ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 512.556

© *Д. В. Чупраков*

УСЛОВИЯ ДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследуются решетки конгруэнций полуколец непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве. Получены критерии дистрибутивности решетки конгруэнций полукольца непрерывных неотрицательных функций.

Ключевые слова: полукольцо и полуполе непрерывных функций, решетка конгруэнций, F-пространство.

Введение

Данная работа относится к теории колец и полуколец непрерывных функций на топологических пространствах. Главным объектом теории служит кольцо $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций.

Достаточно новым направлением развития теории колец $C(X)$ является исследование полуколец непрерывных функций, где основными объектами являются полукольцо $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций на топологическом пространстве X и полуполе $U(X)$ всех непрерывных положительных функций на X. Если операцию сложения $+$ заменить на операцию взятия максимума $\vee$, то получим идемпотентные полукольцо $C^\vee(X)$ и полуполе $U^\vee(X)$. Заметим, что кольцо $C(X)$ служит кольцом разностей как полукольца $C^+(X)$, так и полуполя $U(X)$.

Важную роль в теории полуколец непрерывных функций играют решетки конгруэнций, исследование которых начато в работе [1]. В этой работе введены отображения γ и δ, связывающие решетки конгруэнций произвольного полукольца с решеткой идеалов его кольца разностей. Установлено, что отображение δ является эпиморфизмом, а отображение γ сохраняет операцию пересечения.

В параграфе 2 настоящей работы доказано, что отображение γ из решетки идеалов $\operatorname{Id} C(X)$ в решетку конгруэнций $\operatorname{Con} U(X)$ есть гомоморфизм (предложение 4) и решетка $\operatorname{Id} C(X)$ является ретрактом решетки $\operatorname{Con} U(X)$ (теорема 1).

В 1998 г. В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов и И. А. Семенова установили, что если решетка конгруэнций $\operatorname{Con} C^+(X)$ или $\operatorname{Con} U(X)$ дистрибутивна, то пространство X является F-пространством [1, следствие 3.2]. В 2003 г. Д. В. Широков доказал, что дистрибутивность решетки $\operatorname{Con} U(X)$ равносильна свойству пространства X быть F-пространством [2]. В статье [3] установлено, что множества $\operatorname{Con} U(X)$ и $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ равны тогда и только тогда, когда пространство X является F-пространством. Возникает естественный вопрос, когда в точности решетка конгруэнций $\operatorname{Con} C^+(X)$ дистрибутивна? Ответу на него посвящен параграф 3 данной работы. В теореме 2 доказано, что дистрибутивность решетки $\operatorname{Con} C^+(X)$ также необходима для того, чтобы X было F-пространством. В предложении 6 показано, что на F-пространствах X решетка $\operatorname{Con} C^\vee(X)$ дистрибутивна.

§ 1. Основные понятия

Основные понятия теории полуколец имеются в монографии Голана [4]. Теория колец непрерывных функций изложена в книге Гилмана и Джерисона [5].

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S,+,\cdot,0,1\rangle$, в которой $\langle S,+,0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S,\cdot,1\rangle$ — моноид, выполняется закон дистрибутивности операции умножения относительно сложения, тождественно $0\cdot x=x\cdot 0=0$ и $0\neq 1$.

Если операция умножения на S коммутативна, то S — *коммутативное полукольцо.* Полукольцо, не являющееся кольцом, каждый элемент которого обратим, называется *полутелом.* Коммутативное полутело называется *полуполем.* Полукольцо S, удовлетворяющее квазитождеству $a+c=b+c\Rightarrow a=b$, называется (*аддитивно*) *сократимым* полукольцом.

Если для каждого $a\in S$ выполняется равенство $a+a=a$, то S называется (*аддитивно*) *идемпотентным* полукольцом.

Пусть X — топологическое пространство. На кольце $C(X)$ зададим поточечно операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$: $(f\vee g)(x)=\max(f(x),g(x))$, $(f\wedge g)(x)=\min(f(x),g(x))$ для любых $f,g\in C(X)$ и $x\in X$.

