УДК 517.987.1

© *А. Г. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ[1]

Рассматривается оператор, сопоставляющий мере, определенной на алгебре множеств, ее продолжение на σ-алгебру, порожденную данной алгеброй. На основе представления продолженной меры в терминах минимакса устанавливается, что упомянутый оператор является изометрическим изоморфизмом при использовании традиционных способов нормирования пространств, элементами которых являются меры. Устанавливаются некоторые свойства, связанные с сохранением порядковых соотношений при действии оператора продолжения.

Ключевые слова: алгебра множеств, мера, продолжение меры, изометрический изоморфизм.

Введение

Операция лебеговского продолжения является одной из важнейших конструкций современной теории меры. Она подробно излагается в целом ряде монографий (см., например, [1; 2; 3]). В связи с этим отметим сейчас особо схему [2, § I.5], применяемую (в [2]) для целей продолжения вероятности, но допускающую очевидный перенос на случай продолжения любой счетно-аддитивной (с.-а.) неотрицательной меры. Эта схема существенно используется в дальнейшем.

Возможны, однако, и продолжения мер на более обширные (в сравнении с традиционным случаем лебеговского продолжения) σ-алгебры множеств; см., например, [3, с. 85]. Если меру нельзя продолжить на σ-алгебру всех подмножеств (п/м) «единицы» (исходного пространства), то у меры нет максимального с.-а. продолжения (см. [3, с. 85]). К этому можно добавить свойства, отмеченные в [4, с. 94–102] и касающиеся, в частности, продолжения бэровских мер. В связи с этим возникает естественный вопрос о том, чем же выделяется процедура лебеговского продолжения среди других возможных процедур такого рода. В настоящей работе, являющейся продолжением [5; 6; 7], делается попытка в какой-то мере ответить на этот вопрос. Она связана с рассмотрением оператора, переводящего исходные меры на алгебре множеств в их с.-а. продолжения на σ-алгебру, порожденную исходной алгеброй. Оказывается, что с точки зрения многих естественных свойств две вышеупомянутые меры оказываются отождествимыми, а сам оператор продолжения является изометрическим изоморфизмом. В основе данного подхода находится модификация процедуры [2, § I.5], связанная с представлением значений продолженной меры в виде некоторого «минимакса» (экстремумы в операциях минимума и максимума могут не достигаться). Это представление было использовано в [5; 6] (автору неизвестны более ранние публикации, его содержащие) для описания продолжений знакопеременных ограниченных мер на алгебре множеств. С этой точки зрения процедура лебеговского продолжения выделяется особенностью: здесь продолженная мера оказывается расширенной «копией» исходной, ее дубликатом. Это позволяет получать некоторые свойства продолженных мер на основе соответствующих свойств исходных мер (в [5] приведено, в частности, представление лебеговского продолжения суммы ряда мер, определенных на исходной алгебре множеств).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06–01–00414, 08-08-00981а).

§ 1. Основные обозначения и определения

В дальнейшем используем кванторы и пропозициональные связки; def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Принимаем аксиому выбора. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x. Если же x и y — произвольные объекты, то $\{x;y\} \triangleq \{x\} \cup \{y\}$ есть неупорядоченная пара (двоеточие), соответствующая упомянутым объектам. Семейством называем множество, все элементы которого — множества; если $\mathcal{U}$ — семейство, а V — множество, то $[\mathcal{U}](V) \triangleq \{U \in \mathcal{U} \mid V \subset U\}$ (семейство всех множеств из $\mathcal{U}$, содержащих V). Через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества H; $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех функций, действующих из A в B. Если же A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то:

1) $(f|C) \in B^C$ есть определяемое обычным образом сужение f на C, для которого $(f|C)(x) = f(x)\ \forall\, x \in C$;

2) $f^1(C) \triangleq \{f(x) :\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ C при действии f).

Для произвольных множеств X и Y $(\mathrm{bi})[X;Y]$ есть def множество всех биекций X на Y.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ (натуральный ряд); если $k \in \mathbb{N}$, то $\overline{1,k} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant k\}$ и $\overrightarrow{k,\infty} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid k \leqslant i\}$. Полагаем далее, что элементы $\mathbb{R}$ (вещественные и, в частности, натуральные числа) не являются множествами; тогда для всяких множества A и числа $k \in \mathbb{N}$ $A^k \triangleq A^{\overline{1,k}}$ есть множество всех кортежей $(a_i)_{i\in\overline{1,k}} :\ \overline{1,k} \longrightarrow A$ (здесь и ниже используем индексную форму записи функций). Линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно; используем $\overset{\leq}{=}$ для обозначения поточечного порядка в пространстве в/з функций с общей областью определения. Напомним, что $\mathbb{R}^A$, где A — множество, есть множество всех в/з функций на A. Последовательности (функции на $\mathbb{N}$) обычно записываются в индексной форме, как и кортежи конечной длины.

Если (X,τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание A в (X,τ); через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную топологию $\mathbb{R}$, порожденную метрикой-модулем.

Если S — непустое множество, то через $\mathbb{B}(S)$ обозначаем множество всех ограниченных в/з функций на S (то есть множество всех ограниченных функций из $\mathbb{R}^S$); $\mathcal{O}_S \in \mathbb{B}(S)$ есть def в/з функция на S, для которой

$$\mathcal{O}_S(x) \triangleq 0\ \ \forall\, x \in S.$$

Кроме того, через $\|\cdot\|_S$ обозначаем обычную sup-норму $\mathbb{B}(S)$ (см. [1, с. 261]); при этом $\|f\|_S \triangleq \sup(\{|f(x)| :\ x \in S\})\ \ \forall\, f \in \mathbb{B}(S)$. Сходимость в $(\mathbb{B}(S), \|\cdot\|_S)$ тождественна равномерной.

