МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 517.958 : 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин*

КВАЗИУРОВНИ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ

Для дискретного оператора Шредингера на графе с вершинами на пересечении двух прямых, возмущенного убывающим потенциалом вида εV, доказано, что в окрестности нуля для малых ε нет ненулевых квазиуровней.

Ключевые слова: дискретное уравнение Шредингера, собственное значение, резонанс.

Введение

Во многих физических работах (см., напр., [1–6]) изучаются дискретные модели на графах. При этом цепочки узлов графа моделируют квантовую проволоку или квантовую точку, а разностный оператор, область определения которого состоит из функций, заданных на узлах графа, представляет собой оператор Шредингера (то есть оператор энергии, или гамильтониан электрона, находящегося в данной структуре) в приближении сильной связи. Кроме того, подобные операторы возникают в теории спиновых волн при решении уравнения Гейзенберга с помощью анзаца Бете для одномагнонных состояний (состояний с одним перевернутым спином) в цепочках атомов (см. [7]).

Несмотря на физическую актуальность упомянутых задач, математических работ, исследующих данные модели, почти нет; имеющиеся работы относятся, как правило, к решеткам $\mathbb{Z}^\nu$ (см., напр., [8–11]). Положим $\Gamma = (\mathbb{Z}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{Z})$ (вершины графа располагаем в $\mathbb{R}^2$ лишь для удобства обозначений). Обозначим через $l^2(\Gamma)$ гильбертово пространство функций $\psi(n,m)$, где $(n,m)\in\Gamma$, со скалярным произведением

$$(\psi,\varphi) = \sum_{(n,m)\in\Gamma} \psi(n,m)\overline{\varphi(n,m)}.$$

Определим ограниченный самосопряженный оператор H в $l^2(\Gamma)$ следующими формулами

$$\begin{gathered}(H\psi)(0,0) = \psi(1,0)+\psi(-1,0)+\psi(0,1)+\psi(0,-1),\\ (H\psi)(n,0) = \psi(n+1,0)+\psi(n-1,0),\ n\neq 0,\\ (H\psi)(0,m) = \psi(0,m+1)+\psi(0,m-1),\ m\neq 0.\end{gathered} \tag{1}$$

В соответствии со сказанным выше, данный оператор, а также оператор более общего вида $H+V$, где $V=V(n,m)$, является, во-первых, гамильтонианом электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок, при этом потенциал V описывает влияние примесей (см. [5]). Во-вторых, $H+V$ представляет собой гамильтониан одномагнонных состояний для пересекающихся цепочек атомов; в таком подходе V также описывает воздействие примесей (см. [12]), а также, при рассмотрении бесконечных цепочек, как в данной статье, заменяет наложение граничных условий.

Спектр и существенный спектр оператора A обозначим $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ соответственно.

§ 1. Спектр и резольвента невозмущенного оператора

Теорема 1. *Существенный спектр оператора H совпадает с $[-2,2]$.*

Доказательство. Введем оператор $F : l^2(\Gamma) \to L^2[-\pi, \pi]$ (преобразование Фурье) следующей формулой:

$$(F\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big[\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \psi(2,0)e^{4ix} + \\ + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \ldots + \psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \\ + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \psi(0,3)e^{5ix} + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \ldots\big].$$

Из равенства Парсеваля следует, что оператор F унитарен. Положим $\widehat{H} = FHF^{-1}$. Для $\widehat{\psi} \in L^2[-\pi, \pi]$ имеем

