УДК 517.518

© *Н. В. Латыпова*

ПОГРЕШНОСТЬ КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Рассматриваются два способа биркгофовой интерполяции функции двух переменных многочленами второй степени на треугольнике для метода конечных элементов. Оценки погрешности для одного из предложенных параболических элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно–параболическая функция, триангуляция, метод конечных элементов.

Введение

Первоначально оценки погрешности аппроксимации функции и ее i-й производной имели вид CH^{n+1-i}, где H — диаметр триангуляции, n — степень интерполяционного многочлена и этот параметр также тесно связан с классом аппроксимируемых функций (классы $W^{n+1}M$, которые будут введены ниже). При этом вопрос о том, как константа C зависит от свойств триангуляции, не рассматривался. Позже появилось условие наименьшего угла триангуляции (работы Синджа, Зламала, Женишека, Брэмбла и других). Наиболее общие результаты такого рода принадлежат Сьярле и Равьяру [1], у которых в двумерном случае в максимально общей ситуации оценки погрешности аппроксимации имели вид $CH^{n+1-i}(\sin\alpha)^{-i}$, где α — наименьший угол триангуляции, а константа C уже не зависит от триангуляции.

В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках Сьярле–Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). При этом выясняется, что различные типы интерполяционных процессов (Лагранжа, Эрмита, Биркгофа) по-разному реагируют на характер вырождения триангуляции. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны.

Так, в случае лагранжевой интерполяции оценка погрешности зависит от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. Здесь к настоящему моменту все выяснено благодаря работам Зламала, Ю. Н. Субботина, Жаме. Кроме того, Ю. Н. Субботин [2] показал неулучшаемость этих оценок на заданном классе. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Наиболее трудным является случай эрмитовой и биркгофовой интерполяции. Здесь некоторые результаты получены Д. О. Филлимоненковым, Ю. Н. Субботиным [3, 4], Н. В. Байдаковой [5, 6] и автором [7]–[9]. В работах [5; 7; 8] рассматриваются интерполяционные условия биркгофова типа для построения многочленов нечетных степеней $4k+1$ и $4k+3$, позволяющие заменить наименьший угол на наибольший для старших производных, но избавиться полностью от присутствия наименьшего угла в оценках погрешности производных не удается. В работах [4; 6] предложены два способа интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которых наименьший угол полностью заменяется на средний (наибольший).

В настоящей работе предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами второй степени на треугольнике, оценки погрешности в одном из которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от угла. Показана неулучшаемость полученных оценок. Отметим,что построенные кусочно–полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса). Например, использовались линейные по совокупности переменных полиномы, но с определящими параметрами не в вершинах треугольника, а в серединах его сторон, и это приводило к существенно лучшим результатам, так как при этом автоматически учитывалось трудное условие равенства нулю дивергенции.

§ 1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен второй степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть $\triangle$ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i = 1, 2, 3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника $\triangle$, через n_i — единичную нормаль к стороне $[a_i, a_{i+1}]$, через b_i — середину стороны $[a_i, a_{i+1}]$, при этом полагают $a_4 = a_1$. Через α, β, θ обозначим углы при вершине a_1, a_2, a_3 соответственно; при этом пусть выполняются неравенства $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \theta < \pi$.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины $\triangle$ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leqslant b$ и длина наибольшей стороны треугольника $\triangle$ равна $a + b = H$.

Обозначим через

$$D_\eta f(x,y) = \eta^{(1)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta^{(2)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

производную по направлению $\eta = \left(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}\right)$, $\left(\eta^{(1)}\right)^2 + \left(\eta^{(2)}\right)^2 = 1$ и пусть

$$W^{s+1}M = \Big\{ f(x,y) : D^l_{\eta_1,\ldots,\eta_l} f(x,y) \in \mathbb{C}(\triangle) \quad (0 \leqslant l \leqslant s+1) \quad \text{и}$$

$$\forall\, (x,y) \in \triangle, \quad \forall\, \eta_1, \ldots, \eta_{s+1} \quad \left| D^{s+1}_{\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}} f(x,y) \right| \leqslant M \Big\},$$

где $\mathbb{C}(\triangle)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике $\triangle$.

