\gamma_3}^2}. \tag{2.15}$$

Соответствующие уравнения движения на алгебре $e(3)$ на уровне $(M\,,\gamma) = 0$ обладают тремя квадратичными по импульсам интегралами (см., например, [?])

$$K_i = \frac{1}{2}{M_i}^2 + \frac{c_j {\gamma_k}^2}{{\gamma_j}^2} + \frac{c_k {\gamma_j}^2}{{\gamma_k}^2}, \quad \text{где} \quad i = 1\ldots 3. \tag{2.16}$$

Коммутация этих интегралов на уровне $(M\,,\gamma) = 0$ приводит к еще одному, уже кубическому по импульсам интегралу

$$F = M_1 M_2 M_3 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \left(\frac{c_1 M_1}{{\gamma_1}^3} + \frac{c_2 M_2}{{\gamma_2}^3} + \frac{c_3 M_3}{{\gamma_3}^3}\right). \tag{2.17}$$

Можно показать, что среди этих интегралов только три являются независимыми. Таким образом, данная система является суперинтегрируемой, что было показано Ю. Мозером в работе [?] для более общего случая — задачи Неймана с добавками Рососхатиуса.

Сделаем теперь замену переменных, обратную к (2.9). После чего, в силу аналогии системы на сфере и задачи о движении N тел на прямой (см. теорему 2), получим задачу о движении трех тел на прямой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\frac{{p_1}^2}{m_1} + \frac{{p_2}^2}{m_2} + \frac{{p_3}^2}{m_3}) + \frac{c_1^*}{r_1^2} + \frac{c_2^*}{r_2^2} + \frac{c_3^*}{r_3^2}, \tag{2.18}$$

которая разделяется на три одностепенных системы.

Система Гаффе. В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о движении трех одинаковых тел по прямой, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{c}{(x_1 x_2 x_3)^{2/3}}. \tag{2.19}$$

Как видно из (2.19), потенциал системы Гаффе является однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$. Гамильтониан приведенной системы в переменных M, γ записывается следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}({M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2) + \frac{c}{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{2/3}}, \tag{2.20}$$

а дополнительный, кубичный по импульсам интеграл —

$$F_3 = M_1 M_2 M_3 - 2\,\frac{c\,(\gamma_2\gamma_3 M_1 + \gamma_1\gamma_3 M_2 + \gamma_1\gamma_2 M_3)}{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{2/3}}. \tag{2.21}$$

Интеграл (2.21) приведен Гаффе только для системы (2.19) на сфере. Таким образом, для исходной системы им была показана только интегрируемость в квадратурах. Чтобы показать интегрируемость полной системы (2.19) по Лиувиллю, необходимо указать для нее дополнительный третий интеграл движения, обобщающий интеграл (2.21) в исходных переменных p, x. Для этого с помощью преобразования, обратного к (2.9), запишем интеграл (2.21) для полной системы трех тел на прямой (2.19)

$$\begin{aligned} F_3 = {} & \frac{1}{2}\,(-p_2 x_3 + p_3 x_2)\,(p_2 x_1 - p_1 x_2)\,(p_3 x_1 - p_1 x_3) - \\ & - \frac{c\left(x_1 p_1\left(x_2^2 - x_3^2\right) + x_2 p_2\left(x_3^2 - x_1^2\right) + x_3 p_3\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{(x_1 x_2 x_3)^{2/3}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

С помощью непосредственных вычислений легко показать, что интегралы коммутируют друг с другом.