Через $C^+(X)$ обозначается полукольцо непрерывных неотрицательных функций над произвольным пространством X с обычными операциями $+$ и $\cdot$. Полукольцо непрерывных неотрицательных функций на X с идемпотентной операцией сложения $\vee$ и обычным умножением $\cdot$ обозначается $C^\vee(X)$. Аддитивно сократимое и аддитивно идемпотентное полуполя положительных непрерывных функций над произвольным пространством X обозначаются соответственно $U(X)$ и $U^\vee(X)$. На множестве $C(X)$ зададим порядок следующим образом: для любых функций $f,g\in C(X)$ неравенство $f\leqslant g$ справедливо тогда и только тогда, когда для каждого $x\in X$ имеет место неравенство $f(x)\leqslant g(x)$. Запись $f<g$ обозначает, что $f\leqslant g$, но $f\neq g$.

Для каждой функции $f\in C(X)$ множества $Z(f)=\{x\in X\mid f(x)=0\}$ и $\operatorname{coz} f=X\backslash Z(f)$ называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* на X соответственно. Обозначим $\operatorname{pos} f=\{x\in X\mid f(x)>0\}$ и $\operatorname{neg} f=\{x\in X\mid f(x)<0\}$.

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности на S, сохраняющее полукольцевые операции. Пусть ρ — конгруэнция на полукольце S. Через $\ker\rho$ будем обозначать класс единицы $[1]_\rho$ конгруэнции ρ и называть его *ядром* полукольца S. Ядро конгруэнции полуполя $U^\vee(X)$ назовем $\vee$*-ядром.*

Пусть I — идеал полукольца S. *Конгруэнцией Берна* по идеалу I называется такое отношение σ_I на S, что произвольные элементы a и b полукольца S находятся в отношении σ_I тогда и только тогда, когда $a+u=b+v$ для некоторых элементов $u,v\in I$. Это наименьшая конгруэнция, содержащая идеал I в классе нуля.

Множество всех конгруэнций $\operatorname{Con} S$ полукольца S является полной решеткой относительно включения $\subseteq$. Точной верхней гранью двух конгруэнций $\rho,\sigma\in\operatorname{Con} S$ является транзитивное замыкание $\rho\vee\sigma$ композиции $\rho\circ\sigma$ этих конгруэнций. Точной нижней гранью конгруэнций $\rho,\sigma\in\operatorname{Con} S$ является их пересечение $\rho\cap\sigma$. Наименьшим элементом решетки $\operatorname{Con} S$ является отношение равенства $\mathbf{0}$, наибольшим — одноклассовая конгруэнция $\mathbf{1}$.

§ 2. О решетке ядер полуполя $U(X)$

Нам потребуются следующие известные утверждения:

Предложение 1 [6]. *Мультипликативная нормальная подгруппа K полутела U является ядром тогда и только тогда, когда $k_1s_1+\ldots+k_ns_n\in K$ для любых $k_1,\ldots,k_n\in K$ и любых $s_1,\ldots,s_n\in U$ с условием $s_1+\ldots+s_n=1$. При этом K и ρ связаны соотношениями $u\rho v\Longleftrightarrow uv^{-1}\in K$ для любых $u,v\in U$ и $K=\ker\rho$.*

Предложение 2 [7, лемма 7.2]. *Нормальная подгруппа мультипликативной группы идемпотентного полутела P будет ядром в P тогда и только тогда, когда она замкнута относительно сложения и выпукла относительно естественного отношения порядка на P.*

Подмножество A упорядоченного множества S называется *выпуклым*, если вместе с элементами $s_1\leqslant s_2$ множество A содержит все элементы $s\in S$, удовлетворяющие условию $s_1\leqslant s\leqslant s_2$.

Лемма 1. *Классы любой конгруэнции на полукольце $C^{\vee}(X)$ и на полуполе $U^{\vee}(X)$ выпуклы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ρ — произвольная конгруэнция на $C^{\vee}(X)$ (или на $U^{\vee}(X)$), $f_1, f_2 \in [g]_\rho$, $f \in C^{\vee}(X)$ и $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$. Тогда $[f]_\rho = [f \vee f_1]_\rho = [f]_\rho \vee [f_1]_\rho = [f]_\rho \vee [f_2]_\rho = [f \vee f_2]_\rho = [f_2]_\rho = [g]_\rho$. □

Заметим, что решетка $\operatorname{Con} U$ изоморфна решетке $\{\ker\rho \mid \rho \in \operatorname{Con} U\}$ всех ядер полутела U с операциями умножения и пересечения ядер.