$$\widehat{H}\widehat{\psi}(x) = FHF^{-1}\widehat{\psi}(x) = FH\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\psi(1,0) + \psi(-1,0) + \psi(0,1) + \psi(0,-1) + \\ + \big(\psi(0,0) + \psi(2,0)\big)e^{2ix} + \big(\psi(-2,0) + \psi(0,0)\big)e^{-2ix} + \\ + \big(\psi(1,0) + \psi(3,0)\big)e^{4ix} + \big(\psi(-3,0) + \psi(-1,0)\big)e^{-4ix} + \big(\psi(2,0) + \psi(4,0)\big)e^{6ix} + \\ + \big(\psi(-4,0) + \psi(-2,0)\big)e^{-6ix} + \ldots + \big(\psi(0,0) + \psi(0,2)\big)e^{ix} + \big(\psi(0,-2) + \psi(0,0)\big)e^{-ix} + \\ + \big(\psi(0,1) + \psi(0,3)\big)e^{3ix} + \big(\psi(0,-3) + \psi(0,-1)\big)e^{-3ix} + \big(\psi(0,2) + \psi(0,4)\big)e^{5ix} + \\ + \big(\psi(0,-4) + \psi(0,-2)\big)e^{-5ix} + \ldots\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[e^{2ix}\Big(\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \\ + \psi(2,0)e^{4ix} + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \ldots\Big) + \\ + e^{-2ix}\Big(\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \psi(2,0)e^{4ix} + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \\ + \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \ldots\Big) + e^{2ix}\Big(\psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \\ + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \psi(0,3)e^{5ix} + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \ldots\Big) + \\ + e^{-2ix}\Big(\psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \psi(0,3)e^{5ix} + \\ + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \ldots\Big) + \psi(0,1) + \psi(0,-1) + \psi(0,0)e^{ix} + \psi(0,0)e^{-ix} - \\ - \psi(0,-1)e^{ix} - \psi(0,1)e^{-ix}\Big] = 2\cos 2x \cdot \widehat{\psi}(x) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\psi(0,1) + \psi(0,-1) + \psi(0,0)e^{ix} + \psi(0,0)e^{-ix} - \psi(0,-1)e^{ix} - \psi(0,1)e^{-ix}\Big).$$

Следовательно, $\widehat{H} = A + B$, где $A\widehat{\psi}(x) = 2\cos 2x\, \widehat{\psi}(x)$ и

$$B\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\psi(0,1) + \psi(0,-1) + \psi(0,0)e^{ix} + \psi(0,0)e^{-ix} - \psi(0,-1)e^{ix} - \psi(0,1)e^{-ix}\Big) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \widehat{\psi}(t)\left(e^{-it} + e^{it} + e^{-ix} + e^{ix} - e^{it}e^{ix} - e^{-it}e^{-ix}\right) dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \widehat{\psi}(t)\left(\cos t + \cos x - \cos(t+x)\right) dt.$$

Оператор B является конечномерным и, следовательно, компактным. В силу унитарной эквивалентности операторов H и $\widehat{H}$ и теоремы об относительно компактных возмущениях (см. [13]) имеем

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(\widehat{H}) = \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = [-2, 2]. \qquad \square$$

Для вычисления резольвенты оператора H понадобится обратная функция к функции Жуковского

$$g(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}.$$

Она определена на двулистной римановой поверхности, листы которой склеиваются по отрезку $[-1, 1]$, при этом ± 1 — это точки ветвления. Для функции $g(\lambda)$ на первом листе при $z > 1$ берем, по определению, аналитическое продолжение арифметического корня.

Введем в рассмотрение оператор H_0, действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(H_0\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Известно [16], что $\sigma(H_0) = [-2, 2]$. Ядро $G_0(n, m, \lambda)$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 имеет вид (см. [14])

$$G_0(n, m, \lambda) = G_0(n - m, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^{|n-m|} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(g\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{|n-m|}. \quad (2)$$

Функция G_0 аналитически продолжается по λ на двулистную риманову поверхность $\mathcal{M}$, определяемую функцией $g(\lambda/2)$, листы которой склеиваются вдоль $[-2, 2]$; при этом на первом листе G_0 экспоненциально убывает при $|n - m| \to \infty$ и является на нем ядром резольвенты.

Введем обозначение

$$f(\varphi) = f(\lambda, \varphi) = (R_0(\lambda)\varphi)(1) + (R_0(\lambda)\varphi)(-1). \quad (3)$$

Далее, определим функцию $\delta(n) = \delta_{0n}$, где δ_{nm} — символ Кронекера. Наконец, для произвольной функции $\varphi(n, m)$, определенной на Γ, будем пользоваться обозначениями

$$\varphi_1(n) = \varphi(n, 0), \quad \varphi_2(m) = \varphi(0, m), \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

при этом $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Лемма 1. *Резольвента $R(\lambda)$ оператора H имеет вид*

$$R(\lambda)\varphi(n, m) = \begin{cases} (R_0(\lambda)\varphi_1)(n) - \dfrac{f(\varphi_2) - f(\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} (R_0(\lambda)\delta)(n), & n \in \mathbb{Z},\ m = 0, \\ (R_0(\lambda)\varphi_2)(m) - \dfrac{f(\varphi_1) - f(\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} (R_0(\lambda)\delta)(m), & m \in \mathbb{Z},\ n = 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Резольвенту $R(\lambda)$ ищем, решая уравнение

$$(H - \lambda)\psi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma) \quad (4)$$