§ 2. Простейшие свойства мер

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E. Пусть

$$\pi[E] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid (\varnothing \in \mathcal{L})\ \&\ (E \in \mathcal{L})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{L}\ \ \forall\, A \in \mathcal{L}\, \forall\, B \in \mathcal{L})\}. \tag{2.1}$$

Через $(\mathrm{alg})[E]$ (через $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$) обозначаем множество всех алгебр (всех σ-алгебр) п/м множества E; $(\sigma - \mathrm{alg})[E] \subset (\mathrm{alg})[E]$,

$$(\mathrm{alg})[E] = \{\mathcal{L} \in \pi[E] \mid E \setminus L \in \mathcal{L}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}\}.$$

Если $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma^0_E(\mathcal{S})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathcal{S}$ (см. [2, с. 31]): при

$$(\sigma - \mathrm{alg})[E|\mathcal{S}] \triangleq \{\mathcal{H} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E] \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{H}\}$$

$\sigma_E^0(\mathcal{S})$ есть пересечение всех σ-алгебр $\mathcal{F} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E|\mathcal{S}]$; $(\sigma - \mathrm{alg})[E\,|\,\mathcal{S}] \neq \varnothing$. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i : (E_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}\}$$

(семейство всех счетных объединений множеств из $\mathcal{E}$). Если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $H \in \mathcal{P}(E)$, то полагаем, что:

$$1)\ \Delta_m(H,\mathcal{H}) \stackrel{\triangle}{=} \{(H_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{H}^m \mid (H = \bigcup_{i=1}^m H_i)\ \&$$
$$\&\ (\ H_p \cap H_q = \varnothing\ \ \forall\, p \in \overline{1,m}\ \ \forall\, q \in \overline{1,m} \setminus \{p\})\}\ \ \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$2)\ \Delta_\infty[H;\mathcal{H}] \stackrel{\triangle}{=} \{\ (H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}\ \mid (H = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i)\ \&$$
$$\&\ (\ H_p \cap H_q = \varnothing\ \ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \ \forall\, q \in \mathbb{N} \setminus \{p\})\};$$

введены множества конечных и счетных разбиений H множествами из $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то

$$(\mathrm{add})[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}\ \mid \mu(L) = \sum_{i=1}^k \mu(L_i)\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \forall\,(L_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \Delta_k(L,\mathcal{L})\},$$

$$(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})[\mathcal{L}] \mid \mathcal{O}_{\mathcal{L}} \stackrel{\leq}{=} \mu\};$$

через $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ таких, что

$$\big(\sum_{i=1}^m \mu(L_i)\big)_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mu(L)\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}\ \ \forall\,(L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Delta_\infty[L;\mathcal{L}]$$

(множество знакопеременных с.-а. мер на $\mathcal{L}$);

$$(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \mid \mathcal{O}_{\mathcal{L}} \stackrel{\leq}{=} \mu\} \subset (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}],$$
$$\mathbb{P}_\sigma(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1\},$$
$$\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{P}_\sigma(\mathcal{L}) \mid \forall\, L \in \mathcal{L}\ \ (\mu(L) = 0)\ \vee\ (\mu(L) = 1)\}.$$

Если $x \in E$, то, как обычно, $\delta_x \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{P}(E))$ определяем условием: при $S \in \mathcal{P}(E)$ $\delta_x(S) \stackrel{\triangle}{=} 1$, если $x \in S$, и $\delta_x(S) \stackrel{\triangle}{=} 0$ в противном случае. Введены меры Дирака; потребуются также их сужения. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то совокупность сужений

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{(\delta_x|\mathcal{L}) :\ x \in E\} \tag{2.2}$$

назовем $\mathcal{L}$-множеством Дирака. Если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то $(\mathrm{add})[\mathcal{L}]$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ таких, что $\forall\, A \in \mathcal{L}\ \ \forall\, B \in \mathcal{L}$

$$(A \cap B = \varnothing) \Longrightarrow (\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)).$$

Если $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ и $A \in \mathcal{P}(E)$, то $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \uparrow A$ означает, что

$$(A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)\ \&\ (A_j \subset A_{j+1}\ \ \forall\, j \in \mathbb{N}).$$

Отметим известное свойство с.-а. мер (см. [2, гл. I]): $\forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]\ \ \forall\,(L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}$

$$((L_i)_{i\in\mathbb{N}} \uparrow L) \Longrightarrow ((\mu(L_i))_{i\in\mathbb{N}} \uparrow \mu(L)\ \ \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]) \tag{2.3}$$

(здесь и ниже условие в правой части (2.3) означает монотонную сходимость в/з последовательности; имеется в виду, что данная последовательность сходится и является неубывающей). Пусть

$$\Pi[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[E] \mid \forall\, L \in \mathcal{L} \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} : \; \Delta_n(E \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\}$$

(множество всех полуалгебр п/м E). Разумеется,

$$(\sigma - \mathrm{alg})[E] \subset (\mathrm{alg})[E] \subset \Pi[E] \subset \pi[E] \subset \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).$$

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\mathfrak{N}_\mu \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \mu(L) = 0\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$; кроме того, $\mathfrak{N}^*_\mu \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, L \in \mathfrak{N}_\mu : \; H \subset L\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$.

§ 3. Продолжение мер: сводка понятий и элементы конструкций

Сначала напомним совсем кратко схему продолжения [2, § I.5] с некоторыми дополнениями, ориентированными на получение «минимаксного» представления продолжения меры; это представление используется ниже при исследовании оператора продолжения. Если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то

$$\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) = \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}} : \; (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \uparrow H\}, \tag{3.1}$$

$\mathcal{L} \subset \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$; если, кроме того, $S \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S) = \{L \in \mathcal{L} \mid L \subset S\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$$

и при $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ множество-образ $\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S))$ непусто и ограничено,

$$\sup_{L \in \mathcal{L}\cap\mathcal{P}(S)} \mu(L) = \sup(\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S))) \in [0, \mu(E)].$$

Это свойство позволяет ввести следующую функцию множеств (ФМ): если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\mu_\uparrow$ определяем как отображение

$$H \longmapsto \sup_{L \in \mathcal{L}\cap\mathcal{P}(H)} \mu(L) : \; \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, \mu(E)]. \tag{3.2}$$

Из (3.2) вытекает при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, что

$$((\mu_\uparrow|\mathcal{L}) = \mu) \;\&\; (\forall\, A \in \mathcal{P}(E) \;\; \forall\, B \in \mathcal{P}(E) \;\; ((A \subset B) \Longrightarrow (\mu_\uparrow(A) \leqslant \mu_\uparrow(B)))); \tag{3.3}$$

полагаем $\mu^\uparrow \overset{\triangle}{=} (\mu_\uparrow|\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}))$, получая сужение ФМ (3.2) на непустое семейство $\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$, для которого

$$\mathcal{L} \subset \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{P}(E).$$

Имеем, в частности, что (см. (2.3)) $\forall\, H \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \;\; \forall\, (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}$

$$((L_i)_{i\in\mathbb{N}} \uparrow H) \Longrightarrow ((\mu(L_i))_{i\in\mathbb{N}} \uparrow \mu^\uparrow(H) \;\; \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]). \tag{3.4}$$