§ 3. Задача N тел с однородным потенциалом степени -2, зависящим от взаимных расстояний

Алгебра интегралов Рассмотрим задачу N тел, потенциал взаимодействия между которыми зависит только от взаимных расстояний и одновременно является однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$, то есть

$$H = \frac{1}{2}\sum \frac{p_i^2}{m_i} + U_{-2}(|r_i - r_j|). \tag{3.1}$$

Частным случаем такой задачи является система трех тел на прямой, интегрируемость которой на нулевом уровне интеграла энергии была показана в работах [17, 15]. Рассмотрим теперь общую задачу движения N тел в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. В этом случае справедлива следующая

Теорема 3. Система (3.1), описывающая движение N тел в $\mathbb{R}^3$ с однородным потенциалом взаимодействия степени однородности $\alpha = -2$, допускает десять функционально независимых автономных интегралов движения.

$$P = \sum p_i, \quad S = P\sum_{i=1}^{N}(r_i,\, p_i) - 2H\sum_{i=1}^{N} m_i r_i, M = \sum_i r_i \times p_i, \quad J = 2IH - \left(\sum_{i=1}^{N}(r_i,\, p_i)\right)^2. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для рассматриваемого потенциала уравнения (1.1) обладают неавтономными интегралами движения

$$c = R - \frac{P}{\sum m_i}t, \quad a = 2\sum_{i=1}^{N}(r_i,\, p_i) - 4Ht, b = 2Ht^2 - 2\sum_{i=1}^{N}(r_i,\, p_i)t + I. \tag{3.3}$$

Исключая время из различных пар интегралов a и c_i, помимо интегралf (1.4), получим еще три новых автономных интеграла:

$$S = P\sum_{i=1}^{N}(r_i,\, p_i) - 2H\sum_{i=1}^{N} m_i r_i. \tag{3.4}$$

Интегралы P и S и найденные ранее интегралы Q (1.4) не являются независимыми и связаны следующим образом:

$$P \times S = 2H\sum_{i=1}^{N} m_i Q. \tag{3.5}$$

Таким образом, в качестве независимых лучше всего выбрать интегралы (3.2). Отсутствие дополнительных связей между ними легко показать, явно посчитав соответствующий якобиан. $\square$

Скобки Пуассона интегралов (3.2) имеют вид

$$\begin{gathered}\{M_\mu,\, M_\nu\} = e_{\mu\nu\rho}M_\rho,\, \{M_\mu,\, S_\nu\} = e_{\mu\nu\rho}S_\rho,\, \{M_\mu,\, P_\nu\} = e_{\mu\nu\rho}P_\rho,\, \{M_\mu,\, J\} = 0,\\ \{S_\mu,\, S_\nu\} = S_\mu P_\nu - P_\mu S_\nu,\, \{S_\mu,\, P_\nu\} = P_\mu P_\nu - 2H\left(\sum m_i\right)\delta_{\mu\nu},\, \{S_\mu,\, J\} = -2JP_\mu,\\ \{P_\mu,\, P_\nu\} = 0,\, \{P_\mu,\, J\} = 2S_\mu.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Как видно из (3.6), получившаяся алгебра интегралов является квадратичной. Ранг этой пуассоновой структуры равен восьми, следовательно, данная алгебра обладает двумя функциями Казимира

$$K_1 = (P \times S - 2H\left(\sum m_i\right)M)^2, K_2 = S^2 + JP^2 - 2(M,\, P \times S) + 2H\left(\sum m_i\right)(M^2 - J). \tag{3.7}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4. Уравнения движения (1.1), описывающие движение N тел в $\mathbb{R}^3$ с потенциалом парного взаимодействия, являющимся однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$, допускают редукцию на шесть степеней свободы с помощью интегралов (3.2).

Для доказательства теоремы достаточно предъявить шесть первых интегралов в инволюции. В качестве двух из них берутся функции Казимира (3.7), а оставшиеся четыре вводятся как координаты Дарбу на уровне функций Казимира алгебры интегралов, что всегда можно сделать по теореме Дарбу–Вейнстейна.

