МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 517.977.1 + 517.926

© *В. А. Зайцев*

СОГЛАСОВАННОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

Исследуется свойство согласованности линейной управляемой системы с наблюдателем. Получены новые необходимые условия и достаточные условия согласованности. Исследована задача управления спектром в системе с линейной неполной обратной связью; получены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости спектра в случае, когда коэффициенты системы имеют специальный вид. Установлена связь между свойством согласованности стационарной системы с наблюдателем и глобальной управляемостью спектра замкнутой системы.

Ключевые слова: управляемая система, неполная обратная связь, согласованность, управление спектром.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$, $*$ означает операцию транспонирования вектора или матрицы; если $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец, то $x^* \in \mathbb{R}^{n*}$ — вектор-строка; $M_{m,n}$ — пространство вещественных $m \times n$-матриц с нормой $|A| = \max\limits_{|x|\leqslant 1}|Ax|$; $M_n := M_{n,n}$; $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, то есть $e_1 = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1)$; $I = [e_1, \ldots, e_n] \in M_n$ — единичная матрица; J — первый единичный косой ряд, то есть $J := \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_n$; $J_0 := I$, $J_i := J^i$, $i \in \mathbb{N}$ (то есть $J_1 := J$, $J_k = 0 \in M_n$ при $k \geqslant n$); $\chi(A; \lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A; $\operatorname{Sp} A$ — след матрицы A.

Рассмотрим линейную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C^*(t)x, \quad (t, x, u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \tag{1.1}$$

где матричные функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ кусочно-непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Обозначим через $X(t, s)$ матрицу Коши соответствующей однородной системы $\dot{x} = A(t)x$. Пусть управление в системе (1.1) строится по принципу линейной неполной обратной связи в виде $u = U(t)y$, где $U : \mathbb{R} \to M_{m,k}$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция. Тогда система (1.1) переходит в замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x. \tag{1.2}$$

Если обратная связь — полная, то есть $C(t) \equiv I$, $y = x$, $u = U(t)x$, то соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x. \tag{1.3}$$

В системах (1.2) и (1.3) управляющими воздействиями являются коэффициенты матрицы $U(t)$.

Исследуется задача управления асимптотическим поведением однородной системы (1.2) (или (1.3)), в частности, задача стабилизации. В стационарном случае она заключается в том, чтобы построить (стационарное) управление U так, чтобы спектр собственных значений матрицы системы (1.2) (или (1.3)) переместился в левую полуплоскость. В нестационарном случае речь идет о задаче управления характеристическими показателями Ляпунова. Задача управления показателями Ляпунова может быть рассмотрена в глобальной или в локальной постановке. Первые результаты об управлении показателями Ляпунова в нестационарном случае были получены в локальной постановке для системы (1.3) в работе [1]. Ключевым свойством в этой задаче является свойство полной управляемости системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Это свойство позволяет перенести метод поворотов В. М. Миллионщикова на линейные управляемые системы и таким образом решить задачу локального управления показателями Ляпунова в системе (1.3).

В работе [2] было введено понятие согласованности для системы (1.1). Это свойство позволяет применить метод поворотов к системе (1.2).

Определение 1 (см. [2]). Система (1.1) называется *согласованной на отрезке* $[t_0, t_0+\vartheta]$, если существует $l > 0$ такое, что для всякой $G \in M_n$ найдется кусочно-непрерывное ограниченное управление $\widehat{U} : [t_0, t_0+\vartheta] \to M_{m,k}$ такое, что решение матричной задачи Коши

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)\widehat{U}(t)C^*(t)X(t,t_0), \quad Z(t_0) = 0$$

удовлетворяет условию $Z(t_0+\vartheta) = G$, при этом $|\widehat{U}(t)| \leqslant l|G|$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$.

Если $C(t) \equiv I$, то свойство согласованности системы (1.1) на $[t_0, t_0+\vartheta]$ равносильно свойству полной управляемости системы (1.4) на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Свойство согласованности системы (1.1) исследовалось в работах [2, 3, 4, 5]. На основе этого свойства были получены результаты о локальной управляемости показателей Ляпунова системы (1.2) [6, 7, 4, 8], об устойчивости показателей Ляпунова системы (1.2) [7].

Предположим теперь, что система (1.1) стационарна:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x,u,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k. \tag{1.5}$$

Пусть матрица обратной связи в системе (1.5) также стационарна: $u = Ux$. Соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Асимптотическое поведение системы (1.6) характеризуется спектром собственных значений матрицы этой системы. Допуская некоторую вольность, спектр собственных значений матрицы системы (1.6) будем называть спектром системы (1.6).

Поставим задачу о глобальном управлении спектром системы (1.6). Будем говорить, что *задача управления спектром системы* (1.6) *разрешима,* если для любого многочлена n-й степени $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i найдется постоянное управление $\widehat{U} \in M_{m,k}$ такое, что $\chi(A + B\widehat{U}C^*; \lambda) = p(\lambda)$. По-другому эта задача еще называется задачей о назначении (или размещении) собственных значений, или задачей о модальном управлении. Если система стационарна, то полный спектр характеристических показателей Ляпунова совпадает с вещественными частями собственных значений матрицы системы (1.6). Если для любого набора $\mu_1, \ldots, \mu_n$ вещественных чисел существует (допустимое) управление в системе (1.2) такое, что полный спектр показателей Ляпунова системы (1.2) с таким управлением совпадает с этим набором, то говорят, что спектр системы (1.2) глобально управляем. Мы будем пользоваться этой терминологией и для стационарных систем, то есть будем говорить, что спектр системы (1.6) глобально управляем, если разрешима задача управления спектром системы (1.6).

Известно [9, 10], что в случае когда $C = I$, спектр системы (1.6) глобально управляем тогда и только тогда, когда система

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.7}$$

вполне управляема, то есть $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$. Свойство согласованности системы (1.5) при $C = I$ также эквивалентно полной управляемости системы (1.7). Таким образом, при $C = I$ согласованность системы (1.5) равносильна глобальной управляемости спектра системы (1.6). Известно также (см., например, [11, с. 178]), что если задача управления спектром системы (1.6) разрешима, то система (1.7) вполне управляема, а система $\dot{x} = Ax$, $y = C^*x$ вполне наблюдаема. Эти условия являются в свою очередь и необходимыми условиями согласованности системы (1.6) [2]. Е. Л. Тонковым был поставлен вопрос, будет ли свойство согласованности системы (1.5) эквивалентно глобальной управляемости спектра системы (1.6) для произвольных A, B, C. В данной работе установлены условия, при которых эти свойства будут эквивалентны.

Задаче управления спектром системы (1.6) посвящено большое количество работ (см. обзор в [11, с. 179–181]). Было установлено, в частности, что для глобальной управляемости спектра в типическом случае (то есть для почти всех A, B, C) достаточным условием является неравенство $m+k \geqslant n+1$ [12, 13], а необходимым (но не достаточным) условием является неравенство $mk \geqslant n$ [14, 15]. Здесь слова «для почти всех» означают, что свойство, зависящее от матрицы, не выполняется на подмножестве нуль-множества некоторого нетривиального многочлена от элементов матрицы.

В настоящей работе продолжается исследование свойства согласованности системы (1.5). Получены новые необходимые условия и достаточные условия согласованности, в том числе для стационарных систем. Исследована задача управления спектром; получены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости спектра в случае, когда коэффициенты системы имеют специальный вид. Установлена связь между свойством согласованности стационарной системы (1.5) и глобальной управляемостью спектра системы (1.6).

§ 2. Согласованные системы

В этом параграфе приведены основные свойства согласованных систем. Некоторые утверждения доказаны в работах [2, 4, 5].

Обозначим через $\mathrm{vec} : M_{n,m} \to \mathbb{R}^{nm}$ отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$ $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ по строкам в вектор-столбец $\mathrm{vec}H := \mathrm{col}\,(h_{11}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nm})$. Нетрудно проверить, что для любых $L \in M_{m,n}$, $A \in M_{n,k}$, $N \in M_{k,l}$ равенство $B = LA$ эквивалентно $\mathrm{vec}\,B = (L \otimes I)\mathrm{vec}\,A$, $I \in M_k$; равенство $C = AN$ эквивалентно $\mathrm{vec}\,C = (I \otimes N^*)\mathrm{vec}\,A$, $I \in M_n$; равенство $D = LAN$ эквивалентно $\mathrm{vec}\,D = (L \otimes N^*)\mathrm{vec}\,A$. Здесь $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц [16, с. 235]. Отметим также, что для матриц $A, B \in M_{n,m}$ выполнено равенство $\mathrm{Sp}\,(A^*B) = (\mathrm{vec}\,A)^*(\mathrm{vec}\,B)$.

Введем в рассмотрение матрицы $\widehat{B}(t) = X(t_0, t)B(t) \in M_{n,m}$, $\widehat{C}(t) = X^*(t, t_0)C(t) \in M_{n,k}$, $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Построим матрицу

$$\Gamma(\vartheta) = \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \Big(\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)\Big) \otimes \Big(\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t)\Big)\, dt \in M_{n^2}.$$

Матрица $\Gamma(\vartheta)$ называется *матрицей согласования* системы (1.1) на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ [2]. Матрица согласования является аналогом матрицы управляемости $W(\vartheta) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)\, dt$ системы (1.4) на $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Матрица $\Gamma(\vartheta)$ представляет собой матрицу Грама для совокупности вектор-строк $(n^2 \times mk)$-матрицы $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$. Известно, что система (1.4) вполне управляема на $[t_0, t_0 + \vartheta]$ тогда и только тогда, когда матрица $W(\vartheta)$ положительно определена, что в свою очередь равносильно линейной независимости вектор-строк матрицы $\widehat{B}(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$. Аналогичное утверждение имеет место для согласованных систем.

Теорема 1 (см. [2, теорема 1]). *Следующие свойства эквивалентны:*

a) *система* (1.1) *согласованна на* $[t_0, t_0 + \vartheta]$;

b) *матрица* $\Gamma(\vartheta)$ *положительно определена;*

c) *строки матрицы* $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$ *линейно независимы на* $[t_0, t_0 + \vartheta]$.

Утверждение 1. *Система* (1.1) *не является согласованной на* $[t_0, t_0+\vartheta]$ *тогда и только тогда, когда существует ненулевая матрица* $H \in M_n$ *такая, что*

$$C^*(t)X(t,t_0)HX(t_0,t)B(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_0+\vartheta].$$

Доказательство. В силу теоремы 1 система (1.1) не является согласованной на $[t_0, t_0+\vartheta]$ в том и только в том случае, если строки матрицы $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$ линейно зависимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$, то есть существует ненулевой вектор

$$h = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

такой, что $h^*(\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)) = 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$. Транспонируем это равенство, получим $(\widehat{B}^*(t) \otimes \widehat{C}^*(t))h = 0$. Пусть $H^* = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n$ — это прообраз вектора h при отображении vec, то есть $\operatorname{vec} H^* = h$. Тогда $H \neq 0$ и

$$0 = (\widehat{B}^*(t) \otimes \widehat{C}^*(t))(\operatorname{vec} H^*) = \operatorname{vec}(\widehat{B}^*(t)H^*\widehat{C}(t)) = \operatorname{vec}\big((\widehat{C}^*(t)H\widehat{B}(t))^*\big) =$$
$$= \operatorname{vec}\big((C^*(t)X(t,t_0)HX(t_0,t)B(t))^*\big), \quad t \in [t_0, t_0+\vartheta],$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Если* $C^*(t)B(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$, *то система* (1.1) *не является согласованной на* $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Это следствие вытекает из утверждения 1, если взять $H = I$.