В (3.4) имеем представление, подобное [2, с. 39] и опирающееся на построение нужной ФМ посредством монотонных пределов. Введем множество $(\sigma \uparrow a)[E]$ всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ таких, что

$$(\varnothing \in \mathcal{H}) \;\&\; (E \in \mathcal{H}) \;\&\; (A \cap B \in \mathcal{H} \;\; \forall\, A \in \mathcal{H} \;\; \forall\, B \in \mathcal{H}) \;\&$$
$$\& \; (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \in \mathcal{H} \;\; \forall\, (H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}});$$

тогда, в частности, $\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$. Этот случай наиболее важен для нашего построения; однако рассмотрение $(\sigma \uparrow a)[E]$ с общих позиций также полезно. Ясно, что $A \cup B \in \mathcal{H} \quad \forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall A \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{H}$. Полагая, что

$$(\sigma \uparrow a)[E|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{H}\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)),$$

имеем, в частности, следующее свойство. Если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то

$$\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \in (\sigma \uparrow a)[E \mid \mathcal{L}] : \ \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H} \ \ \forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E \mid \mathcal{L}]; \tag{3.5}$$

с учетом (3.5) при $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ определена ФМ $(\mu^\uparrow|\mathcal{L})$ и при этом $(\mu^\uparrow|\mathcal{L}) = \mu$. Кроме того (см. [2, § I.5]), $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall A \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \quad \forall B \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$

$$\mu^\uparrow(A \cap B) + \mu^\uparrow(A \cup B) = \mu^\uparrow(A) + \mu^\uparrow(B) \tag{3.6}$$

(свойство, наследуемое от сильной аддитивности [2, с. 27] исходной меры μ). Еще одно естественное свойство, отмеченное в [2, § I.5], состоит в следующем: $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \quad \forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})^{\mathbb{N}} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E)$

$$((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow H) \Longrightarrow ((\mu_\uparrow(H_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \mu_\uparrow(H) \ \ \forall \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]). \tag{3.7}$$

В связи с (3.6), (3.7) см. предложение 1.5.1 в [2]. Возвращаясь к общей конструкции, напомним, что $\forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall A \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{H}$

$$(\ A \cap B \in \mathcal{H}) \ \& \ (\ A \cup B \in \mathcal{H}). \tag{3.8}$$

Из определений следует вложение $(\sigma \uparrow a)[E] \subset \pi[E]$, что позволяет рассматривать $(\mathrm{add})_+[\mathcal{H}]$ и $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{H}]$ при $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$; такие семейства $\mathcal{H}$ замкнуты, разумеется (см. (3.8)), относительно конечных объединений и пересечений (а также счетных объединений). Следуя идее [2, § I.5], определяем при $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ множество $(* - \mathrm{meas})[\mathcal{H}]$ всех неотрицательных в/з функций μ на $\mathcal{H}$, для каждой из которых

$$\begin{aligned}(\mu(\varnothing) = 0) \ \& \ (\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ \ \forall A \in \mathcal{H} \ \ \forall B \in \mathcal{H}) \ \& \\ \& \ (\forall A \in \mathcal{H} \ \ \forall B \in \mathcal{H} \ \ ((A \subset B) \Longrightarrow (\mu(A) \leqslant \mu(B)))) \ \& \\ \& \ (\forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} \ \ \forall H \in \mathcal{H} \ \ ((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow H) \Longrightarrow ((\mu(H_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \mu(H)))).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Легко видеть, что $\mu^\uparrow \in (* - \mathrm{meas})[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})] \quad \forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. В общем случае семейств из $(\sigma \uparrow a)[E]$ имеем важное положение:

$$(* - \mathrm{meas})[\mathcal{H}] \subset (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{H}] \quad \forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]. \tag{3.10}$$

Данное свойство счетной аддитивности (см. (3.10)) легко следует из (3.9). Отметим одно полезное следствие (3.10): если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$\mu^\uparrow \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})] : \ (\mu^\uparrow|\mathcal{L}) = \mu.$$

При $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ и $S \in \mathcal{P}(E) \quad [\mathcal{H}](S) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H})$ и

$$\nu^1([\mathcal{H}](S)) \in \mathcal{P}'([0, \infty[) \quad \forall \nu \in (* - \mathrm{meas})[\mathcal{H}].$$

С учетом этого корректно следующее определение: если $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ и $\nu \in (* - \mathrm{meas})[\mathcal{H}]$, то полагаем, что в/з неотрицательная функция $\nu_\downarrow$ на $\mathcal{P}(E)$ есть def

$$S \longmapsto \inf(\nu^1([\mathcal{H}](S))) : \ \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, \infty[, \tag{3.11}$$

для ее значений используем традиционное соглашение:

$$\nu_\downarrow(T) = \inf_{H \in [\mathcal{H}](T)} \nu(H) = \inf(\nu^1([\mathcal{H}](T))) \quad \forall T \in \mathcal{P}(E); \tag{3.12}$$

если при этом $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mathcal{H} = \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$ и $\nu = \mu^\uparrow$, то ФМ (3.11) обозначаем через $\mu^\uparrow_\downarrow$ (итак, $\mu^\uparrow_\downarrow$ есть ФМ $\nu_\downarrow$ при условии $\nu = \mu^\uparrow$). В последнем случае значение ФМ $\mu^\uparrow_\downarrow$ определяется посредством (3.12) при вышеупомянутой конкретизации $\mathcal{H}$ и ν. Легко видеть, что при $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ и $\nu \in (*-\mathrm{meas})[\mathcal{H}]$ справедливо равенство $(\nu_\downarrow|\mathcal{H}) = \nu$; кроме того, имеем следующие свойства, проверяемые по аналогии с [2, § I.5]:

1) $\nu_\downarrow(A \cup B) + \nu_\downarrow(A \cap B) \leqslant \nu_\downarrow(A) + \nu_\downarrow(B) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(E) \quad \forall\, B \in \mathcal{P}(E)$;

2) $\forall\,(S_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}} \quad \forall\, S \in \mathcal{P}(E)$

$$((S_i)_{i\in\mathbb{N}} \uparrow S) \Longrightarrow ((\nu_\downarrow(S_i))_{i\in\mathbb{N}} \uparrow \nu_\downarrow(S));$$

3) $\mathfrak{F}_\nu \overset{\triangle}{=} \{T \in \mathcal{P}(E) \mid \nu_\downarrow(T) + \nu_\downarrow(E \setminus T) = \nu(E)\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$.