Выполнив аналогичные вычисления для $\mathbb{R}^2$, можно показать, что плоская задача N тел может быть редуцирована на четыре степени свободы. Таким образом, она сводится к системе с двумя степенями свободы. Соответствующая конструктивная процедура редукции для задачи трех тел с потенциалом

$$U = \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{(r_i - r_j)^2}, \quad r_i \in \mathbb{R}^2 \tag{3.8}$$

приведена в разделе 6. Там же с помощью построения отображения Пуанкаре показана неинтегрируемость полученной системы. Напомним, что ранее для данной задачи было показано [5] лишь отсутствие мероморфных интегралов движения для частного случая $m_1 \neq m_2 = m_3 = 1,\ a_{i,j} = 1$.

§ 4. Задача Якоби на прямой

Интегрируемость и суперинтегрируемость. Рассмотрим в качестве примера задачу Якоби о движении трех тел на прямой с потенциалом вида

$$U = \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{(x_i - x_j)^2}. \tag{4.1}$$

Обобщенный нами на случай произвольных масс и констант взаимодействия полный набор интегралов (3.2) выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{m_i} + \sum_{i<j=1}^{3}\frac{a_{ij}}{(x_i - x_j)^2}, \quad P = \sum_{i=1}^{3} p_i, S = P\sum_{i=1}^{3} x_i p_i - 2H\sum_{i=1}^{3} m_i x_i, \quad J = 2H\sum_{i=1}^{3} m_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{3} x_i p_i)^2. \tag{4.2}$$

В случае $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$ к ним добавляется еще один кубический по импульсам интеграл

$$F = p_1 p_2 p_3 - \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a p_k}{(x_i - x_j)^2}. \tag{4.3}$$

Таким образом, в этом случае система трех тел является суперинтегрируемой, или максимально суперинтегрируемой. Заметим, что в работе [11] указывается суперинтегрируемость, а в работе [1] — суперразделимость рассматриваемой задачи без использования интеграла третьей степени. Однако, как было позднее отмечено в [12], суперинтегрируемость невозможно установить без использования этого интеграла. Отметим, что, в отличие от рассматриваемого случая, в системе Рософатиуса (2.18) (которая получается из данной при помощи редукции по теореме 2) для суперинтегрируемости достаточно квадратичных по импульсам интегралов.

Заметим также, что кубические интегралы (2.17), (4.3) и (2.21) для разных систем довольно схожи друг с другом. Было бы интересно получить некую универсальную форму данного интеграла и условие на потенциал, при котором данный интеграл может существовать.

Редукция к системе на сфере. Рассмотрим теперь систему на сфере $\mathbb{S}^2$, получающуюся из задачи Якоби после преобразования (2.9). Как было сказано выше, интеграл J при преобразовании становится гамильтонианом системы на сфере и принимает вид

$$\widetilde{H} = J/2 = \frac{1}{2}M^2 + V(\gamma), \tag{4.4}$$

где

$$V(\gamma) = IU(x) = \sum_{i<j=1}^{3} \frac{a_{ij}^*}{(\gamma_i\sqrt{m_j} - \gamma_j\sqrt{m_i})^2}. \tag{4.5}$$

Остальные интегралы преобразуются следующим образом:

$$H = \frac{\widetilde{H}}{I} + \frac{I'^2}{8I^3}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{I}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i' + \frac{I'}{2I^{3/2}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i, S = \frac{I'}{2I^{3/2}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i' - \frac{2\widetilde{H}}{\sqrt{I}}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i, \tag{4.6}$$

где $f' = \frac{df}{d\tau}$.

Как видно из (4.6), интегралы H, P и S после замены становятся неавтономными, так как зависят от величин I и I'. В свою очередь, зависимость этих величин от нового времени можно получить, используя соотношение (2.4) и замену времени, входящую в (2.9). В общем случае из неавтономных интегралов (4.6) можно построить один автономный интеграл:

$$G = \frac{S^2 + JP^2}{2E} = 2\widetilde{H}\left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i'\right)^2. \tag{4.7}$$

Таким образом, после редукции (2.9) мы получили интегрируемую систему на сфере, обладающую дополнительным первым интегралом (4.7).