Лемма 1. *Строки матрицы* $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$ *линейно зависимы на* $[t_0, t_0+\vartheta]$ *тогда и только тогда, когда строки матрицы* $\widehat{C}(t) \otimes \widehat{B}(t)$ *линейно зависимы на* $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Доказательство.

$$(\operatorname{vec} H)^*(\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)) = 0 \Longleftrightarrow (\widehat{B}^*(t) \otimes \widehat{C}^*(t))(\operatorname{vec} H) = 0 \Longleftrightarrow (\widehat{B}^*(t)H\widehat{C}(t)) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\widehat{C}^*(t)H^*\widehat{B}(t)) = 0 \Longleftrightarrow (\widehat{C}^*(t) \otimes \widehat{B}^*(t))(\operatorname{vec} H^*) = 0 \Longleftrightarrow (\operatorname{vec} H^*)^*(\widehat{C}(t) \otimes \widehat{B}(t)) = 0. \quad \square$$

Из теоремы 1, утверждения 1 и леммы 1 вытекает теорема, которая иллюстрирует связь между согласованностью системы (1.1) и свойствами управляемости и наблюдаемости и определяет соотношения двойственности между сопряженными системами.

Теорема 2. *Пусть даны следующие утверждения:*

(a) *система* (1.1) *согласованна на* $[t_0, t_0+\vartheta]$;

(b) *матрица* $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \Big(\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)\Big) \otimes \Big(\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t)\Big)\, dt$ *положительно определена;*

(c) *матрица* $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \Big(\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t)\Big) \otimes \Big(\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)\Big)\, dt$ *положительно определена;*

(d) *система* $\dot{x} = -A^*(t)x + C(t)u$, $y = B^*(t)x$ *согласованна на* $[t_0, t_0+\vartheta]$;

(e) *система* (1.4) *вполне управляема на* $[t_0, t_0+\vartheta]$;

(f) *система*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad y = C^*(t)x, \quad (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \tag{2.1}$$

вполне наблюдаема на $[t_0, t_0+\vartheta]$;

(g) *система* $\dot{x} = -A^*(t)x + C(t)u$ *вполне управляема на* $[t_0, t_0+\vartheta]$;

(h) *система* $\dot{x} = -A^*(t)x$, $y = B^*(t)x$ *вполне наблюдаема на* $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Имеет место следующая цепочка импликаций:

$(h) \Longleftrightarrow (e) \Longleftarrow (a) \Longleftrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c) \Longleftrightarrow (d) \Longrightarrow (f) \Longleftrightarrow (g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 следует, что $(a) \Longleftrightarrow (b)$. Соотношение $(c) \Longleftrightarrow (d)$ следует из теоремы 1 и равенства $Z(t,s) = X^*(s,t)$ для матрицы Коши $Z(t,s)$ системы $\dot z = -A^*(t)z$. Из теоремы 1 и леммы 1 следует $(b) \Longleftrightarrow (c)$. Далее, полная наблюдаемость системы (2.1) эквивалентна тому, что матрица $\widetilde{W}(\vartheta) := \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} (\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t))\,dt$ положительно определена. Соотношения $(f) \Longleftrightarrow (g)$ и $(e) \Longleftrightarrow (h)$ — это известные соотношения двойственности между сопряженными управляемыми и наблюдаемыми системами (см., например, [17, с. 304]). Остается показать, что $(a) \Longrightarrow (e)$ (импликация $(d) \Longrightarrow (g)$ доказывается аналогично). Допустим, что система (1.4) не является вполне управляемой на $[t_0, t_0+\vartheta]$, то есть найдется ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $h^*X(t_0,t)B(t) \equiv 0$, $[t_0, t_0+\vartheta]$. Пусть $H = hh^*$, тогда $C^*(t)X(t,t_0)HX(t_0,t)B(t) = C^*(t)X(t,t_0)hh^*X(t_0,t)B(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$, $H \neq 0$. Из утверждения 1 следует, что система (1.1) не является согласованной. Теорема доказана. □

Замечание 1. Одновременное выполнение условий полной управляемости системы (1.4) и полной наблюдаемости системы (2.1) на $[t_0, t_0+\vartheta]$ не влечет согласованность системы (1.1) на $[t_0, t_0+\vartheta]$. В работе [2] приведен соответствующий контрпример нестационарной системы для $n = m = k = 1$. В случае стационарной системы утверждение $(e)\&(f) \Longrightarrow (a)$ также неверно, вообще говоря (хотя при $n = m = k = 1$ оно верно). Рассмотрим пример: пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.2}$$

Система (1.4) с матрицами (2.2) является вполне управляемой на любом отрезке (поскольку $\operatorname{rank}[B, AB] = 2$), а система (2.1) с матрицами (2.2) вполне наблюдаема на любом отрезке (так как $\operatorname{rank}[C, A^*C] = 2$), но система (1.1) с матрицами (2.2) не является согласованной (см. далее следствие 5). Однако если потребовать дополнительно, чтобы какая-нибудь из матриц $B(t)$ или $C(t)$ имела ранг равный n, то система (1.1) будет согласованной, а именно справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если система (1.4) вполне управляема на $[t_0, t_0+\vartheta]$ и $\det C(t)C^*(t) \geqslant \alpha > 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$ или если система (2.1) вполне наблюдаема на $[t_0, t_0+\vartheta]$ и $\det B(t)B^*(t) \geqslant \alpha > 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$, то система (1.1) согласованна на $[t_0, t_0+\vartheta]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую часть утверждения (вторая часть будет следовать из теоремы двойственности 2). Мы имеем $C(t) \in M_{n,k}$, $C(t)C^*(t) \in M_n$. Если $k < n$, то $\operatorname{rank} C(t)C^*(t) \leqslant \operatorname{rank} C(t) \leqslant k < n$, поэтому $\det C(t)C^*(t) = 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$. Следовательно, $k \geqslant n$ и $\operatorname{rank} C(t) = n$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$. Далее, поскольку определитель отделен от нуля, существует ограниченная обратная матрица $C_1(t) = (C(t)C^*(t))^{-1} \in M_n$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$ (определитель которой также отделен от нуля в силу ограниченности $C(t)$). Положим $C_2(t) = C^*(t)C_1(t)$. Тогда $C(t)C_2(t) = I \in M_n$. Предположим теперь, что система (1.1) не является согласованной на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Тогда найдется ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что $C^*(t)X(t,t_0)HX(t_0,t)B(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$. Поэтому

$$HX(t_0,t)B(t) = X(t_0,t)C_2^*(t)C^*(t)X(t,t_0)HX(t_0,t)B(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_0+\vartheta].$$

Поскольку матрица H ненулевая, то существует ненулевая строка $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$ матрицы H такая, что $\xi X(t_0,t)B(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$. Следовательно, строки матрицы $X(t_0,t)B(t)$ линейно зависимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Отсюда следует, что система (1.4) не является вполне управляемой. Утверждение доказано. □

Построим по системе (1.1) так называемую «большую систему» [4]

$$\dot z = P(t)z + Q(t)v, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^{mk}. \tag{2.3}$$

Здесь $P(t) = A(t) \otimes I - I \otimes A^*(t) \in M_{n^2}$, $I \in M_n$, $Q(t) = B(t) \otimes C(t) \in M_{n^2,mk}$.

Теорема 3 (см. [4]). *Система* (1.1) *согласованна на* $[t_0, t_0+\vartheta]$ *тогда и только тогда, когда система* (2.3) *вполне управляема на* $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Эта теорема вытекает из того факта, что матрица управляемости большой системы и матрица согласования системы (1.1) совпадают.

Теорема 3 позволяет получать различные критерии согласованности из известных критериев полной управляемости. Из этой теоремы, в частности, следует, что если система (1.1) стационарна, то из согласованности системы (1.1) на каком-либо отрезке следует согласованность этой системы на любом отрезке. Поэтому для стационарных систем можно не указывать отрезок, на котором система согласованна.

§ 3. Согласованность стационарных систем

В этом параграфе установлены различные необходимые условия и достаточные условия согласованности стационарных систем.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k. \tag{3.1}$$

Управление в системе (3.1) имеет вид $u = Uy$, $U \in M_{m,k}$ — постоянная матрица. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x.$$

Обозначим через $[P, Q] := PQ - QP$ коммутатор матриц P и Q, а через $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ — линейную оболочку элементов $a_1, \ldots, a_n$ линейного пространства.

Теорема 4. *Следующие свойства эквивалентны:*

(a) *система* (3.1) *не является согласованной;*

(b) *существует ненулевая матрица* $H \in M_n$ *такая, что для любого отрезка* $[t_0, t_0+\vartheta] \subset \mathbb{R}$

$$C^*e^{A(t-t_0)}He^{-A(t-t_0)}B \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_0+\vartheta]. \tag{3.2}$$

(c) *существует ненулевая матрица* $H \in M_n$ *такая, что для всех* $\nu = \overline{0, n^2-1}$ *выполнены равенства* $C^*N_\nu B = 0$, *где* $N_0 = H$, $N_\nu = [A, N_{\nu-1}]$, $\nu = \overline{1, n^2-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение $(a) \Longleftrightarrow (b)$ следует из утверждения 1, сформулированного для стационарной системы на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$. Докажем импликацию $(b) \Longrightarrow (c)$. Подставим $t = t_0$ в тождество (3.2), получим $C^*HB = 0$. Дифференцируя тождество (3.2) n^2-1 раз в точке $t = t_0$, получим $C^*N_\nu B = 0$, $\nu = \overline{1, n^2-1}$, то есть свойство (c).