Отметим, наконец, свойство: $\forall\, \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall\, \nu \in (* - \mathrm{meas})[\mathcal{H}]$

$$\nu^\downarrow \overset{\triangle}{=} (\nu_\downarrow|\mathfrak{F}_\nu) \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathfrak{F}_\nu]. \tag{3.13}$$

По аналогии с [2, § I.5] имеем свойство полноты пространства с мерой $(E, \mathfrak{F}_\nu, \nu^\downarrow)$ при $\nu \in (* - \mathrm{meas})[\mathcal{H}]$, где $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$: при $\eta = \nu^\downarrow$ непременно $\mathfrak{N}^*_\eta \subset \mathfrak{F}_\nu$.

Из этих общих положений извлекаем свойства: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то ФМ $\mu^\uparrow \in (* - \mathrm{meas})[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})]$ реализует σ-алгебру

$$\mathfrak{F}^*_\mu \overset{\triangle}{=} \mathfrak{F}_{\mu^\uparrow} = \{T \in \mathcal{P}(E) \mid \mu^\uparrow_\downarrow(T) + \mu^\uparrow_\downarrow(E \setminus T) = \mu(E)\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E], \tag{3.14}$$

для которой $\mu^\downarrow_\uparrow \overset{\triangle}{=} (\mu^\uparrow_\downarrow|\mathfrak{F}^*_\mu) \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathfrak{F}^*_\mu]$; триплет

$$(E, \mathfrak{F}^*_\mu, \mu^\downarrow_\uparrow)$$

есть полное пространство с мерой, причем $\mu^\downarrow_\uparrow$ есть (см. (3.12)) отображение

$$F \longmapsto \inf_{H\in[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](F)} \ \sup_{L\in\mathcal{L}\cap\mathcal{P}(H)} \mu(L) : \ \mathfrak{F}^*_\mu \longrightarrow [0, \infty[. \tag{3.15}$$

В (3.15) имеем требуемое «минимаксное» представление, которое в [2] не рассматривалось. К этому следует добавить известные [2, § I.5] свойства: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}^*_\mu)$ и при этом $(\mu^\downarrow_\uparrow|\mathcal{L}) = \mu$ ($\mu^\downarrow_\uparrow$ есть с.-а. продолжение μ на σ-алгебру (3.14)); при $\eta = \mu^\downarrow_\uparrow$ имеем вложение

$$\eta^1(\mathfrak{F}^*_\mu) \subset \mathrm{cl}(\mu^1(\mathcal{L}), \tau_{\mathbb{R}}),$$

а при условии замкнутости $\mu^1(\mathcal{L})$ в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ — равенство

$$\eta^1(\mathfrak{F}^*_\mu) = \mu^1(\mathcal{L}) \tag{3.16}$$

(разумеется, (3.16) справедливо при $\mu^1(\mathcal{L}) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{R})$, то есть в случае, когда $\mu^1(\mathcal{L})$ — конечное множество). Отметим, что при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$

$$\mu^\downarrow_\uparrow \in \mathbb{P}_\sigma(\mathfrak{F}^*_\mu) \quad \forall\, \mu \in \mathbb{P}_\sigma(\mathcal{L});$$

кроме того, с учетом (3.16) получаем очевидное следствие:

$$\mu^\downarrow_\uparrow \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{F}^*_\mu) \quad \forall\, \mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}). \tag{3.17}$$

Предложение 1. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ *и* $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, *то* $\mu^\downarrow_\uparrow$ *есть недираковская с.-а. (0,1)-мера:* $\mu^\downarrow_\uparrow \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{F}^*_\mu) \setminus \mathbb{D}(\mathfrak{F}^*_\mu)$.

Для доказательства достаточно (см. (3.17)) показать, что $\mu_{\uparrow}^{\downarrow} \notin \mathbb{D}(\mathfrak{F}_{\mu}^{*})$. Пусть $x \in E$. Поскольку $\mu \notin \mathbb{D}(\mathcal{L})$, имеем $\mu \neq (\delta_x|\mathcal{L})$, то есть для некоторого $\Lambda \in \mathcal{L}$ $\mu(\Lambda) \neq \delta_x(\Lambda)$. Поскольку $\mathcal{L} \subset \mathfrak{F}_{\mu}^{*}$, то $\Lambda \in \mathfrak{F}_{\mu}^{*}$. Поэтому $(\delta_x|\mathfrak{F}_{\mu}^{*})(\Lambda) \neq \mu(\Lambda) = \mu_{\uparrow}^{\downarrow}(\Lambda)$. Тогда

$$\mu_{\uparrow}^{\downarrow} \neq (\delta_x|\mathfrak{F}_{\mu}^{*}).$$

Поскольку выбор x был произвольным, из (2.2) имеем, что $\mu_{\uparrow}^{\downarrow} \notin \mathbb{D}(\mathfrak{F}_{\mu}^{*})$. □

Далее рассматриваются продолжения мер на естественное универсальное семейство п/м E; в качестве такового используется σ-алгебра, порожденная алгеброй множеств. При этом

$$\sigma_E^0(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mu}^{*}) \quad \forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \;\; \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]. \tag{3.18}$$

С учетом (3.18) каждая мера (3.15) сужается на σ-алгебру п/м E, порожденную исходной алгеброй множеств: $\forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $\;\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$

$$\lambda^0[\mu] \stackrel{\triangle}{=} (\mu_{\uparrow}^{\downarrow}|\, \sigma_E^0(\mathcal{L})) \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]. \tag{3.19}$$

Из (3.15), (3.18) и (3.19) следует свойство: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\lambda^0[\mu]$ есть ФМ

$$\Lambda \longmapsto \inf_{H \in [\{\cup_1^{\infty}\}(\mathcal{L})](\Lambda)} \; \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : \; \sigma_E^0(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[. \tag{3.20}$$

Теперь при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ мы в виде правила

$$\mu \longmapsto \lambda^0[\mu] : \; (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \longrightarrow (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \tag{3.21}$$

имеем оператор продолжения меры, определенный в конусе неотрицательных мер на $\mathcal{L}$.

Замечание 1. Переходя к сужениям вида (3.19), мы получаем универсальное пространство продолжений исходных мер на $\mathcal{L}$. В качестве исходного выступает конус $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением продолжений на $\sigma_E^0(\mathcal{L})$, хотя можно было бы использовать в аналогичных целях (то есть вместо $\sigma_E^0(\mathcal{L})$) σ-алгебру абсолютно измеримых [2, с. 37] п/м E.