относительно ψ для $\lambda \notin [-2, 2] = \sigma_{ess}(H)$ (см. теорему 1). С учетом (1) уравнение (4) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \psi(n+1, 0) + \psi(n-1, 0) - \lambda\psi(n, 0) = \varphi(n, 0), \quad n \neq 0, \\ \psi(0, m+1) + \psi(0, m-1) - \lambda\psi(0, m) = \varphi(0, m), \quad m \neq 0, \\ \psi(1, 0) + \psi(-1, 0) + \psi(0, 1) + \psi(0, -1) - \lambda\psi(0, 0) = \varphi(0, 0). \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} ((H_0 - \lambda)\psi_1)(n) = \varphi_1(n) - (\psi_2(1) + \psi_2(-1))\delta(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ ((H_0 - \lambda)\psi_2)(m) = \varphi_2(m) - (\psi_1(1) + \psi_1(-1))\delta(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (6)$$

с наложенным условием $\psi_1(0)=\psi_2(0)$. Докажем, что если $\varphi\in l^2(\Gamma)$ (откуда $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$), то данное условие выполняется автоматически. Действительно, при $n=m=0$ из (6) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(1)+\psi_1(-1)-\lambda\psi_1(0)=\varphi_1(0)-(\psi_2(1)+\psi_2(-1))\,,\\ \psi_2(1)+\psi_2(-1)-\lambda\psi_2(0)=\varphi_2(0)-(\psi_1(1)+\psi_1(-1))\,. \end{cases}$$

Отсюда в силу равенства $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$ имеем $\lambda\,(\psi_1(0)-\psi_2(0))=0$ и $\psi_1(0)=\psi_2(0)$.

Подействовав на обе части каждого из уравнений системы (6) оператором $R_0(\lambda)$, получим систему

$$\begin{cases} \psi_1(n)=(R_0(\lambda)\varphi_1)\,(n)-(\psi_2(1)+\psi_2(-1))\,(R_0(\lambda)\delta)\,(n), & n\in\mathbb{Z}\\ \psi_2(m)=(R_0(\lambda)\varphi_2)\,(m)-(\psi_1(1)+\psi_1(-1))\,(R_0(\lambda)\delta)\,(m), & m\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{7}$$

Из (7) находим линейную систему относительно $\psi_1(1)+\psi_1(-1)$ и $\psi_2(1)+\psi_2(-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & f(\delta)\\ f(\delta) & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \psi_1(1)+\psi_1(-1)\\ \psi_2(1)+\psi_2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(\varphi_1)\\ f(\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Если $d(\lambda)=1-f^2(\lambda,\delta)\neq 0$, то по формулам Крамера

$$\psi_1(1)+\psi_1(-1)=\frac{f(\varphi_1)-f(\varphi_2)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}, \tag{8}$$

$$\psi_2(1)+\psi_2(-1)=\frac{f(\varphi_2)-f(\varphi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}. \tag{9}$$

(Если $d(\lambda)=0$, то $\psi_j(1)+\psi_j(-1)$, $j=1,2$ не определяются однозначно по φ_1,φ_2 и, следовательно, резольвента $R(\lambda)$ не существует). Из (7)–(9) следует, что $R(\lambda)$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы. □

Замечание 1. Дискретный спектр оператора H состоит из двух собственных значений $\pm 4/\sqrt{3}$ кратности единица. Действительно, резольвента оператора H, как видно из доказательства леммы 1, вне существенного спектра имеет полюса в таких точках λ, в которых

$$1-f^2(\lambda,\delta)=0. \tag{10}$$

В силу (2), (3)

$$f(\lambda,\delta)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|1-m|}\delta(m)-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|-1-m|}\delta(m)=$$

$$=1-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}}. \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем уравнения

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}}=0,\qquad -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}}=0.$$

Первое из них имеет корень $\lambda=0$. Непосредственно проверяется, что для данного λ не существует собственных функций оператора H в классе $l^2(\Gamma)$. Второе уравнение имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm 4/\sqrt{3}$. Нетрудно проверить, что $\lambda_{1,2}$ являются собственными значениями кратности единица.