Докажем импликацию $(c) \Longrightarrow (b)$. Пусть существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что $C^*N_\nu B = 0$, $\nu = \overline{0, n^2-1}$. Если матрицы $N_0, \ldots, N_{n^2-1}$ линейно независимы, то $N_\nu \in \langle N_0, \ldots, N_{n^2-1}\rangle = M_n$ для любого $\nu \geqslant n^2$. Если найдется номер $s \in \{\overline{1, n^2-1}\}$ такой, что матрицы $N_0, \ldots, N_{s-1}$ линейно независимы, а $N_s \in \mathfrak{N} := \langle N_0, \ldots, N_{s-1}\rangle$, то тогда $N_\nu \in \mathfrak{N}$ для всех $\nu \geqslant s$. Покажем это по индукции. Имеем $N_s \in \mathfrak{N}$. Пусть $N_r \in \mathfrak{N}$, $r \geqslant s$, то есть $N_r = \sum\limits_{i=0}^{s-1} c_i N_i$. Тогда

$$N_{r+1} = [A, N_r] = [A, \sum_{i=0}^{s-1} c_i N_i] = \sum_{i=0}^{s-1} c_i [A, N_i] = \sum_{i=0}^{s-1} c_i N_{i+1} = \sum_{i=1}^{s} c_{i-1} N_i = \sum_{i=1}^{s-1} c_{i-1} N_i + c_{s-1} N_s \in \mathfrak{N},$$

поскольку $N_s \in \mathfrak{N}$ и $N_i \in \mathfrak{N}$ для всех $i = \overline{1, s-1}$.

Отсюда следует, что $C^*N_\nu B = 0$ для всех $\nu = 0, 1, \ldots$ и

$$0 \equiv C^*HB + C^*(AH - HA)B(t-t_0) + C^*(A^2H - 2AHA + HA^2)B \cdot \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots =$$

$$= C^*\big(I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \ldots\big)H\big(I - A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 - \ldots\big)B =$$

$= C^*e^{A(t-t_0)}He^{-A(t-t_0)}B$. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Следующие свойства эквивалентны:*

(*a*) *система* (3.1) *согласованна;*

(*b*) *тождество* (3.2) *возможно только при* $H = 0 \in M_n$;

(*c*) *выполнение равенств* $C^* N_\nu B = 0$, $\nu = \overline{0, n^2-1}$, *где* $N_0 = H$, $N_\nu = [A, N_{\nu-1}]$, *возможно, только если* $H = 0$.

Замечание 2. Равенства $C^* N_\nu B = 0$ эквивалентны равенствам $C^* \widetilde{N}_\nu B = 0$, где $\widetilde{N}_0 = H$, $\widetilde{N}_\nu = [\widetilde{N}_{\nu-1}, A] = [-A, \widetilde{N}_{\nu-1}]$. Поэтому согласованность системы (3.1) с матрицами A, B, C эквивалентна согласованности системы (3.1) с матрицами $-A, B, C$.

Следствие 3. *Если система* (3.1) *с матрицами* A, B, C *согласованна, то для любых невырожденных матриц* $T \in M_m$, $R \in M_k$ *система* (3.1) *с матрицами* $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{B} = BT$, $\widetilde{C} = CR$ *также является согласованной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если система (3.1) с матрицами $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ не согласованна, то по теореме 4 существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что

$$\widetilde{C}^* e^{A(t-t_0)} H e^{-A(t-t_0)} \widetilde{B} \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta].$$

Умножая на это равенство слева матрицу $(R^*)^{-1}$, а справа матрицу T^{-1}, получим равенство (3.2), следовательно, система (3.1) с матрицами A, B, C не является согласованной. Получили противоречие. Следствие доказано. □

Следствие 4. *Если система* (3.1) *с матрицами* A, B, C *согласованна, то для любой невырожденной матрицы* $S \in M_n$ *система* (3.1) *с матрицами* $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$, *где* $\widetilde{A} = SAS^{-1}$, $\widetilde{B} = SB$, $\widetilde{C}^* = C^* S^{-1}$, *также является согласованной.*

Это утверждение следует из теоремы 4, равенства

$$\widetilde{C}^* e^{\widetilde{A}(t-t_0)} \widetilde{H} e^{-\widetilde{A}(t-t_0)} \widetilde{B} = C^* e^{A(t-t_0)} H e^{-A(t-t_0)} B, \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta],$$

где $\widetilde{H} = SHS^{-1}$, и того, что матрицы H и $\widetilde{H}$ равны или не равны нулю одновременно.

Теорема 5. *Если* $\operatorname{rank} C = n$, *то система* (3.1) *согласованна тогда и только тогда, когда система*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \tag{3.3}$$

вполне управляема (*то есть* $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$).

Если $\operatorname{rank} B = n$, *то система* (3.1) *согласованна тогда и только тогда, когда система*

$$\dot{x} = Ax, \quad y = C^* x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^k \tag{3.4}$$

вполне наблюдаема (*то есть* $\operatorname{rank}[C, A^*C, \ldots, (A^*)^{n-1}C] = n$).

Эта теорема следует из утверждения 2.

Таким образом, если одна из матриц B или C имеет ранг равный n (а значит, $m \geqslant n$ или $k \geqslant n$), то для проверки согласованности системы следует построить матрицу, состоящую из n строк и nk (или nm) столбцов и проверить строки на линейную независимость. В общем случае требуется построить большую систему $\dot{z} = Pz + Qv$, $P = A \otimes I - I \otimes A^*$, $Q = B \otimes C$, затем построить $(n^2 \times n^2 mk)$-матрицу $R = [Q, PQ, \ldots, P^{n^2-1}Q]$ и проверить условие $\operatorname{rank} R = n^2$. Это условие является необходимым и достаточным условием согласованности системы (3.1), но его трудно применять вследствие больших размерностей. Поэтому представляет интерес получение условий согласованности в терминах небольших размерностей, порядка n. Далее будет установлен ряд таких условий.

Теорема 6. *Пусть* $i_1(\lambda), \dots, i_s(\lambda)$ *— нетривиальные (то есть отличные от единицы) инвариантные многочлены* [18, с. 134] *матрицы* A *степеней* $n_1 \geqslant \dots \geqslant n_s$ *соответственно* $(n_1 + \ldots + n_s = n)$. *Если система* (3.1) *согласованна, то* $mk \geqslant n_0 := n_1 + 3n_2 + \ldots + (2s-1)n_s$.

Доказательство. Известно [18, с. 192], что совокупность матриц, коммутирующих с матрицей A, образует линейное подпространство $\mathfrak{M} \subset M_n$ размерности n_0. Выберем базис $P_1, \dots, P_{n_0}$ в $\mathfrak{M}$. Положим $H := \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{n_0} P_{n_0}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ определяются из условия

$$\sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i C^* P_i B = 0. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) представляет собой систему из mk уравнений с n_0 неизвестными коэффициентами α_i. Если $mk < n_0$, то система (3.5) всегда имеет нетривиальное решение $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0})$. В этом случае $H \neq 0$, $C^* H B = 0$, и поскольку H коммутирует с A, то $N_\nu = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$. Следовательно, $C^* N_\nu B = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$. По теореме 4 система (3.1) не является согласованной. Теорема доказана. □

Следствие 5. *Если* $mk < n$, *то система* (3.1) *не является согласованной.*

Это утверждение вытекает из теоремы 6 и того факта, что $n_0 \geqslant n$. Таким образом, необходимым условием согласованности стационарной системы (3.1) является условие $mk \geqslant n$ (в отличие от нестационарных систем, которые могут быть согласованными для любого n и при $m = k = 1$).

Замечание 3. Очевидно, что свойство согласованности сохраняется, если поменять местами столбцы в матрице B или в матрице C. Легко видеть также, что если система (3.1) с матрицами A, B, C согласованна и столбцы матрицы B (или C) линейно зависимы, то система (3.1) с матрицами $A, \widetilde{B}, \widetilde{C}$, где матрицы $\widetilde{B}, \widetilde{C}$ получены из матриц B, C вычеркиванием линейно зависимых столбцов, также согласованна. Поэтому без ограничения общности можно считать, что матрицы B и C имеют полный ранг и $m \leqslant n$, $k \leqslant n$. Далее, если $k = n$, то $\operatorname{rank} C = n$, и согласованность системы (3.1) в силу теоремы 5 сводится к полной управляемости системы (3.3). Аналогично, если $m = n$, то $\operatorname{rank} B = n$, и согласованность системы (3.1) сводится к полной наблюдаемости системы (3.4). В связи с этим представляет интерес получение нетривиальных условий согласованности в случае, когда $m < n$, $k < n$.

Рассмотрим к примеру систему (3.1), в которой $n = 2$. Если $m < n$, $k < n$, то $m = k = 1$. Но в этом случае в силу следствия 5 система (3.1) не является согласованной. Таким образом, в двумерном случае свойство согласованности системы (3.1) сводится к одному из двух приведенных выше тривиальных случаев, то есть справедливо утверждение.

Утверждение 3. *Пусть* $n = 2$. *Система* (3.1) *согласована тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} C = n$ *и система* (3.3) *вполне управляема или* $\operatorname{rank} B = n$ *и система* (3.4) *вполне наблюдаема.*

При $n > 2$ свойство согласованности не сводится к одному из этих двух случаев. Рассмотрим, к примеру, систему (3.1) с матрицами

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Система с такими матрицами является согласованной, вполне управляемой и вполне наблюдаемой, но $m = k = 2 < 3 = n$. Аналогичные примеры можно построить для бо́льших n.

Предположим теперь, что матрица A циклическая [11, с. 179]. Это равносильно каждому из следующих утверждений:

a) характеристический многочлен $\chi(A;\lambda)$ матрицы A совпадает с минимальным многочленом $\psi(A;\lambda)$ матрицы A;

b) матрицы I, A, $\ldots$, A^{n-1} линейно независимы;

c) матрица A имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен;

d) в жордановой нормальной форме матрицы A различным клеткам Жордана соответствуют различные собственные значения;

e) геометрическая кратность каждого собственного значения равна 1;

f) все элементарные делители матрицы A взаимно просты;

g) матрица A подобна матрице Фробениуса

$$Y = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{array} \right\|.$$

Для систем с циклической матрицей A имеет место следующее необходимое условие согласованности.

Теорема 7. *Пусть матрица A циклическая. Если система* (3.1) *согласованна, то матрицы*

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{3.6}$$

линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что матрицы (3.6) линейно зависимы. Тогда существует набор $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ такой, что

$$c_1C^*B + c_2C^*AB + \ldots + c_nC^*A^{n-1}B = 0. \tag{3.7}$$

Возьмем $H := c_1I + c_2A + \ldots + c_nA^{n-1}$. Тогда $H \neq 0$, поскольку матрицы I, A, $\ldots$, A^{n-1} линейно независимы. Далее, матрица H коммутирует с матрицей A^i для любого $i = 0, 1, \ldots$, а следовательно, и с матрицей e^{At} для любого $t \in \mathbb{R}$. Имеем

$$C^*e^{At}He^{-At}B = C^*He^{At}e^{-At}B = C^*HB = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В силу теоремы 4 система (3.1) не является согласованной. Теорема доказана. □

Замечание 4. В общем случае, когда матрица A не является циклической, справедливо следующее утверждение. *Пусть* $\deg\psi(A;\lambda) = l$. *Если система* (3.1) *согласованна, то матрицы* $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{l-1}B$ *линейно независимы.* Это утверждение доказывается так же, как теорема 7.