В связи с (3.19)–(3.21) напомним, что $\forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $\;\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\mu = (\lambda^0[\mu]|\mathcal{L})) \;\&\; (\forall\, \nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \;\; ((\mu = (\nu|\mathcal{L})) \Longrightarrow (\nu = \lambda^0[\mu]))). \tag{3.22}$$

В (3.22) имеем хорошо известное (см. [1; 2; 3]) свойство существования и единственности (лебеговского) продолжения неотрицательной с.-а. меры; в (3.20) дано «минимаксное» представление продолженной меры. Отметим одно очевидное следствие предложения 1: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, то

$$\lambda^0[\mu] \in \mathbb{T}_{\sigma}(\sigma_E^0(\mathcal{L})) \setminus \mathbb{D}(\sigma_E^0(\mathcal{L})). \tag{3.23}$$

Свойство (3.23) использовалось в [8, с. 245] и [9, с. 195] при исследовании структуры недираковских с.-а. (0,1)-мер.

Заметим, что при $\mathcal{L} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, $\mu_1 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mu_2 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{B}(\mathcal{L})) \;\&\; (\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2] \in \mathbb{B}(\sigma_E^0(\mathcal{L}))),$$

а потому (см. § 1) определены следующие два значения sup-норм:

$$(\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{L}} \in [0, \infty[) \;\&\; (\|\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2]\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})} \in [0, \infty[).$$

Предложение 2. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu_1 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ *и* $\mu_2 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, *то*

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{L}} = \|\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2]\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}.$$

Доказательство легко извлекается из представления (3.20). Из предложения 2 видно, что оператор (3.21) изометричен в конусе $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Этот факт (см. также [5; 6]) играет важную роль: мы распространяем данное свойство на линейное пространство ограниченных с.-а. мер.

§ 4. Продолжение ограниченных знакопеременных мер

В настоящем разделе оператор (3.20), (3.21) распространяется на (линейное) пространство $(\sigma-\mathrm{add})[\mathcal{L}]\cap\mathbb{B}(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$. Однако сначала напомним некоторые известные свойства с.-а. мер (см., в частности, [1; 2; 3; 4]).

Возвращаясь к (2.1), условимся о соглашении: если $\mathcal{L}\in\pi[E]$, $\mu\in\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ и $L\in\mathcal{L}$, то

$$(\mathrm{VAR})_L[\mu]\stackrel{\triangle}{=}\{t\in[0,\infty[\mid \exists\, m\in\mathcal{N}\ \exists\,(L_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\Delta_m(L,\mathcal{L}):\ t=\sum_{i=1}^{m}|\mu(L_i)|\};\tag{4.1}$$

получили непустое п/м $[0,\infty[$. В (4.1) можно, в частности, полагать $L=E$. Тогда

$$\mathbb{A}(\mathcal{L})\stackrel{\triangle}{=}\{\mu\in(\mathrm{add})[\mathcal{L}]\ \mid\ \exists\, c\in[0,\infty[:\ (\mathrm{VAR})_E[\mu]\subset[0,c]\}\ \ \forall\,\mathcal{L}\in\pi[E].$$

Тем самым в общем случае ИП $(E,\mathcal{L})$, $\mathcal{L}\in\pi[E]$, введено (линейное) пространство в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}\in\pi[E]$, $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]\subset\mathbb{A}(\mathcal{L})$; если $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$V_\mu\stackrel{\triangle}{=}\sup\bigl((\mathrm{VAR})_E[\mu]\bigr)\in[0,\infty[$$

есть полная вариация μ ($V_\mu=\mu(E)$ при $\mu\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$). Если $\mathcal{L}\in\Pi[E]$, то

$$\mu\longmapsto V_\mu:\ \mathbb{A}(\mathcal{L})\longrightarrow[0,\infty[$$

есть (сильная) норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, обозначаемая в дальнейшем через $\|\cdot\|^{(\mathbf{v})}_{\mathcal{L}}$; итак, $\|\nu\|^{(\mathbf{v})}_{\mathcal{L}}=V_\nu$ $\forall\,\nu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Определяем вариацию как ФМ: если $\mathcal{L}\in\Pi[E]$ и $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$\mathbf{v}_\mu:\ \mathcal{L}\longrightarrow[0,V_\mu]$$

определяем обычным правилом: $\mathbf{v}_\mu(L)\stackrel{\triangle}{=}\sup((\mathrm{VAR})_L[\mu])$ $\forall\,L\in\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}\in\Pi[E]$, то $\mathbb{A}(\mathcal{L})\subset(\mathrm{add})[\mathcal{L}]\cap\mathbb{B}(\mathcal{L})$. Кроме того,

$$\mathbb{A}(\mathcal{L})=(\mathrm{add})[\mathcal{L}]\cap\mathbb{B}(\mathcal{L})\quad\forall\,\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E].\tag{4.2}$$

Отметим простое свойство: если $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$ и $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$, то (см. (4.2))

$$\|\mu\|_{\mathcal{L}}\leqslant\|\mu\|^{(\mathbf{v})}_{\mathcal{L}}\leqslant 2\|\mu\|_{\mathcal{L}}.$$

Напомним, что $\mathbf{v}_\mu\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ $\forall\,\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$ $\forall\,\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Подобное свойство справедливо и в случае ИП с полуалгеброй множеств (см. [10, с. 102]), но ограничимся вышеупомянутой версией. Как следствие, $\forall\,\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$ $\forall\,\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$\Bigl(\mu^+\stackrel{\triangle}{=}\frac{1}{2}(\mathbf{v}_\mu+\mu)\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]\Bigr)\ \&\ \Bigl(\mu^-\stackrel{\triangle}{=}\frac{1}{2}(\mathbf{v}_\mu-\mu)\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]\Bigr)\tag{4.3}$$

(из определений следует, что $|\mu(L)|\in(\mathrm{VAR})_L[\mu]$ при $L\in\mathcal{L}$). При $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$, $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $L\in\mathcal{L}$ множество-образ $\mu^1(\mathcal{L}\cap\mathcal{P}(L))$ обладает свойством

$$\mu^1(\mathcal{L}\cap\mathcal{P}(L))\in\mathcal{P}'([-\|\mu\|_{\mathcal{L}},\|\mu\|_{\mathcal{L}}]),$$

что позволяет определить точную верхнюю грань $\sup(\mu^1(\mathcal{L}\cap\mathcal{P}(L)))\in[0,\infty[$. При этом [1, с. 113]

$$\mu^+(L)=\sup(\mu^1(\mathcal{L}\cap\mathcal{P}(L)))\quad\forall\,\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]\ \ \forall\,\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})\ \ \forall\,L\in\mathcal{L}.\tag{4.4}$$