§ 2. Квазиуровни слабо возмущенного оператора

В этом параграфе будет рассматриваться оператор $H_\varepsilon = H + \varepsilon V$ с малым параметром $\varepsilon > 0$, где на вещественную функцию $V \neq 0$ наложены условия

$$|V(n,0)| \leqslant Ce^{-\alpha|n|}, \quad |V(0,m)| \leqslant Ce^{-\alpha|m|}, \quad n,m \in \mathbb{Z}, \quad C = \text{const}. \tag{12}$$

Уравнение Шредингера $(H+\varepsilon V)\psi = \lambda\psi$, рассматриваемое в классе $l^2(\Gamma)$, перепишем для $\lambda \notin \sigma(H)$ в виде

$$\psi = -\varepsilon R(\lambda) V \psi. \tag{13}$$

Введем обозначение $\sqrt{V} = \sqrt{|V|}\operatorname{sign} V$ (только для $\sqrt{V}$), тогда $V = \sqrt{V}\sqrt{|V|}$. Сделаем в (13) замену, полагая $\varphi = \sqrt{|V|}\psi$, тогда (13) примет вид

$$\varphi = -\varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\varphi. \tag{14}$$

Операторнозначная функция $\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}$ аналитически продолжается в достаточно малую окрестность отрезка $[-2,2]$ на каждом из листов римановой поверхности $\mathcal{M}$ своей функцией Грина (кроме точек полюса), причем принимает значения в множестве операторов Гильберта–Шмидта. Это следует из вида резольвенты оператора H (см. лемму 1) и аналогичного результата для $\sqrt{|V_j|}R_0(\lambda)\sqrt{V_j}$, $j = 1,2$ (см. [14]).

Уравнение (14) будем решать в классе $l^2(\Gamma)$. Сделанная замена позволяет находить не только собственные значения (в этом случае $\psi \in l^2(\Gamma)$ и тем более $\varphi \in l^2(\Gamma)$), но и резонансы (см. ниже), когда ψ, вообще говоря, экспоненциально возрастает. При этом λ не должно совпадать с полюсами $\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}$, то есть с точками 0 и $\pm 4/\sqrt{3}$ (см. замечание 1). Особенности в точках $\lambda = \pm 2$ формально присутствуют в выражении для $\sqrt{V}R(\lambda)\sqrt{V}$, поскольку являются особенностями ядра $R_0(\lambda)$ (см. теорему 2), но, как нетрудно убедиться, являются устранимыми.

Определение 1 (ср. [15]). Число λ, принадлежащее второму (так называемому «нефизическому») листу римановой поверхности $\mathcal{M}$, будем называть *резонансом* оператора H_ε, если существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\Gamma)$ уравнения (14).

Если решение существует на первом листе, причем $\lambda \notin [-2,2]$, то λ является собственным значением.

Определение резонанса можно сформулировать по-другому. Обозначим через $R_\varepsilon(\lambda)$ резольвенту оператора H_ε. В силу резольвентного тождества имеем

$$\left(1+\varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\right)^{-1}\left(\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\right) = \sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}, \tag{15}$$

откуда

$$\left(1+\varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\right)^{-1} = 1-\varepsilon\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}. \tag{16}$$

Вследствие компактности оператора $\varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}$ и аналитической теоремы Фредгольма (см. [16]) операторнозначная функция $\left(\varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\right)^{-1}$ мероморфна по λ и имеет полюс в точке λ_0 тогда и только тогда, когда $\dim\ker\left(1+\varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\right) > 0$. Отсюда в силу (16) следует, что $\lambda \notin \{0, \pm 4/\sqrt{3}\}$ является резонансом тогда и только тогда, когда операторнозначная функция $\varepsilon\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}$ или, что то же, функция Грина оператора H_ε, имеет полюс на втором листе $\mathcal{M}$.

Определение 2. Число $\lambda \in \mathcal{M}$ называется *квазиуровнем* оператора H_ε, если λ является резонансом или собственным значением оператора H_ε.

В частности, $\lambda = 0$ является резонансом оператора H (если считать, что точки отрезка $[-2,2]$ принадлежат обоим листам) — см. замечание 1.