Замечание 5. Утверждение, обратное к теореме 7, в общем случае неверно, то есть из того что матрицы (3.6) линейно независимы не следует, вообще говоря, согласованность системы (3.1), хотя цикличность матрицы A, конечно, следует. Действительно, если матрица A не является циклической, то матрицы I, A, $\ldots$, A^{n-1} линейно зависимы, то есть существует набор $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ такой, что $c_1I + c_2A + \ldots + c_nA^{n-1} = 0 \in M_n$. Умножая это равенство слева на матрицу C^* и справа на B, получим равенство (3.7), которое противоречит линейной независимости матриц (3.6). Приведем теперь пример системы, для которой матрицы (3.6) линейно независимы, но система (3.1) не является согласованной. На самом деле, мы приведем даже семейство таких примеров, зависящее от параметра, чтобы показать, что таких систем существует бесконечное множество.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1-r & r \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $r \in \mathbb{R}$ — любое число такое, что $r \neq 4$ и $r \neq 3$. Построим матрицы (3.6). Имеем

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 1-r & -3+r \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \; C^*AB = \begin{Vmatrix} 9-3r & -11+3r \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \; C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 25-7r & -27+7r \\ 1-r & r \end{Vmatrix}. \qquad (3.8)$$

Построим матрицу

$$V = [\mathrm{vec}\,(C^*B), \mathrm{vec}\,(C^*AB), \mathrm{vec}\,(C^*A^2B)] = \begin{Vmatrix} 1-r & 9-3r & 25-7r \\ -3+r & -11+3r & -27+7r \\ 1 & 0 & 1-r \\ 0 & 1 & r \end{Vmatrix}.$$

Найдем миноры третьего порядка матрицы V. Наибольший общий делитель этих миноров равен $(r-3)(r-4)$. Следовательно, $\mathrm{rank}\, V = 3$, а значит, матрицы (3.8) линейно независимы. Покажем, что система не является согласованной. Построим матрицу

$$H = \begin{Vmatrix} 1-r & r & -1 \\ -7+r & 12-2r & -5+r \\ -23+5r & 36-8r & -13+3r \end{Vmatrix}.$$

Тогда получаем, что $C^*HB = 0 \in M_2$. Далее построим матрицу $N_1 = AH - HA$, получим, что $N_1 = -H$, следовательно, $C^*N_1B = 0 \in M_2$. И так далее, будем строить матрицы $N_\nu = [A, N_{\nu-1}]$, получим, что $N_\nu = (-1)^\nu H$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$ и, значит, $C^*N_\nu B = 0 \in M_2$. По теореме 4 система не является согласованной.

Однако, если $\mathrm{rank}\, C = n$ (то есть когда согласованность совпадает с полной управляемостью), утверждение, обратное к теореме 7, верно, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 8. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(a) *матрица* A *циклическая и система* (3.3) *вполне управляема;*
(b) *матрицы* $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ *линейно независимы.*

Доказательство. Утверждение $(a) \Longrightarrow (b)$ совпадает с утверждением теоремы 7 при $C = I$. Докажем утверждение $(b) \Longrightarrow (a)$. Пусть матрицы $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ линейно независимы. Тогда матрицы $I, A, \ldots, A^{n-1}$ также линейно независимы. (Иначе, если $I, A, \ldots, A^{n-1}$ линейно зависимы, то существует набор $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ такой, что $c_1I + c_2A + \ldots + c_nA^{n-1} = 0 \in M_n$; но тогда и $c_1B + c_2AB + \ldots + c_nA^{n-1}B = 0 \in M_{n,m}$.) Следовательно, матрица A циклическая. Покажем, что система (3.3) вполне управляема. Предположим, что она не является вполне управляемой, то есть $\mathrm{rank}\,[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = p < n$. Тогда (см., например, [11, с. 49]) существует невырожденная матрица $S \in M_n$ такая, что преобразованные матрицы $\widetilde{A} = SAS^{-1}$, $\widetilde{B} = SB$ имеют вид

$$\widetilde{A} = \left\Vert \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & T \end{array} \right\Vert, \quad \widetilde{B} = \left\Vert \begin{array}{c} R \\ \hline 0 \end{array} \right\Vert, \quad P \in M_p, \quad T \in M_{n-p}, \quad R \in M_{p,m}.$$

Отсюда получаем, что

$$\widetilde{B} = \left\Vert \begin{array}{c} R \\ \hline 0 \end{array} \right\Vert, \quad \widetilde{A}\widetilde{B} = \left\Vert \begin{array}{c} PR \\ \hline 0 \end{array} \right\Vert, \quad \ldots, \quad \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B} = \left\Vert \begin{array}{c} P^{n-1}R \\ \hline 0 \end{array} \right\Vert.$$

Матрицы $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ линейно независимы, следовательно, матрицы $\widetilde{B} = SB$, $\widetilde{A}\widetilde{B} = SAB$, $\ldots$, $\widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B} = SA^{n-1}B$ также линейно независимы. Отсюда следует, что матрицы $R, PR, \ldots, P^{n-1}R$ линейно независимы. А отсюда, в свою очередь, следует линейная независимость матриц $I, P, \ldots, P^{n-1}$ (это доказывается с помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным). Но поскольку $P \in M_p$, то по теореме Гамильтона–Кэли матрицы $I, P, \ldots, P^p$ линейно зависимы. Получаем противоречие, так как $p < n$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 6. Очевидно, имеет место и «двойственное» утверждение к теореме 8: *матрицы* $C^*, C^*A, \ldots, C^*A^{n-1}$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда матрица* A *циклическая и система* (3.4) *вполне наблюдаема.*

Замечание 7. Из утверждения 3 и теоремы 8 следует, что в двумерном случае утверждение, обратное к теореме 7, верно. Действительно, если $n = 2$ и $m \times k$-матрицы (3.6) линейно независимы, то $mk \geqslant 2$, следовательно, $m \geqslant 2$ или $k \geqslant 2$. Значит ранг матрицы B (или матрицы C) равен n. Далее применяем теорему 8 и утверждение 3.

Установим еще одно необходимое условие согласованности, равносильное линейной независимости матриц (3.6). Докажем предварительно вспомогательное утверждение. Обозначим через $w(t) := w[\alpha_1(t), \ldots, \alpha_l(t)]$ вронскиан, построенный для функций $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, l}$, $t \in \mathbb{R}$, то есть $w(t) = \det W(t)$, где $W(t) = \{\alpha_j^{(i-1)}(t)\}_{i,j=1}^{l}$.

Лемма 2. *Пусть* $\deg \psi(A; \lambda) = l$, $1 \leqslant l \leqslant n$. *Тогда матрица* $\exp\big(A(t - t_0)\big)$ *представима в виде*

$$\exp\big(A(t-t_0)\big) = \alpha_1(t)I + \alpha_2(t)A + \ldots + \alpha_l(t)A^{l-1}, \tag{3.9}$$

где вронскиан $w[\alpha_1(t), \ldots, \alpha_l(t)]$ *не обращается в ноль ни в какой точке* $t \in \mathbb{R}$ (*и следовательно, функции* $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, l}$ *линейно независимы на любом отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра $r(\lambda)$ [18, с. 97] для функции $f(\lambda) = e^{\lambda(t-t_0)}$ на спектре матрицы A. Тогда $\deg r(\lambda) < l$ и по определению функции от матрицы [18, с. 97] (в силу однозначности функции exp) матрица $\exp\big(A(t-t_0)\big)$ совпадает с $r(A)$, то есть имеет место представление (3.9), где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, l}$ — некоторые функции. Дифференцируя равенство (3.9) до порядка $l - 1$, получим, что

$$A^i \exp\big(A(t-t_0)\big) = \alpha_1^{(i)}(t)I + \alpha_2^{(i)}(t)A + \ldots + \alpha_l^{(i)}(t)A^{l-1}, \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Покажем, что $w[\alpha_1(t), \ldots, \alpha_l(t)] \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Предположим противное. Пусть существует $t_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $w(t_1) = 0$. Тогда существует ненулевой вектор $c = \operatorname{col}(c_1, \ldots, c_l) \in \mathbb{R}^l$ такой, что $c^*W(t_1) = 0 \in \mathbb{R}^{l*}$. Это равенство эквивалентно совокупности равенств

$$\begin{gathered} c_1\alpha_1(t_1) + c_2\alpha_1'(t_1) + \ldots + c_l\alpha_1^{(l-1)}(t_1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1\alpha_l(t_1) + c_2\alpha_l'(t_1) + \ldots + c_l\alpha_l^{(l-1)}(t_1) = 0. \end{gathered}$$

Умножим первое равенство на матрицу I, второе — на A, и так далее, i-е — на A^{i-1}. Получим

$$\begin{gathered} c_1\big(\alpha_1(t_1)I + \ldots + \alpha_l(t_1)A^{l-1}\big) + c_2\big(\alpha_1'(t_1)I + \ldots + \alpha_l'(t_1)A^{l-1}\big) + \ldots \\ + c_l\big(\alpha_1^{(l-1)}(t_1)I + \ldots + \alpha_l^{(l-1)}(t_1)A^{l-1}\big) = 0 \in M_n. \end{gathered}$$

Следовательно, $c_1e^{A(t_1-t_0)} + c_2Ae^{A(t_1-t_0)} + \ldots + c_lA^{l-1}e^{A(t_1-t_0)} = 0 \in M_n$. Отсюда следует, что $c_1I + c_2A + \ldots + c_lA^{l-1} = 0 \in M_n$, то есть матрицы $I, A, \ldots, A^{l-1}$ линейно зависимы, а это противоречит условию $\deg \psi(A; \lambda) = l$. Лемма доказана.

Следствие 6. *Если матрица A циклическая, то матрица $\exp\big(A(t-t_0)\big)$ представима в виде*

$$\exp\big(A(t-t_0)\big) = \alpha_1(t)I + \alpha_2(t)A + \ldots + \alpha_n(t)A^{n-1},$$

где $w[\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t)] \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (и следовательно, функции $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ линейно независимы на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$).

Рассмотрим произвольный отрезок $[t_0, t_0+\vartheta] \subset \mathbb{R}$ и построим матрицу

$$\Phi(t) = \{\varphi_{ij}(t)\} := C^* e^{A(t-t_0)} B, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Утверждение 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(a) матрицы $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{l-1}B$ линейно независимы ($1 \leqslant l \leqslant n$);
(b) среди функций $\varphi_{ij}(t)$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,m}$ существует l линейно независимых на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ функций.