В связи с (4.3), (4.4) отметим важное порядковое свойство: если $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]$, $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\nu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$, то к.-а. мера

$$\mu\vee\nu\stackrel{\triangle}{=}\mu+(\nu-\mu)^+\in\mathbb{A}(\mathcal{L})\tag{4.5}$$

является точной верхней гранью двоеточия $\{\mu;\nu\}$:

$$(\mu \leqq \mu \vee \nu) \ \&\ (\nu \leqq \mu \vee \nu) \ \&\ (\forall\, \eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \ \ ((\mu \leqq \eta) \ \&\ (\nu \leqq \eta)) \Longrightarrow (\mu \vee \nu \leqq \eta)). \tag{4.6}$$

Свойство (4.6) хорошо известно (см., например, [11, гл. XII]). Заметим, в частности, что при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ к.-а. мера μ^+ (4.3) является точной вехней гранью двоеточия $\{\mu; \mathcal{O}_{\mathcal{L}}\}$. Это следует из (4.6), поскольку $\{\mu;\nu\} = \{\nu;\mu\}$ и (как следствие) $\mu \vee \nu = \nu \vee \mu$. Отметим здесь же известное [1; 2; 3] свойство: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$\mu \wedge \nu \overset{\triangle}{=} \mu - (\mu - \nu)^+ \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$$

есть точная нижняя грань грань двоеточия $\{\mu;\nu\}$, то есть $\mu \wedge \nu \leqq \mu$, $\mu \wedge \nu \leqq \nu$ и, наконец, $\forall\, \xi \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$((\xi \leqq \mu) \ \&\ (\xi \leqq \nu)) \Longrightarrow (\xi \leqq \mu \wedge \nu);$$

если при этом $\eta = (-\mu) \vee (-\nu)$, то

$$\mu \wedge \nu = -\eta. \tag{4.7}$$

Свойство (4.7) позволяет ограничиться в последующих построениях рассмотрением точных верхних граней (4.5).

Отметим, что в силу (4.2) при всяком выборе $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ является линейным подпространством $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; поэтому, в частности, при $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ определены к.-а. меры $\mathbf{v}_\mu$, μ^+ и μ^-; см. (4.3). Более того, хорошо известно [1, гл. III], что

$$\mathbf{v}_\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \ \ \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \tag{4.8}$$

Из (4.8) получаем очевидные следствия, связанные с (4.3): если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$(\mu^+ \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]) \ \&\ (\mu^- \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]) \tag{4.9}$$

реализуют стандартное разложение Жордана:

$$(\mu = \mu^+ - \mu^-) \ \&\ (\mathbf{v}_\mu = \mu^+ + \mu^-). \tag{4.10}$$

Из (4.9), (4.10) следует, в свою очередь, что

$$\begin{gathered}\mu \vee \nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \\ \forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \quad \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \quad \forall\, \nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}).\end{gathered} \tag{4.11}$$

Кроме того, имеем свойство (см. (4.7)): если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $\nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$\mu \wedge \nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \tag{4.12}$$

Возвращаясь к (3.19), отметим с учетом (4.9), (4.10) важное свойство: $\forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$\lambda_0[\mu] \overset{\triangle}{=} \lambda^0[\mu^+] - \lambda^0[\mu^-] \in (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \tag{4.13}$$

(используем (3.19) и линейность пространства $(\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$). При этом согласно (3.22), (4.10) и (4.13) имеем $\forall\, \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$(\lambda_0[\mu] | \mathcal{L}) = (\lambda^0[\mu^+] | \mathcal{L}) - (\lambda^0[\mu^-] | \mathcal{L}) = \mu^+ - \mu^- = \mu. \tag{4.14}$$

Итак (см. (4.13), (4.14)), имеем (известную [1, гл. III]) процедуру продолжения ограниченной с.-а. меры. Условимся о следующем соглашении: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}} \overset{\triangle}{=} (\lambda_0[\mu])_{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})}; \tag{4.15}$$

итак, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}: \ (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \longrightarrow (\sigma - \mathrm{add})[\sigma^0_E(\mathcal{L})]$ определяется правилом:

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) = \lambda_0[\mu] = \lambda^0[\mu^+] - \lambda^0[\mu^-]. \tag{4.16}$$

С учетом (4.14) и (4.16) получаем свойство: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) |\, \mathcal{L}) = \mu;$$

итак, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)$ есть с.-а. продолжение μ на σ-алгебру $\sigma^0_E(\mathcal{L})$. Отметим теперь известное свойство ограниченности в/з с.-а. меры на σ-алгебре множеств (данное свойство связано с разложением Хана; см. [3, с. 208]): если $\mathcal{F} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, то $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{F}] \subset \mathbb{B}(\mathcal{F})$ и, как следствие,

$$(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{F}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{F}); \tag{4.17}$$

в частности, (4.17) можно использовать при $\mathcal{F} = \sigma^0_E(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$. В связи с (4.17) отметим, что при $\mathcal{F} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{F}]$ определены значения

$$(\|\mu\|_{\mathcal{F}} \in [0, \infty[) \ \& \ (\|\mu\|^{(\mathbf{v})}_{\mathcal{F}} \in [0, \infty[).$$

Последние также потребуются при $\mathcal{F} = \sigma^0_E(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$; сейчас отметим только, что $(\sigma - \mathrm{add})[\sigma^0_E(\mathcal{L})]$ есть линейное подпространство $\mathbb{A}(\sigma^0_E(\mathcal{L}))$.

Напомним (см. [1, 11]) также, что $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \ \ \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$\mathbf{v}_\mu = \mathbf{v}_{-\mu} = \mu \vee (-\mu). \tag{4.18}$$

Из (4.18) имеем при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ равенство $\mu^- = (-\mu)^+$; см. (4.3). Эти свойства дополняются простыми следствиями определений: $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \ \ \forall \alpha \in [0, \infty[\ \ \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$(\mathbf{v}_{\alpha\mu} = \alpha \mathbf{v}_\mu) \ \& \ ((\alpha\mu)^+ = \alpha\mu^+) \ \& \ ((\alpha\mu)^- = \alpha\mu^-). \tag{4.19}$$

Кроме того, имеем $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] \ \ \forall \alpha \in]-\infty, 0[\ \ \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$(\mathbf{v}_{\alpha\mu} = |\alpha| \mathbf{v}_\mu) \ \& \ \big((\alpha\mu)^+ = |\alpha|\mu^-\big) \ \& \ \big((\alpha\mu)^- = |\alpha|\mu^+\big). \tag{4.20}$$