Предложение 3. *Решетка ядер* $\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ *является подрешеткой решетки ядер* $\operatorname{Con} U(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — $\vee$-ядро. В силу предложения 1 достаточно показать, что для любых $f_1, f_2 \in U^+(X)$ и любых $e_1, e_2 \in K$ условие $f_1 + f_2 = 1$ влечет $f_1e_1 + f_2e_2 \in K$. Имеем $e_1 \wedge e_2 = (f_1 + f_2)(e_1 \wedge e_2) \leqslant f_1e_1 + f_2e_2 \leqslant (f_1 + f_2)(e_1 \vee e_2) = e_1 \vee e_2$, причем $e_1 \wedge e_2, e_1 \vee e_2 \in K$ по предложению 2. В силу выпуклости $\vee$-ядра (лемма 1) получаем $f_1e_1 + f_2e_2 \in K$. □

Предложение 4. *Отображение*

$$\gamma\colon \operatorname{Id} C(X) \to \operatorname{Con} U(X), \quad \gamma(I) = \{(a, b) \mid a - b \in I\}$$

является гомоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 3.2 работы [1] отображение γ является $\cap$-гомоморфным отображением. Покажем, что отображение γ сохраняет точную верхнюю грань.

Рассмотрим произвольные идеалы $I, J \in \operatorname{Id} C(X)$ и докажем, что $\gamma(I) \circ \gamma(J) = \gamma(I + J)$. Включение $\gamma(I) \circ \gamma(J) \subseteq \gamma(I + J)$ очевидно. Установим обратное включение.

Возьмем функции $a, b \in U(X)$ такие, что $a\,\gamma(I + J)\,b$. Тогда $a - b = -(-i) + j$, где $f = -i \in I$, $g = j \in J$. Значит, $a + f = b + g$.

Рассмотрим множества $A = \{x \in X \mid a(x) + f(x) \geqslant 0\}$, $B = \{x \in X \mid a(x) + f(x) \leqslant 0\}$ и функцию

$$c = \begin{cases} a(x) + f(x) + f^2(x)g^2(x) = b(x) + g(x) + f^2(x)g^2(x), & x \in A, \\ f^2(x)g^2(x), & x \in B. \end{cases}$$

На множестве $A \cap B$ имеем $a + f + f^2g^2 = f^2g^2$, значит, $c \in U(X)$ ($c \in C^+(X)$). Заметим, что $f(B) \subseteq (-\infty; 0)$ и $g(B) \subseteq (-\infty; 0)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi = \begin{cases} 1 + f(x)g^2(x), & x \in A, \\ f(x)g^2(x) - \dfrac{a(x)}{f(x)}, & x \in B. \end{cases}$$

На множестве $A \cap B$ имеем $f = -a$, $g = -b$, $f \cdot g^2 - \dfrac{a}{f} = -a \cdot b^2 + 1 = 1 + fg^2$. Значит, $\dfrac{c - a}{f} = \varphi \in C(X)$ и $c - a = f\varphi \in (f) \subseteq I$. Рассмотрим функцию

$$\psi = \begin{cases} 1 + f^2(x)g(x), & x \in A, \\ f^2(x)g(x) - \dfrac{b(x)}{g(x)}, & x \in B. \end{cases}$$

На множестве $A \cap B$ имеем $f = -a$, $g = -b$, $f^2 \cdot g - \dfrac{b}{g} = a^2 \cdot (-b) + 1 = 1 + f^2g$. Значит, $\dfrac{c - b}{g} = \psi \in C(X)$ и $c - b = g\psi \in (g) \subseteq J$.