Заметим, что функция ψ из равенства $\sqrt{|V|}\psi = \varphi$ восстанавливается по известной функции φ, в том числе и для n, m таких, что $V(n,m) = 0$, по формуле $\psi = -\varepsilon R(\lambda)\sqrt{V}\varphi$. Из равенства $\psi = -\varepsilon R(\lambda)V\psi$, которое имеет смысл и для элемента $\psi \notin l^2(\Gamma)$ такого, что $\sqrt{|V|}\psi \in l^2(\Gamma)$, следует равенство $(H+\varepsilon V)\psi = \lambda\psi$. Предположим, что резонанс λ находится на втором листе в достаточно малой окрестности отрезка $[-2,2]$. При помощи леммы 1 и оценок функции Грина G_0, подобных [14], нетрудно доказать неравенство $|\psi(n,m)| \leqslant Ce^{\delta(|n|+|m|)}$, где C и δ — положительные константы, причем при уменьшении окрестности $[-2,2]$ число δ становится как угодно малым. Если λ — собственное значение, то оценка принимает вид $|\psi(n,m)| \leqslant \leqslant Ce^{-\delta(|n|+|m|)}$, где $C, \delta > 0$.

Пусть λ находится на втором листе. Для того чтобы выполнялось условие $\sqrt{|V|}\psi \in l^2(\Gamma)$, естественно потребовать выполнение неравенства $\delta < \alpha$, где α взято из (12). При этом λ должно находиться достаточно близко к отрезку $[-2,2]$, в частности, $\operatorname{Im}\lambda$ должно быть мало. Это соответствует физическим требованиям, так как время жизни резонансного состояния должно быть достаточно велико, а оно обратно пропорционально $|\operatorname{Im}\lambda|$.

Положим $R_{\varepsilon V_j}(\lambda) = (H_0 + \varepsilon V_j - \lambda)^{-1}$, $j = 1,2$.

Лемма 2. *Точка $\lambda \in \mathcal{M}$ такая, что $\lambda \neq \varepsilon V_1(0)$ и $1 \neq f^2(\lambda,\delta)$, является квазиуровнем оператора H_ε для достаточно малых ε тогда и только тогда, когда*

$$\Big(1 - f^2(\lambda,\delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{V_1}\xi_1)f(\lambda,\delta)\Big)\Big(1 - f^2(\lambda,\delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{V_2}\xi_2)f(\lambda,\delta)\Big) =$$

$$= \varepsilon^2 f(\lambda, \sqrt{V_1}\xi_1) f(\lambda, \sqrt{V_2}\xi_2), \tag{17}$$

где $\xi_j = \xi_j(n,\lambda) = \sqrt{|V_j|}R_{\varepsilon V_j}(\lambda)\delta(n)$, $j = 1,2$.

Доказательство. Уравнение (14) запишем с помощью леммы 1 в виде системы

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = -\varepsilon\sqrt{|V_1|}\left(R_0(\lambda)\sqrt{V_1}\varphi_1 - \dfrac{f(\sqrt{V_2}\varphi_2) - f(\sqrt{V_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}R_0(\lambda)\delta\right)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = -\varepsilon\sqrt{|V_2|}\left(R_0(\lambda)\sqrt{V_2}\varphi_2 - \dfrac{f(\sqrt{V_1}\varphi_1) - f(\sqrt{V_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}R_0(\lambda)\delta\right)(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{18}$$

или для достаточно малых ε в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = \varepsilon\dfrac{f(\sqrt{V_2}\varphi_2) - f(\sqrt{V_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}\Big((1+\varepsilon\sqrt{|V_1|}R_0(\lambda)\sqrt{V_1})^{-1}(\sqrt{|V_1|}R_0(\lambda)\delta)\Big)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = \varepsilon\dfrac{f(\sqrt{V_1}\varphi_1) - f(\sqrt{V_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}\Big((1+\varepsilon\sqrt{|V_2|}R_0(\lambda)\sqrt{V_2})^{-1}(\sqrt{|V_2|}R_0(\lambda)\delta)\Big)(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{19}$$

При этом от решения φ_1, φ_2 системы (19) требуется выполнение равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Докажем, что в условиях леммы оно должно выполняться автоматически. После перехода обратно к функциям ψ_1, ψ_2 из (18) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(n) = -\varepsilon R_0(\lambda)V_1\psi_1(n) + \varepsilon\dfrac{f(V_2\psi_2) - f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}R_0(\lambda)\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = -\varepsilon R_0(\lambda)V_2\psi_2(m) + \varepsilon\dfrac{f(V_1\psi_1) - f(V_2\psi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}R_0(\lambda)\delta(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{20}$$