Свойства (4.19), (4.20) полезно дополнить «игровыми» представлениями, подобными (3.20), но касающимися продолжений знакопеременных мер. Заметим сначала, что (см. (4.2)) при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $H \in \mathcal{P}(E)$

$$\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)) \in \mathcal{P}'([-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]), \tag{4.21}$$

поэтому определена (конечная) точная верхняя грань множества в левой части (4.21):

$$\sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) = \sup(\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H))) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]. \tag{4.22}$$

Если же зафиксировать $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $S \in \sigma^0_E(\mathcal{L})$, то, согласно (4.22),

$$\{ \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : \ H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)\} \in \mathcal{P}'([-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}])$$

($[\mathcal{L}](S) \subset [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)$, причем $E \in [\mathcal{L}](S)$), что позволяет определить (конечную) точную нижнюю грань

$$\inf_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \ \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]. \tag{4.23}$$

Кроме того, в силу (4.21) определена при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $H \in \mathcal{P}(E)$ (конечная) точная нижняя грань множества в левой части (4.21):

$$\inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}].$$

Как следствие при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $S \in \mathcal{P}(E)$

$$\{\inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : \ H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)\} \in \mathcal{P}'([-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]);$$

это позволяет ввести точную верхнюю грань:

$$\sup_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \ \inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]. \tag{4.24}$$

Разумеется, значения (4.23) и (4.24) определены (см. (4.2)) при $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ *и* $S \in \sigma_E^0(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)(S) = \inf_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \ \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) + \sup_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \ \inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L). \tag{4.25}$$

Доказательство использует (3.20), (4.4), (4.16) и хорошо известные свойства операций inf и sup (см. [12, гл. 2]). В свою очередь, из теоремы 1 легко следует

Предложение 3. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ *и* $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, *то*

$$\|\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})} = \|\mu\|_{\mathcal{L}}.$$

Доказательство вытекает из (4.14), (4.16) и теоремы 1; учитываем при этом (в связи с (4.25)) очевидную оценку: если $a \in [0, \infty[$ и $b \in [0, \infty[$, то $|a - b| \leqslant \sup(\{a; b\})$.

С учетом теоремы 1 (см. (4.25)) получаем, что $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $\forall \alpha \in [0, \infty[$ $\forall \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\alpha\mu) = \lambda_0[\alpha\mu] = \alpha\lambda_0[\mu] = \alpha\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu). \tag{4.26}$$

Кроме того, с учетом соотношений, связывающих операции sup и inf (см. [12, с. 38]), легко устанавливается свойство: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то $\lambda_0[-\mu] = -\lambda_0[\mu]$. С учетом (4.26) имеем теперь

Предложение 4. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, *то справедливо равенство* $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\alpha\mu) = \alpha\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)$.

Если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$(\mu + \nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]) \ \& \ (\lambda^0[\mu] + \lambda^0[\nu] \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]).$$

Предложение 5. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ *и* $\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, *то* $\lambda^0[\mu + \nu] = \lambda^0[\mu] + \lambda^0[\nu]$.

Доказательство см. в [7, с. 294]. Как следствие получаем свойство: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mu_1 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, $\mu_2 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, $\nu_1 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu_2 \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$(\mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2) \Longrightarrow (\ \lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2] = \lambda^0[\nu_1] - \lambda^0[\nu_2]).$$

Кроме того (см. (3.22)), при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ для меры $(\mu|\mathcal{L}) \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ имеем очевидное свойство:

$$\mu = \lambda^0[(\mu|\mathcal{L})].$$

С учетом этого имеем (см. [7, с. 295]) $\forall \mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ $\forall \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ $\forall \nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$

$$(\mu = (\nu|\mathcal{L})) \Longrightarrow (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) = \nu) \tag{4.27}$$

(знакопеременный аналог свойства (3.22)). Теперь вполне очевидно свойство [7, с. 296]: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}} \in (\mathrm{bi})[(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L});\, (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]]$$

(свойство биективности). Из вышеупомянутых свойств оператора продолжения вытекает [7, с. 297] следующее положение: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ (4.15) есть линейный оператор. С учетом предложения 3 имеем (см. теорему 4.11.1 монографии [7]) следующее важное

Свойство изометрической изоморфности в смысле sup-норм: *если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, *то* $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ *есть изометрический изоморфизм* $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ *на* $(\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ *с нормами, определяемыми соответственно как*

$$(\|\cdot\|_{\mathcal{L}}|(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})), \quad (\|\cdot\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}|(\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]);$$

иными словами, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ *— изометрический изоморфизм относительно* sup *-норм пространств* $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ *и* $(\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ (в этой связи см. также [5, 6]).

§ 5. Изометрическая изоморфность оператора продолжения в смысле сильных норм

В настоящем разделе рассматриваем свойства оператора (4.15), связанные с другим способом нормирования пространств мер. Именно фиксируя в настоящем разделе алгебру $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, рассматриваем

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}), \quad (\mathbb{A}(\sigma_E^0(\mathcal{L})), \|\cdot\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}^{(\mathbf{v})});$$

соответственно рассматриваем

$$(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}), \quad (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \tag{5.1}$$

как подпространства упомянутых нормированных (на самом деле — банаховых) пространств. Упомянутые нормы именуем сильными, имея в виду положение [1, с. 280] (см. также [7, с. 152]). Нормы-сужения пространств (5.1), то есть

$$\big(\|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}|(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})\big), \quad \big(\|\cdot\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}^{(\mathbf{v})}|(\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]\big)$$

условимся также называть сильными, говоря таким образом об оснащении пространств (5.1) сильными нормами. Используем положения [7, § 4.11] и учитываем свойство (4.17). Поскольку $\mathcal{O}_{\sigma_E^0(\mathcal{L})} = \lambda^0[\mathcal{O}_{\mathcal{L}}] = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{\mathcal{L}})$ (см. (3.22), (4.27)), то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) = \lambda_0[\mu] = \lambda^0[\mu] \quad \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]. \tag{5.2}$$

С учетом (5.2) и свойства линейности $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ имеем (см. [7, с. 299, 300]): $\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ $\forall\, \nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$(\mu \leqq \nu) \Longrightarrow (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \leqq \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu)). \tag{5.3}$$

Стало быть, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ — линейная изотонная биекция пространств (5.1) (порядковый изоморфизм). Полезно иметь в виду следующее простое свойство

$$(\mu|\mathcal{L}) \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \quad \forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]. \tag{5.4}$$