Задача Якоби как суперпозиция гуковских центров на сфере и ее обобщения. В случае $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$ исходная система обладает дополнительным интегралом третьей степени (4.3). Для того чтобы «опустить» этот интеграл на сферу, рассмотрим нулевой уровень интеграла P. На нулевом уровне P радиус-вектор центра масс R становится первым интегралом, и после замены (2.9) становится справедливо равенство

$$R = const = \frac{\sqrt{I}}{\sum m_i}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i. \tag{4.8}$$

Взяв производную от (4.8) по новому времени, можно выразить I и I' в зависимости от новых переменных:

$$\frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i}{R\sum m_i}, \quad \frac{I'}{I^{3/2}} = -2\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\sqrt{m_i}\gamma_i'}{R\sum m_i}. \tag{4.9}$$

Подставив получившиеся выражения в интеграл F, записанный в новых переменных, с точностью до констант получим

$$F = \prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\gamma_i'\gamma_j - \gamma_i\gamma_j') - a\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\right)^2\sum_{i>j,k\neq i,j}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{(\gamma_k'\gamma_l - \gamma_k\gamma_l')}{(\gamma_i - \gamma_j)^2}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим подробнее получившуюся систему на сфере в случае равных масс и констант взаимодействия $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a$. Для этого повернем систему координат так, чтобы вектор (1,1,1) принял вертикальное положение

$$\widetilde{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 - \gamma_2), \widetilde{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3), \widetilde{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3). \tag{4.11}$$

Опустив тильды, запишем гамильтониан в новых переменных следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}M^2 + \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{(r_i,\,\gamma)^2}\right), \tag{4.12}$$

где

$$r_1 = (1,\,0,\,0), \quad r_2 = (1/2,\,-\sqrt{3}/2,\,0), \quad r_3 = (-1/2,\,-\sqrt{3}/2,\,0). \tag{4.13}$$

Как видно из (4.12), задача Якоби представляет собой не что иное, как задачу о движении точки по сфере в поле трех одинаковых гуковских центров, расположенных на экваторе в углах правильного треугольника. Под гуковским центром на сфере мы понимаем потенциал вида $\frac{1}{(r_i,\gamma)^2}$, который пропорционален квадрату тангенса углового расстояния от частицы до центра.

§ 5. Задача Якоби на плоскости

Рассмотрим задачу трех тел на плоскости с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{m_i} + \sum_{i>j}\frac{a_{ij}}{(r_i - r_j)^2}, \quad r_i,\, p_i \in \mathbb{R}^2. \tag{5.1}$$

Данная система обладает шестью первыми интегралами движения

$$P = \sum_{i=1}^{3} p_i, \quad S = P\sum_{i=1}^{3}(r_i, p_i) - 2H\sum_{i=1}^{3} m_i r_i, M = \sum_{i=1}^{3}(x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}), \quad J = 2IH - (\sum_{i=1}^{3}(r_i, p_i))^2, \tag{5.2}$$

где $I = \sum\limits_{i=1}^{3} m_i r_i^2$ — центральный момент инерции системы тел. Докажем следующую теорему о редукции рассматриваемой системы.

Теорема 5. Система (5.1) допускает редукцию на четыре степени свободы с помощью интегралов (5.2). Гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{(p_\psi + M)^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{(p_\psi - M)^2}{\cos^2\theta} + \frac{\mu_1 a_{12}}{\cos^2\theta} + \\ + \frac{\mu_2 m_1^2 a_{13}}{m_1^2\sin^2\theta + \mu_1\mu_2\cos^2\theta + m_1\sqrt{\mu_1\mu_2}\sin 2\theta\cos\psi} + \\ + \frac{\mu_2 m_2^2 a_{23}}{m_2^2\sin^2\theta + \mu_1\mu_2\cos^2\theta - m_2\sqrt{\mu_1\mu_2}\sin 2\theta\cos\psi}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $\theta \in (0,\,\frac{\pi}{2})$, $\psi \in [0,\,\pi)$, $\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $\mu_2 = \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы проведем ряд последовательных преобразований.