Через $P_2(x,y) = P_2(f; x, y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i) = P_2(a_i) \quad (i = 1, 2, 3); \tag{1}$$

$$D_{n_i} f(b_i) = D_{n_i} P_2(b_i) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Положим $e(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y)$; $\quad e_{i,j}(x,y) = \dfrac{\partial^{i+j} e(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$; $\quad e_{i,j} = e_{i,j}(0,0)$.

§ 2. Оценки погрешности для первого способа

Получим оценки погрешности для предложенного способа интерполяции.

Теорема 1. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^3M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, любого $(x,y) \in \triangle$ и для интерполяционного многочлена $P_2(x,y)$, заданного условиями* (1)–(2)*, имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^{s+j} e(x,y)}{\partial x^s \partial y^j} \right\| \leqslant \begin{cases} C_{s,j} M H^{4-s-j} & (0 \leqslant j \leqslant 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2-j), \\ C_{0,2} M H \operatorname{ctg} \alpha & (j = 2, \quad s = 0), \end{cases} \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $\mathbb{C}(\triangle)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$e(x,y) = e_{0,0} + xe_{1,0} + \frac{x^2}{2!}e_{2,0} + y\left(e_{0,1} + xe_{1,1}\right) + \frac{y^2}{2!}e_{0,2} + R(x,y), \tag{4}$$

где $R(x,y) = \int_0^y \frac{(y-t)^2}{2!}\frac{\partial^3 f(0,t)}{\partial t^3}\,dt + \sum_{i=0}^{2}\frac{y^i}{i!}\int_0^x \frac{(x-u)^{2-i}}{(2-i)!}\frac{\partial^3 f(u,0)}{\partial u^{3-i}\partial y^i}\,du.$

Далее через K будем обозначать положительные константы, не обязательно равные, независящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Из условий (1) при $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{cases} e_{0,0} - ae_{1,0} + \frac{a^2}{2}e_{2,0} = -R(-a,0), \\ e_{0,0} + be_{1,0} + \frac{b^2}{2}e_{2,0} = -R(b,0). \end{cases}$$

Откуда следует

$$e_{1,0} = A_1 + \frac{b-a}{ab}e_{0,0}, \quad e_{2,0} = A_2 - \frac{2}{ab}e_{0,0}; \tag{5}$$

здесь $A_1 = \frac{b}{a(a+b)}R(-a,0) - \frac{a}{b(a+b)}R(b,0)$, $|A_1| \leqslant KMab$; $A_2 = \frac{2}{a}A_1 - \frac{2}{a^2}R(-a,0)$, $|A_2| \leqslant KMb$. Из условия (2) при $i = 1$ и условия (1) при $i = 3$ получим соответственно

$$e_{1,1} = A_3 - \frac{2}{b-a}e_{0,1}, \quad e_{0,2} = A_4 - \frac{2}{h^2}e_{0,0} - \frac{2}{h}e_{0,1}; \tag{6}$$

здесь $A_3 = -\frac{2}{b-a}\frac{\partial}{\partial y}R\left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$, $|A_3| \leqslant KMb$; $A_4 = -\frac{2}{h^2}R\left(0,h\right)$, $|A_4| \leqslant KMh$. Из условия (2) при $i = 2, 3$ имеем

$$h\left(e_{1,0} + \frac{c}{2}e_{2,0} + \frac{h}{2}e_{1,1}\right) + c\left(e_{0,1} + \frac{c}{2}e_{1,1} + \frac{h}{2}e_{0,2}\right) = A_c,$$

где

$$A_c = -h\frac{\partial}{\partial x}R\left(\frac{c}{2}, \frac{h}{2}\right) - c\frac{\partial}{\partial y}R\left(\frac{c}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad |A_c| \leqslant KM|c|^3, \quad c = -a, b.$$