Таким образом, $a\,\gamma(I)\,c\,\gamma(J)\,b$ или $a\,(\gamma(I)\circ\gamma(J))\,b$. Значит, $\gamma(I+J)=\gamma(I)\circ\gamma(J)$. Так как отображение γ сохраняет пересечение, то отображение γ является гомоморфизмом. □

Полукольцо M называется *ретрактом* полукольца N, если существуют гомоморфизмы $\pi\colon N\to M$ и $\chi\colon M\to N$, такие, что $\pi\circ\chi=1_M$ — тождественное отображение множества M.

В работе [1] доказано, что отображение

$$\delta\colon\ \mathrm{Con}\,T\to\mathrm{Id}\,R,\quad \delta(\rho)=\{a-b\mid a\,\rho\,b\}$$

является гомоморфизмом и $\delta(\gamma(I))=I$. Из этих фактов и предложения 4 следует

Теорема 1. *Решетка идеалов* $\mathrm{Id}\,C(X)$ *является ретрактом решетки ядер* $\mathrm{Con}\,U(X)$.

§ 3. Условия дистрибутивности решетки $\mathrm{Con}\,C^+(X)$

Подмножества A и B пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует функция $f\in C(X)$, принимающая значение 0 на A и 1 на B.

Подпространство A топологического пространства X называется C^**-вложенным*, если любая ограниченная функция из $C(A)$ непрерывно продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Топологическое пространство X называется *F-пространством*, если в кольце $C(X)$ все конечно порождённые идеалы — главные [5].

Нам потребуются следующие характеризации F-пространства X :

1) непересекающиеся конуль-множества на X функционально отделимы [5];

2) для любой функции $f\in C(X)$ множества $\mathrm{neg}\,f$ и $\mathrm{pos}\,f$ функционально отделимы [5];

3) любое конуль-множество на X C^*-вложено [5];

4) каждый идеал I кольца $C(X)$ выпуклый, то есть $I\cap C^+(X)$ выпуклое множество [5];

5) решетка всех идеалов кольца $C(X)$ дистрибутивна [8];

6) решетка всех идеалов полукольца $C^+(X)$ дистрибутивна [1].

Предложение 5. *Для любого пространства* X *равносильны условия:*

1) X *— F-пространство;*

2) *для произвольных функций* $f,g,h\in C(X)$, *если* $f\leqslant h\leqslant g$, *то* $h=\alpha f+(1-\alpha)g$ *для некоторой функции* $\alpha\in C(X)$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$*;*

3) *классы любой конгруэнции полукольца* $C^+(X)$ *выпуклы;*

4) *классы единицы всех конгруэнций полукольца* $C^+(X)$ *выпуклы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим функции $f\leqslant g\leqslant h$ из $C^+(X)$. На $\mathrm{pos}(g-f)=\mathrm{coz}((g-f)\vee 0)$ рассмотрим непрерывную функцию $\alpha'=(g-h)/(g-f)$. Очевидно, $0\leqslant\alpha'\leqslant 1$. Тогда α' продолжается до искомой функции $\alpha\in C(X)$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $f,g,h\in C^+(X)$, $f\leqslant h\leqslant g$ и $f,g\in[f]_\tau$ ($\tau\in\mathrm{Con}\,C^+(X)$). Тогда для некоторой функции $\alpha\in C^+(X)$, $\alpha\leqslant 1$ справедливо

$$[h]_\tau=[\alpha f+(1-\alpha)g]_\tau=[\alpha]_\tau[f]_\tau+[1-\alpha]_\tau[g]_\tau=$$

$$=[\alpha]_\tau[f]_\tau+[1-\alpha]_\tau[f]_\tau=([\alpha]_\tau+[1-\alpha]_\tau)[f]_\tau=[\alpha+1-\alpha]_\tau[f]_\tau=[f]_\tau.$$

Значит, $h\in[f]_\tau$ и класс $[f]_\tau$ выпуклый.