Доказательство. $(a) \Longrightarrow (b)$. Пусть матрицы $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{l-1}B$ линейно независимы. Отсюда следует, в частности, что $l \leqslant km$. Рассмотрим вектор-функцию $\phi(t) = \operatorname{vec}\Phi(t) \in \mathbb{R}^{km}$. Найдем производные этой вектор-функции до порядка $l-1$, вытянем эти векторы в строки и составим из них матрицу $\Psi(t) \in M_{l,km}$. Получим, что

$$\Psi(t) = \begin{Vmatrix} \phi^*(t) \\ \dot{\phi}^*(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \big(\phi^{(l-1)}\big)^*(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Big(\operatorname{vec}\big(C^* e^{A(t-t_0)}B\big)\Big)^* \\ \Big(\operatorname{vec}\big(C^* A e^{A(t-t_0)}B\big)\Big)^* \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Big(\operatorname{vec}\big(C^* A^{l-1} e^{A(t-t_0)}B\big)\Big)^* \end{Vmatrix}.$$

Предположим противное, что среди компонент вектор-функции $\phi(t)$ любые l функций линейно зависимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Вронскиан, построенный для линейно зависимых на отрезке $[t_0, t_0+\vartheta]$ функций, тождественно равен нулю на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Следовательно, для любого $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$ всякий минор матрицы $\Psi(t)$ порядка l равен нулю. Значит, $\operatorname{rank}\Psi(t) < l$ для всех $t \in [t_0, t_0+\vartheta]$, следовательно, $\operatorname{rank}\Psi(t_0) < l$. Отсюда получаем, что

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \Big(\operatorname{vec}\big(C^*B\big)\Big)^* \\ \Big(\operatorname{vec}\big(C^*AB\big)\Big)^* \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Big(\operatorname{vec}\big(C^*A^{l-1}B\big)\Big)^* \end{Vmatrix} < l,$$

следовательно, матрицы $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{l-1}B$ линейно зависимы. Противоречие.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Предположим, что матрицы $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{l-1}B$ линейно зависимы. Тогда матрицы I, A, $\ldots$, A^{l-1} также линейно зависимы. Следовательно, $s := \deg\psi(A;\lambda) < l$. Матрица $\exp\big(A(t-t_0)\big)$ представима в виде $\exp\big(A(t-t_0)\big) = \alpha_1(t)I + \ldots + \alpha_s(t)A^{s-1}$, где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,s}$ — некоторые функции (линейно независимые на $[t_0, t_0+\vartheta]$). Тогда $\Phi(t) = \alpha_1(t)C^*B + \ldots + \alpha_s(t)C^*A^{s-1}B$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\phi(t) = \operatorname{vec}\Phi(t) = \operatorname{col}\big(\varphi_{11}(t),\ldots,\varphi_{1m}(t),\ldots,\varphi_{k1}(t),\ldots,\varphi_{km}(t)\big) = \\ = \alpha_1(t)\operatorname{vec}(C^*B) + \ldots + \alpha_s(t)\operatorname{vec}(C^*A^{s-1}B).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что всякая функция $\varphi_{ij}(t)$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,m}$ является линейной комбинацией функций $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,s}$, поэтому любые $l > s$ функций $\varphi_{ij}(t)$ будут линейно зависимы на $[t_0, t_0+\vartheta]$. Утверждение доказано. $\square$

Следствие 7. *Матрицы* $C^*B, C^*AB, \ldots, C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда среди функций* $\varphi_{ij}(t)$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$ *существует* n *линейно независимых на отрезке* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ *функций.*

Следствие 8. *Пусть* $\deg\psi(A;\lambda) = l$, $1 \leqslant l \leqslant n$. *Если система* (3.1) *согласованна, то для любого отрезка* $[t_0, t_0+\vartheta] \subset \mathbb{R}$ *среди элементов матрицы* $\Phi(t) = C^*e^{A(t-t_0)}B$ *существует* l *линейно независимых на отрезке* $[t_0, t_0+\vartheta]$ *функций.*

Следствие 9. *Пусть матрица* A *циклическая. Если система* (3.1) *согласованна, то для любого отрезка* $[t_0, t_0+\vartheta] \subset \mathbb{R}$ *среди элементов матрицы* $\Phi(t) = C^*e^{A(t-t_0)}B$ *существует* n *линейно независимых на отрезке* $[t_0, t_0+\vartheta]$ *функций.*

Установим еще один критерий согласованности. Рассмотрим систему (3.1) с матрицей $A = J$, где $J = \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_n$ — первый единичный косой ряд.

Теорема 9. *Система* (3.1) *с матрицей* $A = J$ *согласованна тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \ldots, \quad C^*J^{n-1}B \tag{3.10}$$

линейно независимы.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 7, поскольку матрица J является циклической. Докажем достаточность. Пусть матрицы (3.10) линейно независимы. Покажем, что система (3.1) является согласованной. Предположим противное, пусть система (3.1) не является согласованной. По теореме 4 существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что для всех $\nu = \overline{0, n^2-1}$ выполнены равенства $C^*N_\nu B = 0$, где $N_0 = H$, $N_\nu = [J, N_{\nu-1}]$. По построению имеем

$$N_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i C_\nu^i J^{\nu-i} H J^i.$$

Рассмотрим матрицу $N_{2n-1} = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} (-1)^i C_{2n-1}^i J^{2n-1-i} H J^i$. Эта матрица состоит из $2n$ слагаемых. Первые n слагаемых при $i = \overline{0, n-1}$ равны нулю, поскольку $J^{2n-1-i} = 0$. Вторые n слагаемых при $i = \overline{n, 2n-1}$ также равны нулю, поскольку $J^i = 0$. Следовательно, $N_{2n-1} = 0$. Поскольку $N_{2n-1} = JN_{2n-2} - N_{2n-2}J$, следовательно, матрица N_{2n-2} коммутирует с J. Множество матриц, коммутирующих с J, есть линейное пространство $\langle I, J, J^2, \ldots, J^{n-1}\rangle$ размерности n. Следовательно, $N_{2n-2} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i J^{i-1}$. Имеем $C^*N_{2n-2}B = 0$, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i C^* J^{i-1} B = 0$. Однако матрицы (3.10) линейно независимы. Отсюда следует, что $c_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, и значит, $N_{2n-2} = 0$. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $N_{2n-3} = 0$ и так далее, $N_\nu = 0$ для всех $\nu = 2n-1, 2n-2, \ldots, 0$. Следовательно, $H = N_0 = 0$. Получаем противоречие. Значит, система (3.1) согласованна. Теорема доказана. □

§ 4. Управление спектром собственных значений

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости спектра в случае, когда коэффициенты системы имеют специальный вид.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x,u,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \tag{4.1}$$

и замкнутую систему

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x. \tag{4.2}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты системы (4.1) имеют следующий вид: матрица A имеет форму Хессенберга, первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\\ b_{p1} & \dots & b_{pm}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \dots & b_{nm}\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{p1} & \dots & c_{pk}\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{Vmatrix}, \tag{4.3}$$

$a_{i,i+1}\neq 0,\ i=\overline{1,n-1};\ a_{ij}=0,\ j>i+1;\ p\in\{1,\dots,n\}$. Пусть $\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_n:=\chi(A;\lambda)$.

Положим $\alpha_0:=1$. Построим по матрице $A=\begin{Vmatrix} Q\\ \hline a_{n1}\ \dots\ a_{nn}\end{Vmatrix}$ матрицу $S_1:=\begin{Vmatrix} 1\ 0\ \dots\ 0\\ \hline Q\end{Vmatrix}$,

то есть матрица S_1 получается из матрицы A вычеркиванием последней строки и приписыванием сверху первой строки e_1^*. Тогда S_1 — нижняя треугольная матрица и $\det S_1\neq 0$.

Для каждого $i=\overline{2,n-1}$ по матрице $S_{i-1}=\left\|\begin{array}{ccc|c} & & & *\\ & \widehat{S}_{i-1} & & \vdots\\ & & & *\\ \hline * & \dots & * & *\end{array}\right\|$, где $\widehat{S}_{i-1}\in M_{n-1}$, построим

матрицу $S_i=\left\|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{S}_{i-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right\|$, то есть матрица S_i получается вычеркиванием из матрицы

S_{i-1} последней строки и последнего столбца и приписыванием к полученной матрице из M_{n-1} слева первого столбца $e_1\in\mathbb{R}^n$ и сверху первой строки $e_1^*\in\mathbb{R}^{n*}$. Тогда для всех $i=\overline{1,n-1}$ матрицы S_i — нижние треугольные, невырожденные. Пусть $S=S_{n-1}\cdot\ldots\cdot S_1$. Тогда S также нижняя треугольная невырожденная матрица. Построим матрицы

$$\widetilde{A}=SAS^{-1},\quad \widetilde{B}=SB,\quad \widetilde{C}^*=C^*S^{-1}. \tag{4.4}$$

Утверждение 5 (см. [19, теорема 3]). *Матрица* $\widetilde{A}$ *имеет вид*

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1\end{Vmatrix}. \tag{4.5}$$

Поскольку S — нижняя треугольная матрица, а B и C имеют вид (4.3), то матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ также имеют вид (4.3), то есть первые $p-1$ строк матрицы $\widetilde{B}$ и последние $n-p$ строк матрицы $\widetilde{C}$ равны нулю. В силу равенств (4.4) имеем

$$\chi(A+BUC^*;\lambda)=\chi(S(A+BUC^*)S^{-1};\lambda)=\chi(\widetilde{A}+\widetilde{B}U\widetilde{C}^*;\lambda). \tag{4.6}$$

Построим матрицу

$$G:=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i-1}J_{i-1}^*=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1\end{Vmatrix} \tag{4.7}$$

Лемма 3 (см. [20, лемма 4]). *Пусть матрица* $\widetilde{A}$ *имеет вид* (4.5), $D \in M_n$:

$$D = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{p1} & \dots & d_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{np} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{4.8}$$

здесь $p \in \{1, \dots, n\}$. *Пусть* $\chi(\widetilde{A} + D; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$. *Тогда* $\gamma_i = \alpha_i - \operatorname{Sp}(DJ_{i-1}G)$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Построим по матрице $\widetilde{A} = J_1 + e_n \xi$, $\xi = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n*}$ матрицы $F_\nu = \alpha_0 \widetilde{A}^\nu + \alpha_1 \widetilde{A}^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu I$, $\nu = \overline{0, n-1}$. Тогда $F_0 = I$, $F_\nu = F_{\nu-1}\widetilde{A} + \alpha_\nu I$, $\nu = \overline{1, n-1}$.