Откуда, подставляя выражения (5)–(6), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{ah}e_{0,0} - \frac{1}{b-a}e_{0,1} = B_{-a}, \\ \frac{1}{bh}e_{0,0} + \frac{1}{b-a}e_{0,1} = B_b, \end{cases}$$

где

$$B_c = -\frac{\operatorname{sign} c}{h^2+c^2}\left(A_c - hA_1 - \frac{hc}{2}A_2 - \frac{h^2+c^2}{2}A_3 - \frac{ch}{2}A_4\right), \quad c = -a, b,$$

$$|B_b| \leqslant KMb, \quad |B_{-a}| \leqslant KM\frac{a^2b}{a^2+h^2}.$$

Тогда, складывая равенства, получим

$$e_{0,0} = \frac{hab}{a+b}\left(B_{-a} + B_b\right), \quad |e_{0,0}| \leqslant KMabh.$$

А значит, $|e_{0,1}| \leqslant KMb^2$. Подставляя найденные оценки в (5)–(6), имеем

$$|e_{1,0}| \leqslant KMab, \quad |e_{2,0}| \leqslant KMb, \quad |e_{1,1}| \leqslant KMb, \quad |e_{0,2}| \leqslant KM\frac{b^2}{h}.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (4) и вычисляя производные первого и второго порядка по переменным x и y, получим справедливость теоремы. □

§ 3. Второй способ интерполяции

Если же в качестве $P_2(x,y) = P_2(f;x,y)$ обозначить многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, удовлетворяющий интерполяционным условиям (1) и

$$D_{n_i} f(b_i) = D_{n_i} P_2(b_i) \quad (i = 2,3), \tag{7}$$

$$D^2_{n_1^2} f(b_1) = D^2_{n_1^2} P_2(b_1), \tag{8}$$

то имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^3 M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, любого $(x,y) \in \triangle$ и для интерполяционного многочлена $P_2(x,y)$, заданного условиями* (1), (7), (8), *имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\| \leqslant C_{s-j,j} M H^{3-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 2, \quad j \leqslant s \leqslant 2). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично используем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши (4).

Из условий (1) при $i = 1,2$ имеем те же соотношения (5).

Из условия (8) получим

$$e_{0,2} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} R\left(\frac{b-a}{2}, 0\right).$$

Откуда

$$|e_{0,2}| \leqslant KM(b-a). \tag{10}$$

Тогда, используя условие (1) при $i = 3$, учитывая полученную оценку (10), имеем

$$e_{0,1} = A_5 - \frac{1}{h} e_{0,0}, \tag{11}$$

где

$$A_5 = -\frac{1}{h} R(0,h) - \frac{h}{2} e_{0,2}, \quad |A_5| \leqslant KMbh.$$

Из условия (7) при $i = 2,3$ имеем

$$h\left(e_{1,0} + \frac{c}{2} e_{2,0} + \frac{h}{2} e_{1,1}\right) + c\left(e_{0,1} + \frac{c}{2} e_{1,1} + \frac{h}{2} e_{0,2}\right) = A_c,$$

где

$$A_c = -h\frac{\partial}{\partial x} R\left(\frac{c}{2}, \frac{h}{2}\right) - c\frac{\partial}{\partial y} R\left(\frac{c}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad |A_c| \leqslant KM|c|^3, \quad c = -a, b.$$

Откуда, подставляя выражения (5), (10) и (11), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{2}{ah} e_{0,0} + e_{1,1} = D_{-a}, \\ -\frac{2}{bh} e_{0,0} + e_{1,1} = D_b, \end{cases}$$

где

$$D_c = \frac{2}{h^2 + c^2}\left(A_c - hA_1 - \frac{hc}{2} A_2 - cA_5 - \frac{ch}{2} e_{0,2}\right), \quad c = -a, b,$$

$$|D_b| \leqslant KMb, \quad |D_{-a}| \leqslant KM\frac{abh + a^3}{a^2 + h^2}.$$

Определитель данной системы $\Delta = \frac{2(b+a)}{abh}$ отличен от нуля.