1. Редукция по интегралам P и S выполняется с помощью классического перехода к барицентрическим координатам (координатам Якоби):

$$\tilde{r}_i = r_{i+1} - R_i, \quad R_i = \sum_{k=1}^{i} m_k r_k \Big/ \sum_{k=1}^{i} m_k, \quad i = 1..2.$$

2. Редукция по интегралу момента импульса M осуществляется следующим образом: перейдем к полярным координатам $\tilde{r}_i = (\rho_i\cos\varphi_i, \rho_i\sin\varphi_i)$ и и сделаем замену переменных $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \psi = \varphi_1 - \varphi_2$. При этом φ — циклическая переменная, соответствующая интегралу $M = p_\varphi$. Исключая ее, получим редуцированную систему.

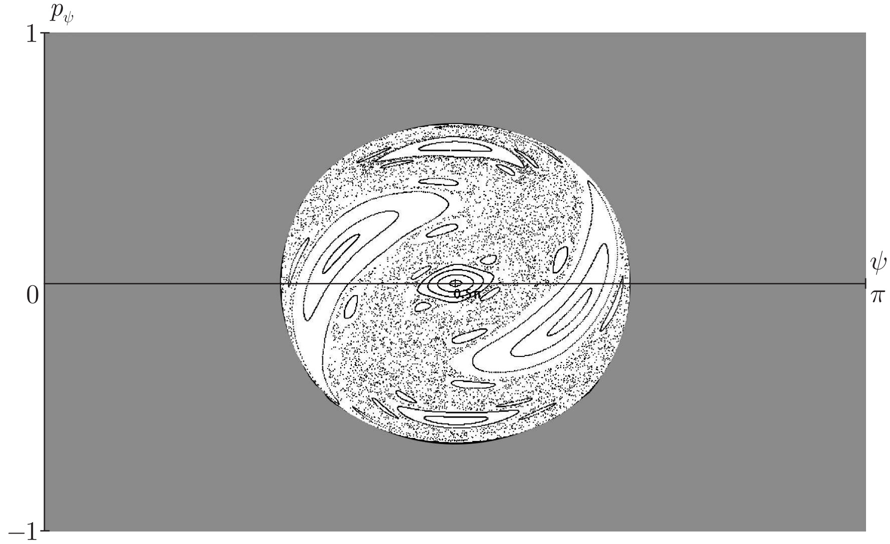

Рис. 1. Отображение Пуанкаре системы (5.3) при $m_1 = m_2 = m_3 = a_{12} = a_{23} = a_{13} = 1$ на нулевом уровне интеграла момента $M = 0$ и уровне энергии $H = 3.8$. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\theta = \frac{\pi}{4}$

3. Редукция по интегралу Якоби J проводится с помощью применения теоремы 2 п. **??** к части фазовых переменных (ρ_1 и ρ_2). При этом необходимо сделать следующую замену переменных и времени:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{I}{\mu_1}}\cos\theta, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{I}{\mu_2}}\sin\theta, \quad dt = Id\tau.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что в результате проведенных преобразований получим гамильтонову систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом (5.3). □

Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости полученной двухстепенной системы (5.3). На рис. 1 приведено соответствующее отображение Пуанкаре. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\theta = \frac{\pi}{4}$. Как видно из рисунка, даже в случае равных масс $m_i = 1$ и равных констант взаимодействия $a_{ij} = 1$ на нулевом уровне интеграла момента $M = 0$ фазовый портрет содержит хаотический слой. Таким образом, построенное отображение Пуанкаре может служить компьютерным доказательством неинтегрируемости системы (5.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benenti, S., Chanu, C., and Rastelli, G., The Super-Separability of the Three-Body Inverse-Square Calogero System, *J. Math. Phys.*, 2000, vol. 41, pp. 4654–4678.