откуда

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) = -\varepsilon f(V_1\psi_1) - yf(\delta), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) = -\varepsilon f(V_2\psi_2) - xf(\delta), \end{cases} \tag{21}$$

где

$$x = -\varepsilon\frac{f(V_1\psi_1) - f(V_2\psi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}, \quad y = -\varepsilon\frac{f(V_2\psi_2) - f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \tag{22}$$

удовлетворяют системе (см. доказательство леммы 1)

$$\begin{cases} x + f(\delta)y = -\varepsilon f(V_1\psi_1), \\ f(\delta)x + y = -\varepsilon f(V_2\psi_2). \end{cases} \tag{23}$$

Из (21) и (23) получаем равенства

$$x = \psi_1(1) + \psi_1(-1), \quad y = \psi_2(-1) + \psi_2(-1). \tag{24}$$

Применяя теперь к уравнениям (20) оператор $H_0 - \lambda$ и пользуясь (22) и (24), приходим для $n = m = 0$ к системе

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) + \varepsilon V_1(0)\psi_1(0) - \lambda\psi_1(0) = -\psi_2(1) - \psi_2(-1), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) + \varepsilon V_2(0)\psi_2(0) - \lambda\psi_2(0) = -\psi_1(1) - \psi_1(-1). \end{cases}$$

Вследствие равенства $V_1(0) = V_2(0)$ получаем $(\varepsilon V_1(0) - \lambda)\psi_1(0) = (\varepsilon V_1(0) - \lambda)\psi_2(0)$. В силу условия леммы $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, откуда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Вследствие (15) систему (19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= \varepsilon\frac{f(\sqrt{V_2}\varphi_2) - f(\sqrt{V_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}\left(\sqrt{|V_1|}R_{\varepsilon V_1}(\lambda)\delta\right)(n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \varphi_2(m) &= \varepsilon\frac{f(\sqrt{V_1}\varphi_1) - f(\sqrt{V_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}\left(\sqrt{|V_2|}R_{\varepsilon V_2}(\lambda)\delta\right)(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{25}$$

Положим $\xi_j(n) = \sqrt{|V_j|}R_{\varepsilon V_j}(\lambda)\delta(n)$, $j = 1, 2$. Из (25) имеем

$$\varphi_j = C_j\xi_j, \quad j = 1, 2, \tag{26}$$

где C_j — константы. Заметим, что при малых ε векторы ξ_j близки к $\sqrt{|V_j|}R_0(\lambda)\delta$ и потому отличны от нуля. Из (25), (26) получаем следующую систему относительно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\varepsilon}{1 - f^2(\delta)}\left(C_2 f(\sqrt{V_2}\xi_2) - C_1 f(\sqrt{V_1}\xi_1)f(\delta)\right), \\ C_2 = \dfrac{\varepsilon}{1 - f^2(\delta)}\left(C_1 f(\sqrt{V_1}\xi_1) - C_2 f(\sqrt{V_2}\xi_2)f(\delta)\right). \end{cases} \tag{27}$$

В условиях леммы ненулевое решение уравнения (14) существует тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение (C_1, C_2) системы (27), то есть когда определитель системы (27) равен нулю, что и означает выполнение (14). □

Определение 3. Назовем *геометрической кратностью* квазиуровня

$$\dim\ker(1 + \varepsilon\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}).$$

Замечание 2. В условиях леммы 2 геометрическая кратность квазиуровня совпадает с размерностью пространства решений системы (10) и равна единице.

Предположим, что $V_1 = V_2 = W$, тогда $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

Теорема 2. *Оператор H_ε для всех достаточно малых ε не имеет (ненулевых) квазиуровней в окрестности нуля.*

Доказательство. Пусть $f^2(\lambda, \delta) \neq 1$. Предположим вначале, что $W(0) \neq 0$. Из (26) получаем (см. доказательство леммы 2), что необходимое для наличия квазиуровня равенство $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ выполнено тогда и только тогда, когда $C_1\xi(0) = C_2\xi(0)$. Поскольку для λ близких к нулю при $\varepsilon \to 0$

$$\xi(0) = \sqrt{|W(0)|}\big(R_{\varepsilon W}(\lambda)\delta\big)(0) \longrightarrow -\frac{\sqrt{|W(0)|}}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \neq 0,$$