$$\Delta_1 = D_{-a} - D_b, \quad |\Delta_1| \leqslant KMb,$$

$$\Delta_2 = \frac{2}{ah}D_b + \frac{2}{bh}D_{-a}, \quad |\Delta_2| \leqslant KM\left(\frac{b}{ah} + \frac{a}{a^2+h^2}\right).$$

Тогда

$$e_{0,0} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad e_{1,1} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad |e_{0,0}| \leqslant KMabh, \quad |e_{1,1}| \leqslant KMb.$$

Подставляя найденные оценки в (5) и (11), имеем

$$|e_{1,0}| \leqslant KMab, \quad |e_{2,0}| \leqslant KMb, \quad |e_{0,1}| \leqslant KMab.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (4) и вычисляя производные первого и второго порядка по переменным x и y, получим справедливость теоремы 2. $\square$

§ 4. Оценки снизу

В этом параграфе покажем, что для условий интерполяции (1), (7), (8) существуют такие константы $C^*_{i,j} > 0$ и функция $f^* \in W^3M$, что для $e(x,y) = f^*(x,y) - P_2(f^*;x,y)$ справедливы следующие неравенства:

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\| \geqslant C^*_{s-j,j}MH^{3-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 2, \quad j \leqslant s \leqslant 2). \tag{12}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник, положив $a = b = \frac{H}{2}$. В качестве функции возьмем

$$f_1^*(x,y) = M(b^2 - x^2)x + M(b-x)y^2$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен

$$P_2(f_1^*;x,y) = p_{0,0} + p_{1,0}x + p_{2,0}x^2 + p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{0,2}y^2.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции. Из условий (1) при $i = 1,2$ имеем

$$\begin{cases} p_{0,0} - ap_{1,0} + a^2p_{2,0} = 0, \\ p_{0,0} + bp_{1,0} + b^2p_{2,0} = 0. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{1,0} = 0, \quad p_{2,0} = -\frac{1}{b^2}p_{0,0}. \tag{13}$$

Из условия (8) получим

$$p_{0,2} = Mb. \tag{14}$$

Тогда, используя условие (1) при $i = 3$, учитывая полученную оценку (14), имеем

$$p_{0,1} = -\frac{1}{h}p_{0,0}. \tag{15}$$

Из условия (7) при $i = 2,3$ имеем при $c = \pm b$

$$h\left(p_{1,0} + \frac{c}{2}p_{2,0} + \frac{h}{2}p_{1,1}\right) + c\left(p_{0,1} + \frac{c}{2}p_{1,1} + \frac{h}{2}p_{0,2}\right) = h\frac{\partial f_1^*(x,y)}{\partial x} + c\frac{\partial f_1^*(x,y)}{\partial y}.$$

Откуда, учитывая полученные равенства (13)–(15), следует

$$p_{0,0} = 0, \quad p_{1,1} = -\frac{1}{2}Mh. \tag{16}$$

Подставляя найденные коэффициенты (13)–(16), получаем

$$P_2(f_1^*;x,y) = -\frac{1}{2}Mhxy + Mby^2,$$

$$e(x,y) = M\left(b^2x - x^3 - xy^2 + \frac{h}{2}xy\right).$$

Таким образом,

$$\|e(x,y)\| \geqslant e\left(\frac{b}{3},\frac{h}{2}\right) = \frac{8}{27}Mb^3 = \frac{1}{27}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}\right\| \geqslant \frac{\partial e}{\partial x}\left(\frac{b}{3},\frac{h}{2}\right) = \frac{2}{3}Mb^2 = \frac{1}{6}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x^2}\right\| \geqslant \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\left(-\frac{b}{6},y\right) = Mb = \frac{1}{2}MH,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\right\| \geqslant \frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\left(-\frac{b}{2},y\right) = Mb = \frac{1}{2}MH.$$