Лемма 4. *Пусть матрица* $D \in M_n$ *имеет вид* (4.8). *Тогда для всех* $\nu = \overline{0, n-1}$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{Sp}(DJ_\nu G) = \operatorname{Sp}(DF_\nu). \tag{4.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из вида матрицы D следует, что для любой строго нижней треугольной матрицы $H = \{h_{ij}\} \in M_n$ (то есть такой что $h_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$) выполнено равенство $\operatorname{Sp}(DH) = 0$. Поэтому достаточно доказать, что верхняя треугольная часть (то есть диагональ и то, что находится выше диагонали) матриц $J_\nu G$ и F_ν совпадают при каждом $\nu = \overline{0, n-1}$. Рассмотрим матрицы $J_\nu G$. Имеем

$$J_\nu G = \begin{Vmatrix} P_\nu \\ \hline 0 \end{Vmatrix}, \quad P_\nu = \begin{Vmatrix} \alpha_\nu & \dots & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{\nu+1} & \dots\dots & & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \dots\dots & & & & \alpha_0 \end{Vmatrix} \in M_{n-\nu,n}, \quad 0 \in M_{\nu,n}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим матрицы F_ν. Поскольку $F_0 = I$, то для $\nu = 0$ равенство (4.9) выполнено. Далее, $F_1 = \alpha_0 \widetilde{A} + \alpha_1 I = \alpha_1 J_0 + \alpha_0 J_1 + e_n \xi =$

$$= \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Далее, $F_2 = F_1 \widetilde{A} + \alpha_2 I = F_1 J_1 + F_1 e_n \xi + \alpha_2 I$. Имеем $F_1 e_n = e_{n-1}$, $\xi J_1 = (0, -\alpha_n, \dots, -\alpha_2) \in \mathbb{R}^{n*}$. Поэтому $F_2 = (\alpha_1 J_0 + \alpha_0 J_1 + e_n \xi) J_1 + e_{n-1} \xi + \alpha_2 I = (\alpha_2 J_0 + \alpha_1 J_1 + \alpha_0 J_2) + (e_{n-1} \xi + e_n \xi J_1) =$

$$= \begin{Vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ 0 & -\alpha_n & \dots & -\alpha_3 & -\alpha_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \hline -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_n & \dots & \dots & \dots & -\alpha_4 & -\alpha_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Покажем по индукции, что для всех $\nu=\overline{1,n-1}$ имеет место формула

$$F_\nu=(\alpha_\nu J_0+\alpha_{\nu-1}J_1+\ldots+\alpha_0 J_\nu)+(e_{n-\nu+1}\xi J_0+e_{n-\nu+2}\xi J_1+\ldots+e_n\xi J_{\nu-1}). \tag{4.11}$$

При $\nu=1,2$ эта формула установлена. Предположим, что формула (4.11) верна при $\nu=s$. Покажем, что она верна при $\nu=s+1$. Имеем $F_{s+1}=F_s(J_1+e_n\xi)+\alpha_{s+1}I$. По предположению индукции из равенства (4.11) следует, что последний столбец матрицы F_s равен $(\alpha_s e_n+\alpha_{s-1}e_{n-1}+\ldots+\alpha_1 e_{n-s+1}+\alpha_0 e_{n-s})+(e_{n-s+1}(-\alpha_1)+e_{n-s+2}(-\alpha_2)+\ldots+e_n(-\alpha_s))=\alpha_0 e_{n-s}=e_{n-s}$. Следовательно, $F_s e_n=e_{n-s}$. Поэтому $F_{s+1}=(\alpha_s J_0+\alpha_{s-1}J_1+\ldots+\alpha_0 J_s+e_{n-s+1}\xi J_0+e_{n-s+2}\xi J_1+\ldots+e_n\xi J_{s-1})J_1+e_{n-s}\xi+\alpha_{s+1}I=\alpha_{s+1}J_0+\alpha_s J_1+\ldots+\alpha_0 J_{s+1}+e_{n-s}\xi J_0+e_{n-s+1}\xi J_1+\ldots+e_n\xi J_s$, что и требовалось. Следовательно, формула (4.11) верна. Построим по этой формуле матрицу F_ν, получим

$$F_\nu=\left\|\begin{array}{cccccccc}
\alpha_\nu & \alpha_{\nu-1} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & \alpha_\nu & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{8}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
0 & \ldots\ldots & 0 & \alpha_\nu & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & \alpha_1 & \alpha_0\\
\hline
-\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \ldots & -\alpha_{\nu+1} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & 0\\
0 & -\alpha_n & \ldots & -\alpha_{\nu+2} & -\alpha_{\nu+1} & 0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{8}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
0 & \ldots & -\alpha_n & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & -\alpha_{\nu+1} & 0
\end{array}\right\|. \tag{4.12}$$

Из (4.10) и (4.12) следует, что верхние треугольные части матриц $J_\nu G$ и F_ν совпадают. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $\widetilde{A}$ *имеет вид* (4.5), D *имеет вид* (4.8). *Пусть* $\chi(\widetilde{A}+D;\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$. *Тогда* $\gamma_i=\alpha_i-\operatorname{Sp}(DF_{i-1})$ *для всех* $i=1,\ldots,n$.

Лемма 5 следует непосредственно из лемм 3 и 4.

Рассмотрим задачу управления спектром для системы (4.2). Пусть задан многочлен $p(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i. Требуется построить U так, чтобы $\chi(A+BUC^*;\lambda)=p(\lambda)$. В силу (4.4) выполняется равенство $\chi(\widetilde{A}+\widetilde{B}U\widetilde{C}^*;\lambda)=p(\lambda)$. Из (4.3) и (4.4) следует, что матрица $\widetilde{B}U\widetilde{C}^*$ имеет вид (4.8) матрицы D. Тогда из леммы 5 следует, что для всех $i=\overline{1,n}$ должны выполняться равенства

$$\gamma_i=\alpha_i-\operatorname{Sp}(\widetilde{B}U\widetilde{C}^*F_{i-1})=\alpha_i-\operatorname{Sp}(U\widetilde{C}^*F_{i-1}\widetilde{B})=\alpha_i-\sum_{\nu=0}^{i-1}\alpha_{i-1-\nu}\operatorname{Sp}(U\widetilde{C}^*\widetilde{A}^\nu\widetilde{B}).$$

Заметим теперь, что для всех $\nu=\overline{0,n-1}$ выполнены равенства $\widetilde{C}^*\widetilde{A}^\nu\widetilde{B}=C^*A^\nu B$. Поэтому

$$\gamma_i=\alpha_i-\sum_{\nu=0}^{i-1}\alpha_{i-1-\nu}\operatorname{Sp}(UC^*A^\nu B),\quad i=\overline{1,n}. \tag{4.13}$$

Равенства (4.13) образуют систему из n линейных уравнений с mk неизвестными элементами матрицы U. Эту систему можно записать в векторном виде

$$\begin{gathered}\gamma=\alpha-Gq,\\ \gamma=\operatorname{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha=\operatorname{col}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n,\\ q=\operatorname{col}\bigl(\operatorname{Sp}(UC^*B),\ldots,\operatorname{Sp}(UC^*A^{n-1}B)\bigr)\in\mathbb{R}^n,\end{gathered}$$

G – это матрица (4.7). Вектор q можно представить в виде $q=P^*v$, где

$$P=\bigl[\operatorname{vec}(C^*B),\ldots,\operatorname{vec}(C^*A^{n-1}B)\bigr]\in M_{km,n},\quad v=\operatorname{vec}U^*\in\mathbb{R}^{km}.$$

Предположим, что матрицы

$$C^*B, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{4.14}$$

линейно независимы. Тогда $\operatorname{rank} P = n$ и для любого γ система

$$\gamma = \alpha - GP^*v \tag{4.15}$$

разрешима относительно v (поскольку матрица G невырожденная) и имеет, в частности, решение $v = P(P^*P)^{-1}G^{-1}(\alpha-\gamma)$. Тогда спектр системы (4.2) глобально управляем, и соответствующее управление, которое приводит $\chi(A+BUC^*;\lambda)$ к заданному многочлену $p(\lambda)$, имеет вид $U = (\mathrm{vec}^{-1}v)^*$. Если же матрицы (4.14) линейно зависимы, то $\operatorname{rank} P < n$, и для $\gamma = \alpha - G\beta$, где $\beta \notin \operatorname{Im} P^*$, система (4.15) неразрешима, а следовательно, спектр системы (4.2) не является глобально управляемым. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть коэффициенты системы* (4.1) *имеют вид* (4.3). *Тогда спектр системы* (4.2) *глобально управляем в том и только в том случае, если матрицы* (4.14) *линейно независимы.*

Замечание 8. Если коэффициенты системы (4.1) не имеют вид (4.3), то теорема 10, вообще говоря, не верна.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad U = \begin{Vmatrix} u & v \\ w & z \end{Vmatrix}, \quad A + BUC^* = \begin{Vmatrix} u & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \\ w & 1 & z \end{Vmatrix}.$$

Здесь матрицы B, C не имеют вид (4.3). Матрицы (4.14) линейно зависимы, поскольку $C^*AB = 0$. Однако спектр глобально управляем. Действительно, имеем

$$\chi(A+BUC^*;\lambda) = \lambda^3 - (z+u)\lambda^2 - (wv + 1 - uz)\lambda - w + u.$$

Тогда для любого многочлена $p(\lambda) = \lambda^3 + \gamma_1\lambda^2 + \gamma_2\lambda + \gamma_3$ положим $w := 1$, $u := \gamma_3 + 1$, $z := -\gamma_1 - u = -\gamma_1 - \gamma_3 - 1$, $v := uz - 1 - \gamma_2 = (\gamma_3+1)(-\gamma_1-\gamma_3-1) - 1 - \gamma_2$, получим, что $\chi(A+BUC^*;\lambda) = p(\lambda)$.

Пример 3. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad U = \begin{Vmatrix} u & v \\ w & z \end{Vmatrix}, \quad A + BUC^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ w & z & 0 \\ u & v & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь матрица A не имеет вид (4.3). Матрицы (4.14) линейно зависимы, поскольку $A^2 = 0$. Однако спектр глобально управляем, поскольку $\chi(A+BUC^*;\lambda) = \lambda^3 - z\lambda^2 - u\lambda + (zu - vw)$.

Пример 4. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad U = \begin{Vmatrix} u & v \\ w & z \end{Vmatrix}, \quad A + BUC^* = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1+v & u \\ 0 & w & z & 1+w \\ -1 & u & 2+v & u \end{Vmatrix}.$$

Здесь матрицы B, C не имеют вид (4.3). Матрицы (4.14) линейно независимы. Однако спектр не является глобально управляемым. Покажем это. Имеем

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.16}$$

Следовательно, матрицы (4.16) линейно независимы. Далее, $\chi(A+BUC^*;\lambda)=\lambda^4+\gamma_1\lambda^3+\gamma_2\lambda^2+\gamma_3\lambda+\gamma_4$, где

$$\begin{cases}\gamma_1 &= -2u-z\\ \gamma_2 &= 2(uz-(1+v)(1+w))-w+v\\ \gamma_3 &= 2u\\ \gamma_4 &= (1+v)(1+w)-uz.\end{cases} \tag{4.17}$$

Рассмотрим многочлен $p(\lambda)=\lambda^4-8\lambda^3+15\lambda^2-8\lambda$ (который имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_{3,4}=(7\pm\sqrt{17})/2$). Покажем, что нельзя построить управление U так, что $\chi(A+BUC^*;\lambda)=p(\lambda)$. Действительно, предположим противное: система (4.17), где $\gamma_1=-8$, $\gamma_2=15$, $\gamma_3=-8$, $\gamma_4=0$ разрешима. Тогда $u=-4$, $z=16$, $v-w=15$, $(1+v)(1+w)=-64$. Из двух последних уравнений следует, что $w^2+17w+16=-64$, а это уравнение не имеет решений в $\mathbb{R}$. Таким образом, данная система не обладает свойством глобальной управляемости спектра.