то $C_1 = C_2 = C$. При этом $C \neq 0$ (иначе $\varphi = 0$ и квазиуровней нет). Следовательно, согласно (27), $f(\sqrt{W}\xi) \neq 0$ и

$$1 = \frac{\varepsilon f(\sqrt{W}\xi)}{1 - f^2(\delta)}(1 - f(\delta)),$$

откуда получаем уравнение

$$1 + f(\delta) = \frac{2\sqrt{\lambda^2 - 4} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = \varepsilon f(\sqrt{W}\xi),$$

которое при малых ε и λ, очевидно, не имеет решений.

Рассмотрим случай $W(0) = 0$. Тогда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, и условие $\lambda \neq \varepsilon W(0)$ в формулировке леммы 2 накладывать не нужно. Из леммы 2 следует, что $\lambda \in \mathcal{M}$ является квазиуровнем H_ε, если λ удовлетворяет одному из уравнений

$$1 - f^2(\lambda, \delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{W}\xi) f(\lambda, \delta) = \pm \varepsilon f(\lambda, \sqrt{W}\xi).$$

В случае знака « $+$ » уравнение не имеет решений при малых ε и λ (см. выше). В случае знака « $-$ » получаем уравнение

$$F(\lambda, \varepsilon) = 0, \tag{28}$$

где

$$F(\lambda, \varepsilon) = 1 - f(\delta) + \varepsilon f(\sqrt{W}\xi) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} + \varepsilon f(\sqrt{W}\xi).$$

Функция $F(\lambda, \varepsilon)$ является аналитической в окрестности точки $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ (для любого выбора знака корня $\sqrt{\lambda^2 - 4}$), причем

$$F(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial F(0,0)}{\partial \lambda} = \pm \frac{1}{2i} \neq 0.$$

В силу теоремы о неявной функции (см. [17]), для любого выбора знака корня для всех достаточно малых ε существует единственное решение $\lambda = \lambda_\pm(\varepsilon)$ уравнения (28), причем $\lambda_\pm(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε.

Перепишем уравнение (28) в виде

$$\lambda = -\varepsilon \sqrt{\lambda^2 - 4} f(\sqrt{W}\xi) = \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(q^{|1+n|} + q^{|1-n|} \right) \left(\sqrt{W}\xi \right)(n), \tag{29}$$

где, как и выше,

$$q = q(\lambda) = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Явно выписывая разные знаки у корня $\sqrt{\lambda^2 - 4}$, приведем необходимые в дальнейшем равенства:

$$q^\alpha(\lambda) = \left(\frac{\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^\alpha, \quad (q^\alpha(\lambda))' = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} q^\alpha(\lambda),$$

$$(q^\alpha(\lambda))'' = \alpha \left(\pm \frac{\lambda q^\alpha(\lambda)}{(\lambda^2 - 4)\sqrt{\lambda^2 - 4}} + \frac{\alpha q^\alpha(\lambda)}{\lambda^2 - 4} \right), \tag{30}$$

$$(q^\alpha)(0) = (\mp i)^\alpha, \quad (q^\alpha)'(0) = \mp \frac{\alpha}{2i} (\mp i)^\alpha, \quad (q^\alpha)''(0) = -\frac{\alpha^2}{4} (\mp i)^\alpha,$$

$$q^{|1+n|} + q^{|1-n|} = \begin{cases} \mp 2i + \lambda \pm \dfrac{i\lambda^2}{4} + O(\lambda^4), & n = 0, \\ \lambda q^{|n|}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Далее, преобразуем для малых λ и ε выражение

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{W}\xi)(n) &= \sqrt{W}\left(1+\varepsilon\sqrt{|W|}R_0(\lambda)\sqrt{W}\right)^{-1}\left(\sqrt{|W|}R_0(\lambda)\delta\right)(n) = \\
&= (WR_0(\lambda)\delta)(n) - \varepsilon(WR_0(\lambda)WR_0(\lambda)\delta)(n) + \varepsilon^2(WR_0(\lambda)WR_0(\lambda)WR_0(\lambda)\delta)(n) + O(\varepsilon^3) = \\
&= \mp\frac{W(n)}{\sqrt{\lambda^2-4}}q^{|n|} - \frac{\varepsilon W(n)}{\lambda^2-4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{|n-m|+|m|}W(m)\mp \\
&\mp \frac{\varepsilon^2 W(n)}{(\lambda^2-4)\sqrt{\lambda^2-4}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{|n-k|+|k-m|+|m|}W(k)W(m) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{31}
$$