Заметим, что здесь отсутствуют оценки для $\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|$. Чтобы их получить, подправим нашу функцию, добавив одно слагаемое

$$f_2^*(x,y) = M(b^2-x^2)x + M(b-x)y^2 + M(b^2-x^2)y,$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен

$$P_2(f_2^*;x,y) = p_{0,0} + p_{1,0}x + p_{2,0}x^2 + p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{0,2}y^2.$$

Аналогично коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции. При этом равенства (13), (14) остаются справедливы. Равенство (15) заменяется соотношением

$$p_{0,1} = Mb^2 - \frac{1}{h}p_{0,0}. \tag{17}$$

Тогда из условия (7) при $i = 2,3,$ подставляя соотношения (13), (14) и (17), получим

$$p_{0,0} = \frac{1}{4}Mb^2h + \frac{Mb^2h^3}{4(b^2+h^2)}, \quad p_{1,1} = -\frac{1}{2}Mh. \tag{18}$$

Тогда

$$P_2(f_2^*;x,y) = \frac{1}{4}Mb^2h + \frac{Mb^2h^3}{4(b^2+h^2)} - \left(\frac{1}{4}Mh + \frac{Mh^3}{4(b^2+h^2)}\right)x^2 +$$
$$+\left(\frac{3}{4}Mb^2 - \frac{Mb^2h^2}{4(b^2+h^2)}\right)y - \frac{1}{2}Mhxy + Mby^2,$$

$$e(x,y) = M\left(b^2x - x^3 - xy^2 + \frac{h}{2}xy - \frac{1}{4}b^2h + \frac{h}{4}x^2 + \frac{h^3x^2 + b^2h^2y - b^2h^3}{4(b^2+h^2)}\right).$$

Таким образом,

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\right\| \geqslant \frac{\partial e}{\partial y}\left(\frac{b}{3},\frac{h}{4}\right) = M\left(\frac{5}{36}b^2 + \frac{b^2h^2}{4(b^2+h^2)}\right) \geqslant \frac{5}{36}Mb^2 = \frac{5}{144}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x\partial y}\right\| \geqslant \frac{\partial^2 e}{\partial x\partial y}\left(-\frac{b}{4},\frac{h}{4}\right) = \frac{1}{2}Mb = \frac{1}{4}MH.$$

А значит, оценки снизу (12) получены полностью.

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet P. G., Raviart P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Rat. Mech. and Anal. — 1972. — Vol. 46, № 3. — P. 177–199.
2. Субботин Ю. Н. Многомерная кратная полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции: Сб. Новосибирск, 1981. — С. 148–152.
3. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. ИММ УрО РАН. — 1992. — Т. 2. — С. 110–119.
4. Subbotin Yu. N. A New Cubic Element in the FEM // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. — 2005. — Suppl. 2. — P. S176–S187.
5. Baidakova N. V. Jn some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling. — 1999. — Vol. 14, № 2. — P. 87–107.
6. Baidakova N. V. A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. — 2005. — Suppl. 2. — P. S49–S55.
7. Латыпова Н. В. Погрешность аппроксимации многочленами степени $4k+3$ на треугольнике // Труды Международной школы С. Б. Стечкина по теории функций: сб. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. — С. 128–137.
8. Latypova N. V. Error estimates of approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. — 2002. — Suppl. 1. — P. S190–S213.
9. Латыпова Н. В. Погрешность кусочно–кубической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2003. — С. 3–10.

Поступила в редакцию 08.08.08

N. V. Latypova

Error of interpolation by a piecewise parabolic polynomial on a triangle

This paper is devoted to analysing the interpolation of the function of two variables by a parabolic polynomial on a triangle for the finite element method. The estimates of error for a given piecewise parabolic polynomial depend only on the diameter of restricted partition and don't depend on the angles of triangulation.

Keywords: error of interpolation, piecewise parabolic polynomial, triangulation, finite element method.

Mathematical Subject Classifications: 41A05

Латыпова Наталья Владимировна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: nlatypova@udm.ru