Построить пример такой, что матрица A не имеет вид (4.3) (с точностью до преобразования подобия), матрицы (4.14) линейно независимы, и спектр не является глобально управляемым, невозможно, поскольку из линейной независимости матриц (4.14) следует, что матрица A с точностью до преобразования подобия имеет форму Хессенберга.

Теорема 11. *Пусть коэффициенты системы* (4.1) *имеют вид* (4.3). *Если система* (4.1) *согласованна, то спектр системы* (4.2) *глобально управляем.*

Эта теорема следует из теоремы 10 и теоремы 7, поскольку матрица A, имеющая форму Хессенберга, является циклической.

§ 5. Согласованность стационарных систем специального вида

В этом параграфе изучается свойство согласованности системы (4.1) с матрицами вида (4.3) и исследуется вопрос о том, в каких случаях справедливо утверждение, обратное к теореме 11.

Из теорем 9 и 10 следует, что если $A=J$, то утверждение, обратное к теореме 11, верно, поскольку матрица J имеет форму Хессенберга.

Далее, без ограничения общности можно считать, что $m\leqslant n$, $k\leqslant n$, и матрицы B и C имеют полный ранг: $\operatorname{rank}B=m$, $\operatorname{rank}C=k$ (см. замечание 3). Из вида (4.3) матриц B и C следует, что $n-p+1\geqslant m$, $p\geqslant k$. Отсюда, в частности, следует, что $m+k\leqslant n+1$.

Теорема 12. *Пусть коэффициенты системы* (4.1) *имеют вид* (4.3). *Пусть* $n<6$. *Тогда если матрицы*

$$C^*B,\quad C^*AB,\quad \ldots,\quad C^*A^{n-1}B \tag{5.1}$$

линейно независимы, то система (4.1) *согласованна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство согласованности, так же как и свойство линейной независимости матриц (5.1), инвариантно относительно преобразования (4.4). Поэтому без ограничения общности можно считать, что матрица A имеет вид (4.5), а матрицы B и C имеют вид (4.3). Для доказательства свойства согласованности достаточно построить большую систему $\dot z=Pz+Qv$, $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{n^2}$, $Q=B\otimes C\in M_{n^2,mk}$ и показать, что $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^{n^2-1}Q]=n^2$.

Доказательство будем проводить перебором возможных значений n,m,k,p. При $k=n$ утверждение теоремы следует из утверждения $(b)\Longrightarrow(a)$ теоремы 8 и из теоремы 5. Аналогично, при $m=n$ утверждение теоремы верно (замечание 6 и теорема 5). Если $k=1$, то для линейной независимости матриц (5.1) необходимо, чтобы $m=n$. Этот случай разобран. Аналогично, если $m=1$, то $k=n$ — этот случай также разобран. При $n=2$ теорема верна (замечание 7).

Далее, будем считать, что $n>2$, $1<m<n$, $1<k<n$. Из неравенств $n-p+1\geqslant m$, $p\geqslant k$ следует, что $1<p<n$. Из линейной независимости матриц (5.1) следует $mk\geqslant n$. Заметим

еще, что матрицы (5.1) линейно независимы тогда и только тогда, когда для любых невырожденных матриц $T \in M_m$ и $R \in M_k$ линейно независимы матрицы $\widetilde{C}^*\widetilde{B}$, ..., $\widetilde{C}^*A^{n-1}\widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = BT$, $\widetilde{C} = CR$.

($\mathbf{n = 3}$). Тогда $k = 2$, $m = 2$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \tag{5.2}$$

Очевидно, что матрицы (5.2) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_9$, $Q = B \otimes C \in M_{9,4}$. Далее, построим (9×4)-матрицы $L_1 := Q$, $L_2 := PQ$, $L_3 := P^2Q$. Вычеркнем столбец 3 в матрице L_2, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_2 \in M_{9,3}$; вычеркнем столбцы 3, 4 в матрице L_3, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_3 \in M_{9,2}$. Построим матрицу $L := [L_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3] \in M_9$. Получим, что $\det L = 2$ и, значит, $\operatorname{rank} L = 9$. Следовательно, $\operatorname{rank}[Q, PQ, P^2Q] = 9$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^8Q] = 9$.

($\mathbf{n = 4}$). Совокупности необходимых неравенств

$$1 < m < n, \quad 1 < k < n, \quad n+1 \geqslant m+k, \quad mk \geqslant n, \quad n-p+1 \geqslant m, \quad p \geqslant k \tag{5.3}$$

удовлетворяют 4 случая: 1) $m = 3$, $k = 2$, $p = 2$; 2) $m = 2$, $k = 3$, $p = 3$; 3) $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$; 4) $m = 2$, $k = 2$, $p = 3$.

1) $m = 3$, $k = 2$, $p = 2$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Очевидно, что матрицы (5.4) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{16}$, $Q = B \otimes C \in M_{16,6}$. Далее, построим (16×6)-матрицы $L_1 := Q$, $L_2 := PQ$, $L_3 := P^2Q$, $L_4 := P^3Q$. Вычеркнем столбцы 3 и 5 в матрицах L_2, L_3, полученные (16×4)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3$ соответственно. В матрице L_4 вычеркнем все столбцы с 3-го по 6-й, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_4 \in M_{16,2}$. Построим матрицу $L := [L_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3, \widetilde{L}_4] \in M_{16}$. Получим, что $\det L = 3$ и $\operatorname{rank} L = 16$, значит, $\operatorname{rank}[Q, PQ, P^2Q, P^3Q] = 16$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{15}Q] = 16$.

2) $m = 2$, $k = 3$, $p = 3$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$
$$C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_3+\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_2+\alpha_1^2 \end{Vmatrix}. \tag{5.5}$$

Очевидно, что матрицы (5.5) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{16}$, $Q = B \otimes C \in M_{16,6}$. Далее, построим (16×6)-матрицы $L_1 := Q$, $L_2 := PQ$, $L_3 := P^2Q$, $L_4 := P^3Q$. Вычеркнем столбцы 4 и 5 в матрицах L_2, L_3, полученные (16×4)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3$ соответственно. В матрице L_4 вычеркнем столбцы 1, 4, 5, 6, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_4 \in M_{16,2}$. Построим матрицу $L := [L_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3, \widetilde{L}_4] \in M_{16}$. Получим, что $\det L = 9$ и $\operatorname{rank} L = 16$, значит, $\operatorname{rank}[Q, PQ, P^2Q, P^3Q] = 16$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{15}Q] = 16$.

3) $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$. Можно считать без ограничения общности, что матрица C имеет вид $C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. Матрица B имеет вид $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{Vmatrix}$. Вторая строка матрицы B не равна нулю (в противном случае $C^*B = 0 \in M_2$). Предположим, что $b_{21} \neq 0$ (если $b_{21} = 0$, а $b_{22} \neq 0$, то поменяем столбцы матрицы B местами; свойство линейной независимости матриц (5.1) и свойство согласованности от этого не изменится). Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_{21} = 1$, $b_{22} = 0$. Далее, рассмотрим элемент b_{32}. Возможны два случая: (a) $b_{32} = 0$; (b) $b_{32} \neq 0$.

Пусть $b_{32} = 0$. Тогда $b_{42} \neq 0$ (иначе $m = \operatorname{rank} B = 1$ и $mk = 2 < 4$). Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $b_{42} = 1$ и $b_{41} = 0$. Тогда матрица B имеет вид $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, здесь $r \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

Если $b_{32} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $b_{32} = 1$, $b_{31} = 0$. Тогда матрица B имеет вид $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r & q \end{Vmatrix}$, где $r, q \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

Этим двумя случаями исчерпываются (без ограничения общности) все возможные значения матрицы B. Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

(a) Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_3-\alpha_2 r & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \tag{5.6}$$

Очевидно, что матрицы (5.6) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, r \in \mathbb{R}$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{16}$, $Q = B \otimes C \in M_{16,4}$, $L = [Q, PQ, P^2Q, P^3Q] \in M_{16}$. Получим, что $\det L = 9$, следовательно, $\operatorname{rank} L = 16$, значит, $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{15}Q] = 16$.

(b) Пусть

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\r&q\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}0&1\\r&q\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}r&q\\-\alpha_3-\alpha_1r&-\alpha_2-\alpha_1q\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.7}$$

Построим матрицу

$$V=[\operatorname{vec}(C^*B),\operatorname{vec}(C^*AB),\operatorname{vec}(C^*A^2B),\operatorname{vec}(C^*A^3B)]=\begin{Vmatrix}0&1&0&r\\0&0&1&q\\1&0&r&-\alpha_3-\alpha_1r\\0&1&q&-\alpha_2-\alpha_1q\end{Vmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы V, получим, что $\det V=-q^2-r-\alpha_1q-\alpha_2$. Из линейной независимости матриц (5.7) следует, что $q^2+r+\alpha_1q+\alpha_2\neq 0$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{16}$, $Q=B\otimes C\in M_{16,4}$, $L=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q]\in M_{16}$. Найдем определитель матрицы L, получим, что $\det L=9(q^2+r+\alpha_1q+\alpha_2)^4$. Следовательно, $\det L\neq 0$ и $\operatorname{rank}L=16$, значит, $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^{15}Q]=16$.

4) $m=2$, $k=2$, $p=3$. По аналогии со случаем 3) можно показать, что без ограничения общности все возможные значения матриц системы (4.1) исчерпываются следующими двумя случаями (a) и (b).

(a)
$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&r\\0&1\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0\\r&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}1&0\\-\alpha_2&r-\alpha_1\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}0&1\\-\alpha_3-\alpha_2(r-\alpha_1)&-\alpha_2-\alpha_1(r-\alpha_1)\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.8}$$

Очевидно, что матрицы (5.8) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,r\in\mathbb{R}$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{16}$, $Q=B\otimes C\in M_{16,4}$, $L=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q]\in M_{16}$. Получим, что $\det L=9$, следовательно, $\operatorname{rank}L=16$, значит, $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^{15}Q]=16$.

(b)
$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}q&r\\1&0\\0&1\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}q&1\\r-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}-\alpha_2&q-\alpha_1\\-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&r-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.9}$$

Построим матрицу

$$V=[\mathrm{vec}\,(C^*B),\mathrm{vec}\,(C^*AB),\mathrm{vec}\,(C^*A^2B),\mathrm{vec}\,(C^*A^3B)]=\begin{Vmatrix}0&1&q&-\alpha_2\\0&0&1&q-\alpha_1\\1&0&r-\alpha_2&-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\\0&1&-\alpha_1&r-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы V, получим, что $\det V=q^2+r$. Из линейной независимости матриц (5.9) следует, что $q^2+r\neq 0$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{16}$, $Q=B\otimes C\in M_{16,4}$, $L=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q]\in M_{16}$. Найдем определитель матрицы L, получим, что $\det L=9(q^2+r)^4$. Тогда $\det L\neq 0$ и $\mathrm{rank}\,L=16$, значит, $\mathrm{rank}\,[Q,PQ,\ldots,P^{15}Q]=16$.