Импликания 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

4) $\Longrightarrow$ 1). Возьмем идеал I кольца $C(X)$. Пусть $f\in C^+(X)$ и $g\in I$ такие, что $0\leqslant f\leqslant g$. Тогда $1\leqslant 1+f\leqslant 1+g$. Рассмотрим идеальную конгруэнцию $\gamma(I)\in\mathrm{Con}\,C^+(X)$ и ее класс единицы $K=[1]_{\gamma(I)}$. Тогда $K=(1+I)\cap C^+(X)$ и $1+g\in K$. По условию классы единицы всех конгруэнций полукольца $C^+(X)$ выпуклы, следовательно, $1+f\in K$ и $f\in I$. Значит, произвольный идеал I выпуклый. То есть X — F-пространство. □

Лемма 2. *На* F*-пространстве* X *любая конгруэнция из* $\mathrm{Con}\,C^\vee(X)$ *выдерживает операцию* $\wedge$.

Доказательство. Пусть X является F-пространством. Рассмотрим произвольную $\vee$-конгруэнцию φ.

Сначала докажем, что классы замкнуты относительно операции $\wedge$. Возьмем функции $f, g \in C^{\vee}(X)$, лежащие в одном классе, то есть $f \varphi g$. Покажем, что $f \wedge g \varphi f$. Для этого рассмотрим множества

$$A = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}, \quad C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Так как X является F-пространством, то найдется такая функция $k \in C^{\vee}(X)$, что $k(A) = \{1\}$, $k(B) = \{0\}$, $k(C) \subseteq [0,1]$. Рассмотрим также функцию $z = (1 - |f-g|) \vee 0$. Очевидно, что $z(C) = \{1\}$ и $z(A \cup B) \subseteq [0,1]$. Тогда $(fk) \varphi (gk)$ и $(f(1-k)) \varphi (g(1-k))$, то есть

$$\big(fk \vee g(1-k) \vee (f \wedge g)z\big) \varphi \big(fk \vee f(1-k) \vee (f \wedge g)z\big).$$

На множестве $A \cup B$ имеем

$$(f \wedge g)z \leqslant f \wedge g, \quad fk \vee g(1-k) \vee (f \wedge g)z = f \wedge g, \quad fk \vee f(1-k) \vee (f \wedge g)z = f.$$

На множестве C имеем

$$(f \wedge g)z = f \wedge f = f, \quad fk \vee g(1-k) = fk \vee f(1-k) \leqslant f,$$

то есть $fk \vee g(1-k) \vee (f \wedge g)z = f \wedge g$ и $fk \vee f(1-k) \vee (f \wedge g)z = f$.

Итак, $(f \wedge g) \varphi f$ на всем множестве X. Докажем теперь, что если $f \varphi g$, то $(f \wedge h) \varphi (g \wedge h)$ для любых $f, g, h \in C^{\vee}(X)$. Так как $(f \wedge g) \varphi f$, то достаточно рассмотреть случай $f \leqslant g$.

Пусть $h \leqslant g$, тогда необходимо доказать, что $f \wedge h \varphi h$. Рассмотрим множества

$$A = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}, \quad C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Возьмем функцию $z = (1 - |f-h|) \vee 0$ и функцию $k \in C^{\vee}(X)$, принимающую значение 1 на множестве A, значение 0 на множестве B и не превосходящую 1 на множестве C. Тогда $fk \leqslant hk \leqslant gk$. Класс $[fk]_{\varphi}$ выпуклый по лемме 1 и, следовательно, $(fk) \varphi (hk)$.

Итак, имеем

$$\big(fk \vee h(1-k) \vee (f \wedge h)z\big) \varphi \big(hk \vee h(1-k) \vee (f \wedge h)z\big).$$

Причем на всем X левая часть соотношения равна $f \wedge h$, а правая равна h. То есть $(f \wedge h) \varphi h$ или $(f \wedge h) \varphi (g \wedge h)$.

Пусть теперь $h \nleqslant g$. Тогда рассмотрим $h_1 = g \wedge h$. По доказанному,

$$(f \wedge h) = (f \wedge g \wedge h) = (f \wedge h_1) \varphi (g \wedge h_1) = (g \wedge h).$$

Таким образом, на F-пространстве X для любых функций $f, h \in \operatorname{Con} C^{\vee}(X)$, лежащих в одном классе конгруэнтности, и произвольной функции $h \in C^{\vee}(X)$ справедливо $(f \wedge h) \varphi (g \wedge h)$.