2. Borisov, A. V., Mamaev, I. S., and Kilin, A. A., Two-Body Problem on a Sphere: Reduction, Stochasticity, Periodic Orbits, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–280.

3. Cartan, E., *Leçons sur les Invariants Intégraux*, Paris: Hermann, 1922, 210 p.

4. Higgs, P. W., Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry: I, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, vol. 12, no. 3, pp. 309–323.

5. Julliard-Tosel, E., Meromorphic Parametric Non-Integrability; the Inverse Square Potential, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2000, vol. 152, pp. 187–205.

6. Killing, H. W., Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen, *J. Reine Angew. Math.*, 1885, vol. 98, no. 1, pp. 1–48.

7. Kozlov, V. V., Lagrange's Identity and Its Generalizations, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 2, pp. 71–80.

8. Kozlov, V. V. and Harin, A. O., Kepler's Problem in Constant Curvature Spaces, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 1992, vol. 54, pp. 393–399.

9. Liebmann, H., Über die Zantalbewegung in der nichteuklidiche Geometrie, *Berichte d. Königl. Sächsischen Ges. d. Wiss., Math. Phys. Klasse*, 1903, vol. 55, pp. 146–153.

10. Serret, P., *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure*, Paris: Mallet-Bachelier, 1860.

11. Smirnov, R. and Winternitz, P., A Class of Superintegrable Systems of Calogero Type, *J. Math. Phys.*, 2006, vol. 47, 093505, 8 pp.

12. Smirnov, R. and Winternitz, P., Erratum: "A Class of Superintegrable Systems of Calogero Type"[*J. Math. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 9, 093505, 8 pp.], *J. Math. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 7, 079902, 1 p.

13. Арнольд, В. И., Козлов, В. В., Нейштадт, А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3, М.: ВИНИТИ, 1985.

14. Грановский, Я. И., Жеданов, А. С., Луценко, И. М., Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве: I. Осциллятор, *ТМФ*, 1992, т. 91, № 2, с. 207–216; II. Проблема Кеплера, *ТМФ*, 1992, т. 91, № 3, с. 396–410.

15. Козлов, В. В., *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике,* Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1995, 429 с.

16. Козлов, В. В., О динамике в пространствах постоянной кривизны, *Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1. Мат. Мех.*, 1994, вып. 2, с. 28–35.

17. Козлов, В. В., Колесников, Н. Н., Об интегрируемости гамильтоновых систем, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*, 1979, вып. 6, с. 88–91.

18. Садэтов, С. Т., О редукции n-мерной задачи $N+1$ тел к уравнениям Эйлера–Пуанкаре на алгебре Ли $sp(2N)$, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 3, c. 337-350.

Поступила в редакцию 01.08.09

A. A. Kilin

Numerical simulation of multiparticle systems

Systems of material points interacting both with one another and with an external field are considered in Euclidean space. For the case of arbitrary binary interaction depending solely on the mutual distance between the bodies, new integrals are found, which form a *Galilean momentum* vector. A corresponding algebra of integrals constituted by the integrals of momentum, angular momentum, and Galilean momentum is presented. Particle systems with a particle-interaction potential homogeneous of degree $\alpha = -2$ are considered. The most general form of the additional integral of motion, which we term the Jacobi integral, is presented for such systems. A new nonlinear algebra of integrals including the Jacobi integral is found. A systematic description is given to a new reduction procedure and possibilities of applying it to dynamics with the aim of lowering the order of Hamiltonian systems.
Some new integrable and superintegrable systems generalizing the classical ones are also described. Certain generalizations of the Lagrangian identity for systems with a particle-interaction potential homogeneous of degree $\alpha = -2$ are presented. In addition, computational experiments are used to prove the nonintegrability of the Jacobi problem on a plane.

Keywords: multiparticle systems, Jacobi integral.

Mathematical Subject Classifications: 70Hxx, 70G65

Килин Александр Александрович, к. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: aka@rcd.ru