С учетом (5.4) имеем [7, с. 301] практически очевидное положение: $\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ $\forall\, \nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$

$$(\mu \leqq (\nu|\mathcal{L})) \Longleftrightarrow (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \leqq \nu).$$

Как показано в [7, с. 302, 303], $\forall\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$((\lambda_0[\mu])^+ \leqq \lambda^0[\mu^+])\ \&\ ((\lambda_0[\mu])^- \leqq \lambda^0[\mu^-]). \tag{5.5}$$

В связи с (5.5) отметим с учетом (4.8), что при $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ определена мера $\lambda^0[\mathbf{v}_\mu] \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$. Более того, как показано в [7, с. 303, 304],

$$\mathbf{v}_{\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu)} = \mathbf{v}_{\lambda_0[\mu]} = \lambda^0[\mathbf{v}_\mu] \quad \forall \mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \tag{5.6}$$

В (5.6) речь идет о совпадении ФМ. Но, как следствие, имеем равенство значений этих ФМ в «точке» E, то есть совпадение полных вариаций (см. [7, с. 304]). Итак, имеем

Свойство изометричности в смысле сильных норм: *если* $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, *то*

$$\|\mu\|_\mathcal{L}^{(\mathbf{v})} = V_\mu = \mathbf{v}_\mu(E) = \lambda^0[\mathbf{v}_\mu](E) = \mathbf{v}_{\lambda_0[\mu]}(E) = \mathbf{v}_{\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu)}(E) = V_{\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu)} = \|\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu)\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}^{(\mathbf{v})}. \tag{5.7}$$

С учетом (5.7) и ранее установленных свойств $\mathfrak{C}_\mathcal{L}$ получаем теорему 11.2 монографии [7], доставляющую следующее

Свойство изометрической изоморфности в классе сильных норм: *оператор* $\mathfrak{C}_\mathcal{L}$ *есть изометрический изоморфизм пространств* (5.1) *в оснащении сильными нормами* (см. также [5, 6]).

Предложение 6. *Если* $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu))^+ = (\lambda_0[\mu])^+ = \lambda^0[\mu^+].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (4.3) имеем по свойству линейности $\mathfrak{C}_\mathcal{L}$, что

$$(\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu))^+ = (\lambda_0[\mu])^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\lambda_0[\mu]} + \lambda_0[\mu]) = \frac{1}{2}(\lambda^0[\mathbf{v}_\mu] + \lambda_0[\mu]). \tag{5.8}$$

С учетом (4.3), (4.8) и (5.2) имеем, однако, из (5.8) цепочку равенств

$$(\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu))^+ = \frac{1}{2}(\lambda_0[\mathbf{v}_\mu] + \lambda_0[\mu]) = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mathbf{v}_\mu) + \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu)) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\frac{1}{2}(\mathbf{v}_\mu + \mu)) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu^+) = \lambda_0[\mu^+] = \lambda^0[\mu^+].$$

□

Отметим с учетом (4.2), (4.11) и (4.17), что при $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $\nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ определены меры

$$(\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu \vee \nu) = \lambda_0[\mu \vee \nu] \in (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]) \,\&\, (\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) \vee \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu) \in (\sigma - \mathrm{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]).$$

Теорема 2. *Если* $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ *и* $\nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu \vee \nu) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) \vee \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.5), (4.9) и линейности $\mathfrak{C}_\mathcal{L}$ получаем равенство

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu \vee \nu) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) + \mathfrak{C}_\mathcal{L}((\nu - \mu)^+), \tag{5.9}$$

где $(\nu - \mu)^+ \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Согласно (5.2) и предложению 6

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}((\nu - \mu)^+) = \lambda^0[(\nu - \mu)^+] = (\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu - \mu))^+ = (\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu) - \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu))^+ \tag{5.10}$$

(учитываем также свойство линейности $\mathfrak{C}_\mathcal{L}$). Из (4.5), (5.9) и (5.10) вытекает, что

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu \vee \nu) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) + (\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu) - \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu))^+ = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) \vee \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu).$$ □

Следствие 1. *Если* $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ *и* $\nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu \wedge \nu) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) \wedge \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu). \tag{5.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.7) и теоремы 2 имеем, что

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu \wedge \nu) = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(-\eta), \tag{5.12}$$

где $\eta = (-\mu) \vee (-\nu)$, причем $\mathfrak{C}_\mathcal{L}(-\eta) = -\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\eta) = -\gamma$, где $\gamma = \mathfrak{C}_\mathcal{L}(-\mu) \vee \mathfrak{C}_\mathcal{L}(-\nu)$. Вновь используя (4.7), получаем, что

$$\mathfrak{C}_\mathcal{L}(\mu) \wedge \mathfrak{C}_\mathcal{L}(\nu) = (-\mathfrak{C}_\mathcal{L}(-\mu)) \wedge (-\mathfrak{C}_\mathcal{L}(-\nu)) = -\gamma. \tag{5.13}$$

Комбинируя (5.12) и (5.13), получаем (5.11). □

Теорема 2 и следствие 1 характеризуют $\mathfrak{C}_\mathcal{L}$ как решеточный изоморфизм.

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. — 895 с.
2. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
3. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. — 543 с.
4. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 2. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. — 575 с.
5. Ченцов А. Г. К вопросу о продолжении меры // Методы негладкой оптимизации и задачи управления: сб. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. — С. 126–134.
6. Ченцов А. Г. О задаче продолжения меры / АН СССР. УНЦ. ИММ. Свердловск, 1983. — 81 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.06.83, № 3504-83.
7. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. — 388 с.
8. Ченцов А. Г. Об одном классе недираковских счетно-аддитивных мер // Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения (специальный выпуск): сб. Пермь: ПГТУ. 2002. — С. 238–252.
9. Ченцов А. Г. Недираковские (0,1)-меры и σ-топологические пространства // Вестник Челябинского университета. — 2003. — № 2(8). — С. 190–202.
10. Ченцов А. Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1985. — 128 с.
11. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. — 430 с.

Поступила в редакцию 01.08.09

A. G. Chentsov

Some properties of the operator of the measure extension

The operator defining for a measure on algebra of sets, the extension on the σ-algebra generated by the given algebra is considered. On the basis of the representation of the extended measure in the minimax terms , the property of the isometric isomorphism for the above-mentioned operator for the traditional normalizations is established. Some properties connected with the preservation of order relations under the given operator are established.

Keywords: algebra of sets, measure, extension of measure, isometric isomorphism

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом Института математики и механики УрО РАН, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: chentsov@imm.uran.ru