Предложение 6. *Если X является F-пространством, то решетка $\operatorname{Con} C^{\vee}(X)$ дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть X является F-пространством. Докажем, что любые конгруэнции $\varphi, \psi, \tau \in \operatorname{Con} C^{\vee}(X)$ связаны законом дистрибутивности $\varphi \cap (\psi \vee \tau) = (\varphi \cap \psi) \vee (\varphi \cap \tau)$.

Включение $\varphi \cap (\psi \vee \tau) \supseteq (\varphi \cap \psi) \vee (\varphi \cap \tau)$ очевидно. Установим справедливость включения $\varphi \cap (\psi \vee \tau) \subseteq (\varphi \cap \psi) \vee (\varphi \cap \tau)$.

Рассмотрим произвольные функции $f, g \in C^{\vee}(X)$, находящиеся в отношении $\varphi \cap (\psi \vee \tau)$. Тогда $f \varphi g$ и существуют $h_1, \ldots, h_n \in C^{\vee}(X)$ такие, что $f \psi h_1 \tau h_2 \psi \ldots \psi h_n \tau g$. Справедливы соотношения

$$f = \big((f \vee g) \wedge f\big) \psi \big((h_1 \vee g) \wedge f\big) \tau \big((h_2 \vee g) \wedge f\big) \psi \ldots \psi \big((h_n \vee g) \wedge f\big) \tau \big((g \vee g) \wedge f\big) = g \wedge f,$$

$$f \wedge g = \big((f \vee f) \wedge g\big)\, \psi\, \big((h_1 \vee f) \wedge g\big)\, \tau\, \big((h_2 \vee f) \wedge g\big)\, \psi\, \ldots\, \psi\, \big((h_n \vee f) \wedge g\big)\, \tau\, \big((g \vee f) \wedge g\big) = g,$$

причем $f \wedge g \leqslant (h_i \vee f) \wedge g \leqslant g$, $f \wedge g \leqslant (h_i \vee g) \wedge f \leqslant f$ и $(f \wedge g)\, \varphi\, f\, \varphi\, g$ для всех $i \in \{1, \ldots n\}$. Класс $[f]_\varphi$ выпуклый по лемме 1 и, следовательно, $(h_i \vee g) \wedge f, (h_i \vee f) \wedge g \in [f]_\varphi$. Обозначим $l_i = (h_i \vee g) \wedge f$, $l_{n+i} = (h_i \vee f) \wedge g$. Тогда

$$f\, (\varphi \cap \psi)\, l_1\, (\varphi \cap \tau)\, l_2\, (\varphi \cap \psi)\, \ldots\, (\varphi \cap \psi)\, l_n\, (\varphi \cap \tau) \tau\, f \wedge$$
$$\wedge\, g\, (\varphi \cap \tau)\, l_{n+1}\, (\varphi \cap \psi)\, l_{n+1}\, (\varphi \cap \tau)\, \ldots\, (\varphi \cap \tau)\, l_{2n}\, (\varphi \cap \psi)\, g,$$

следовательно, $f(\varphi \cap \psi) \vee (\varphi \cap \tau) g$. Откуда следует справедливость включения $\varphi \cap (\psi \vee \tau) \subseteq (\varphi \cap \psi) \vee (\varphi \cap \tau)$. □

Теорема 2. *Решетка конгруэнций полукольца непрерывных функций $C^+(X)$ над F-пространством X является дистрибутивной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X есть F-пространство. Покажем, что каждый класс произвольной конгруэнции $\rho \in \operatorname{Con} C^+(X)$ замкнут относительно операций $\vee$ и $\wedge$. Возьмем произвольную конгруэнцию $\rho \in \operatorname{Con} C^+(X)$ и функции $f, g \in C^+(X)$ такие, что $f\, \rho\, g$. Рассмотрим множества

$$A = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}, \quad C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Так как X является F-пространством, то найдется такая функция $k \in C^+(X)$, что $k(A) = \{1\}$, $k(B) = \{0\}$, $k(C) \subseteq [0, 1]$. Тогда $(fk)\, \varphi\, (gk)$ и $\big(f(1-k)\big)\, \varphi\, \big(g(1-k)\big)$. Отсюда имеем $\big(fk + g(1-k)\big)\, \varphi\, \big(fk + f(1-k)\big)$ и $\big(f(1-k) + gk\big)\, \varphi\, \big(f(1-k) + fk\big)$.