В силу (29) $\lambda = O(\varepsilon)$, тогда из (29)–(31), а также из равенства $W(0)=0$, получаем следующее уравнение:

$$
\lambda = \varepsilon\lambda\sum_{n\neq 0} q^{|n|}W(n)\left(\mp\frac{q^{|n|}}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \frac{\varepsilon}{\lambda^2-4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{|n-m|+|m|}W(m) + O(\varepsilon^3)\right).
$$

Очевидно, что оно не имеет решений, если $\lambda = \lambda(\varepsilon) \not\equiv 0$. □

Замечание 3. Обычно квазиуровни возмущенного оператора возникают как сдвиги полюсов резольвенты невозмущенного оператора под действием возмущения (см., напр., [15]). Квазиуровнями (понимаемыми как полюса функции Грина) оператора H являются изолированные собственные значения $\lambda = \pm 4/\sqrt{3}$, поведение которых описывается обычной теорией возмущений, а также резонанс $\lambda = 0$. Таким образом, рассматриваемый в теореме 2 оператор имеет весьма необычное свойство: полюс в нуле функции Грина, несмотря на введение возмущающего потенциала, остается неподвижным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orellana P. A., Domingulz-Adame F., Gomes I., Ladron de Guevara M. L. Transport through a quantum wire a side quantum–dot array // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol 67, 085321 (5p).
2. Shangguan W. Z., Au Yeung T. C., Yu Y. B., Kam C. H. Quantum transtort in one–dimensional quantum dot array // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 63, 235323 (9p).
3. Yan Chen, Shi–Yie Xiong, Evangelou S. N. Quantum oscillations in mesoscopic rings with many chains // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 56, № 8. — P. 4778–4784.
4. Miroshnichenko A. E., Kivshar Y. S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, 056611 (7p).
5. Chakrabarti A. Fano resonance in discrete lattice models: Controlling lineshapes with impurities // Phys. Letters A. — 2007. — Vol. 336, Issues 4–5. — P. 507–512.
6. Bulka. B. R., Stefanski P. Fano and Kondo resonance in electronic current throught nanodevices // Phys. Rev. Let. — 2001. — Vol. 86, № 22. — P. 5128–5131.
7. Изюмов Ю. А., Скрябин Ю. Н. Статистическая механика магнито–упорядоченных систем. — М.: Наука. 1987. — 264 с.
8. Karachalios N. I. The number of bound states for a discrete Schrödinger operator on $\mathbb{Z}^N, N \geqslant 1$, lattices // Y. Phys. A.: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, 455201 (14p).
9. Pelinovsky D. E., Stefanov A. On the spectral theory and dispersive estimates for a discrete Shrödinger equation in one dimension // URL: arXiv: 0804.1963v1 — 2008.
10. Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. матем. физика. — 2003. — Т. 136, № 2. — С. 321–245.
11. Dutkay D. E., Yorgensen P. E. T. Spectral theory for discrete laplacians // URL: arXiv: 0802.2347v5 — 2008.
12. Wolfram T., Callaway Y. Spin–wave impurity states in ferromagnets // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130, № 6. — P. 2207–2217.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов — М.: Мир. 1982. — 432 с.

14. Baranova L. Y., Chuburin Y. P. Quasi–levels of the two–particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential // J. Phys. A.: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 435205 (11 p).
15. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг–Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой физике. М.: Мир, 1991. — 568 с.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 360 с.
17. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969. — 396 с.

Поступила в редакцию 10.05.09

T. S. Tinyukova, Y. P. Chuburin

Quasi–levels of the discrete Schrödinger equation with a decreasing potential on a graph

We consider the discrete Schrödinger operator perturbed by a decreasing potential of the form εV defined on a graph the nodes of which lie on the union of two intersected straight lines. We prove that non-vanishing quasi-levels do not exist in the neighbourhood of zero for a small ε.

Keywords: discrete Schrödinger equation, eigenvalue, resonanse.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

Тинюкова Татьяна Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: TAshih@mail.ru
Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики ФТИ УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132. E-mail:chuburin@otf.pti.udm.ru