Легко видеть, что $fk + g(1-k) = f \wedge g$, $f(1-k) + gk = f \vee g$ на всем X. Таким образом, $(f \wedge g)\, \varphi\, f$ и $(f \vee g)\, \varphi\, f$.

Докажем теперь, что для любых $f, g \in \operatorname{Con} C^+(X)$ таких, что $f\, \rho\, g$, и произвольной функции $h \in C^+(X)$ справедливо соотношение $(f \vee h)\, \rho\, (g \vee h)$.

В силу замкнутости классов относительно операции $\vee$ достаточно рассмотреть $f \leqslant g$ и $f \leqslant h$. Возьмем множества

$$A = \{x \in X \mid g(x) < h(x)\}, \quad B = \{x \in X \mid g(x) > h(x)\}, \quad C = \{x \in X \mid g(x) = h(x)\}$$

и функцию $k \in C^\vee(X)$, принимающую значение 0 на множестве A, значение 1 на множестве B, и не превосходящую 1 на множестве C. Тогда $g \vee h = gk + h(1-k)$ и $fk \leqslant hk \leqslant gk$. Так как X является F-пространством, то $(hk)\, \rho\, (gk)$. Следовательно, имеем

$$g \vee h = \big(gk + h(1-k)\big)\, \rho\, \big(hk \vee h(1-k)\big) = h = g \vee h.$$

Аналогично доказывается стабильность операции $\wedge$ для произвольной конгруэнции $\rho \in C^+(X)$. Итак, любая конгруэнция на полукольце C^+ является $\vee$-конгруэнцией, то есть $\operatorname{Con} C^+(X) \subseteq \operatorname{Con} C^\vee(X)$. По предложению 6 решетка $\operatorname{Con} C^\vee(X)$ дистрибутивна, а значит, дистрибутивна и ее подрешетка $\operatorname{Con} C^+(X)$. □

Следствие 1. *Для произвольного пространства X эквивалентны следующие условия:*
1) *X является F-пространством;*
2) $\operatorname{Con} C^+(X) \subseteq \operatorname{Con} C^\vee(X)$ *;*
3) $\operatorname{Con} C^+(X)$ *дистрибутивная решетка.*

Следствие 1 вытекает из теоремы 2, предложения 5 и [1, следствие 3.2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы,конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 493–510.
2. Широков Д. В. Условия дистрибутивности решётки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций // Вестник ВятГГУ, 2003. — № 8. — С. 137–140.
3. Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F-пространства // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 8. — С. 15–26.
4. Golan J. F. Semirings and their applications. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. — 1999.
5. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions — N.Y.: Springer–Verlag. — 1976.
6. Hutchins H. C., Weinert H. J. Homomorphisms and kernels of semifields // Periodica Mathematica. — 1990. — Vol. V, № 21 (2). — P. 113–152.
7. Полин С. В. Простые полутела и полуполя // Сибирский математический журнал. — 1974. — Т. 15, № 1. — С. 90–101.
8. Вечтомов Е. М. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства // Математические заметки. — 1983. — Т. 34, № 3. — С. 321–332.

Поступила в редакцию 29.03.09

D. V. Chuprakov

Distributivity conditions for the congruence's lattice of semirings of continuous functions

Congruence lattices of semirings of continuous functions on any topological space are researched. Criteria of the distributivity of a lattice of congruences of semirings of continuous non-negative functions have been obtained.

Keywords: semiring and semifield of continuous functions, lattice of congruences, F-space.

Mathematical Subject Classifications: 16Y60, 12K10, 16S60

Чупраков Дмитрий Вячеславович, аспирант кафедры высшей математики, Вятский государственный гуманитарный университет, 610002, Россия, г. Киров, ул. Красноармейская, 26 (корп. 1), Кафедра высшей математики, E-mail: chupdiv@yandex.ru