($\mathbf{n=5}$). Возможны 7 случаев, удовлетворяющих неравенствам (5.3):
1) $m=4$, $k=2$, $p=2$; 2) $m=2$, $k=4$, $p=4$; 3) $m=3$, $k=3$, $p=3$;
4) $m=3$, $k=2$, $p=2$; 5) $m=3$, $k=2$, $p=3$; 6) $m=2$, $k=3$, $p=3$;
7) $m=2$, $k=3$, $p=4$.

1) $m=4$, $k=2$, $p=2$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.10}$$

Очевидно, что матрицы (5.10) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,8}$. Далее, построим (25×8)-матрицы $L_1:=Q$, $L_2:=PQ$, $L_3:=P^2Q$, $L_4:=P^3Q$, $L_5:=P^4Q$. Вычеркнем столбцы 3, 5 и 7 в матрицах L_2,L_3,L_4; полученные (25×5)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3,\widetilde{L}_4$ соответственно. В матрице L_5 вычеркнем все столбцы с 3-го по 8-й, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_5\in M_{25,2}$. Построим матрицу $L:=[L_1,\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3,\widetilde{L}_4,\widetilde{L}_5]\in M_{25}$. Получим, что $\det L=-4$ и $\mathrm{rank}\,L=25$, значит, $\mathrm{rank}\,[Q,PQ,\ldots,P^4Q]=25$, поэтому $\mathrm{rank}\,[Q,PQ,\ldots,P^{24}Q]=25$.

2) $m=2$, $k=4$, $p=4$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{Vmatrix},\ C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\ C^*A^2B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha_2&-\alpha_1\\-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix},\\ C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&1\\-\alpha_2&-\alpha_1\\-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&-\alpha_2+\alpha_1^2\\-\alpha_4+\alpha_1\alpha_3-(-\alpha_2+\alpha_1^2)\alpha_2&-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2-(-\alpha_2+\alpha_1^2)\alpha_1\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.11}$$

Очевидно, что матрицы (5.11) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,8}$. Далее, построим (25×8)-матрицы $L_1:=Q$, $L_2:=PQ$, $L_3:=P^2Q$, $L_4:=P^3Q$, $L_5:=P^4Q$. Вычеркнем столбцы 5, 6 и 7 в матрицах L_2,L_3,L_4; полученные (25×5)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3,\widetilde{L}_4$ соответственно. В матрице L_5 вычеркнем все столбцы, кроме третьего и четвертого, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_5\in M_{25,2}$. Построим матрицу $L:=[L_1,\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3,\widetilde{L}_4,\widetilde{L}_5]\in M_{25}$. Получим, что $\det L=-24$ и $\operatorname{rank} L=25$, значит, $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^4Q]=25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^{24}Q]=25$.

3) $m=3$, $k=3$, $p=3$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&0&1\\-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\\-\alpha_4+\alpha_1\alpha_3&-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.12}$$

Очевидно, что матрицы (5.12) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,9}$. Далее, построим (25×9)-матрицы $L_1:=Q$, $L_2:=PQ$, $L_3:=P^2Q$, $L_4:=P^3Q$, $L_5:=P^4Q$. Вычеркнем столбцы 4, 5, 7, 8 в матрицах L_2,L_3; полученные (25×5)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3$ соответственно. В матрице L_4 вычеркнем столбцы 4, 5, 7, 8, 9, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_4\in M_{25,4}$. В матрице L_5 вычеркнем все столбцы, кроме второго и третьего, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_5\in M_{25,2}$. Построим матрицу $L:=[L_1,\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3,\widetilde{L}_4,\widetilde{L}_5]\in M_{25}$. Получим, что $\det L=144$ и $\operatorname{rank}L=25$, значит, $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^4Q]=25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^{24}Q]=25$.

4) $m=3$, $k=2$, $p=2$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше при $n=4$ в случае 3), можно показать, что без ограничения общности все возможные значения матриц системы (4.1) исчерпываются следующими случаями (a), (b) и (c).

$$(a)\qquad A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\1&0&0\\r&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{Vmatrix},$$

$r\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}1&0&0\\r&0&0\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}r&0&0\\0&1&0\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&0&1\\-\alpha_4-\alpha_3r&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.13}$$

Очевидно, что матрицы (5.13) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,r$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,6}$. Далее, построим (25×6)-матрицы $L_1:=Q$, $L_2:=PQ$, $L_3:=P^2Q$, $L_4:=P^3Q$, $L_5:=P^4Q$. Вычеркнем пятый столбец в матрицах L_2,L_3,L_4; полученные (25×5)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2,\widetilde{L}_3,\widetilde{L}_4$ соответственно. В матрице L_5 вычеркнем пятый и шестой столбцы, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_5 \in M_{25,4}$. Построим матрицу $L := [L_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3, \widetilde{L}_4, \widetilde{L}_5] \in M_{25}$. Получим, что $\det L = 16$ и $\operatorname{rank} L = 25$, значит, $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^4 Q] = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24} Q] = 25$.

$$(b) \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$r, s \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r & s & 0 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} r & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 - \alpha_2 r & -\alpha_3 - \alpha_2 s & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Очевидно, что матрицы (5.14) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, r, s$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{25}$, $Q = B \otimes C \in M_{25,6}$. Далее, построим (25×6)-матрицы $L_1 := Q$, $L_2 := PQ$, $L_3 := P^2 Q$, $L_4 := P^3 Q$, $L_5 := P^4 Q$. Вычеркнем столбец 3 в матрицах L_2, L_3, L_4; полученные (25×5)-матрицы обозначим $\widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3, \widetilde{L}_4$ соответственно. В матрице L_5 вычеркнем столбцы 3 и 4, полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}_5 \in M_{25,4}$. Построим матрицу $L := [L_1, \widetilde{L}_2, \widetilde{L}_3, \widetilde{L}_4, \widetilde{L}_5] \in M_{25}$. Получим, что $\det L = 16$ и $\operatorname{rank} L = 25$, значит, $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^4 Q] = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24} Q] = 25$.

$$(c) \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & s \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$r, q, s \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r & q & s \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} r & q & s \\ -\alpha_4 - \alpha_1 r & -\alpha_3 - \alpha_1 q & -\alpha_2 - \alpha_1 s \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{5.15}$$

Построим матрицу

$$V = [\operatorname{vec}(C^*B), \ldots, \operatorname{vec}(C^*A^4B)] = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 1 & 0 & 0 & r & -\alpha_4 - \alpha_1 r \\ 0 & 1 & 0 & q & -\alpha_3 - \alpha_1 q \\ 0 & 0 & 1 & s & -\alpha_2 - \alpha_1 s \end{Vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_i, $i = \overline{1,6}$ определитель матрицы, полученной из матрицы V вычеркиванием i-й строки. Получим, что $\Delta_4 = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \alpha_2 + \alpha_1 s + q + s^2 = -\Delta_1, \\ \Delta_2 &= \alpha_3 + \alpha_1 q + r + sq = -\Delta_6, \\ \Delta_3 &= -(\alpha_2 q + q^2 - s\alpha_3 - sr). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Поскольку матрицы (5.15) линейно независимы, ранг матрицы V равен 5. Отсюда следует, что хотя бы одно из чисел (5.16) не равно нулю. Построим матрицы $P = A\otimes I - I\otimes A^* \in M_{25}$, $Q = B\otimes C \in M_{25,6}$, $L := [Q, PQ, P^2Q, P^3Q, P^4Q] \in M_{25,30}$.

Пусть $\Delta_6 \neq 0$. Вычеркнем столбцы 11, 17, 23, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det\widetilde{L} = -16(\alpha_3 + \alpha_1 q + r + sq)^5 = 16\Delta_6^5 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank}\widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

Пусть $\Delta_5 \neq 0$. Вычеркнем столбцы 9, 15, 21, 27, 28 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det\widetilde{L} = 16(\alpha_2 + \alpha_1 s + q + s^2) = 16\Delta_5^5 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank}\widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

Если $\Delta_6 = \Delta_5 = 0$, то

$$0 = -\Delta_6 s - \Delta_5 q = (\alpha_3 + \alpha_1 q + r + sq)s - (\alpha_2 + \alpha_1 s + q + s^2)q = \alpha_3 s + rs - \alpha_2 q - q^2 = \Delta_3,$$

следовательно, $\Delta_i = 0$ для всех $i = \overline{1,6}$. Но это противоречит линейной независимости матриц (5.15). Следовательно, числа Δ_5, Δ_6 не могут одновременно обращаться в ноль. Согласованность системы (4.1) доказана.

5) $m = 3$, $k = 2$, $p = 3$. Без ограничения общности все возможные значения матриц системы (4.1) исчерпываются следующими случаями (a) и (b).

(a)
$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$r \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Построим матрицы (5.1), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \; C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \; C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 1 \end{Vmatrix}, \; C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & r-\alpha_1 \end{Vmatrix},$$

$$C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 - (r-\alpha_1)\alpha_3 & -\alpha_3 - (r-\alpha_1)\alpha_2 & -\alpha_2 - (r-\alpha_1)\alpha_1 \end{Vmatrix}. \tag{5.17}$$

Очевидно, что матрицы (5.17) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, r$. Построим матрицы $P = A\otimes I - I\otimes A^* \in M_{25}$, $Q = B\otimes C \in M_{25,6}$, $L := [Q, PQ, P^2Q, P^3Q, P^4Q] \in M_{25,30}$. Вычеркнем столбцы 17, 23, 27, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det\widetilde{L} = 1188$. Следовательно, $\operatorname{rank}\widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

(b)
$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} q & r \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$q, r \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (5.1), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \; C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \; C^*A^2B = \begin{Vmatrix} q & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \; C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & q & 1 \\ -\alpha_3 & r-\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix},$$

$$C^*A^4B = \begin{Vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & q-\alpha_1 \\ -\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 & -\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 & r - \alpha_2 + \alpha_1^2 \end{Vmatrix}. \tag{5.18}$$

Построим матрицу

$$V=[\operatorname{vec}(C^*B),\dots,\operatorname{vec}(C^*A^4B)]=\begin{Vmatrix}0&1&q&0&-\alpha_3\\0&0&1&q&-\alpha_2\\0&0&0&1&q-\alpha_1\\1&0&r&-\alpha_3&-\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\\0&1&0&r-\alpha_2&-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\\0&0&1&-\alpha_1&r-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_i, $i=\overline{1,6}$ определитель матрицы, полученной из матрицы V вычеркиванием i-й строки. Получим, что

$$\begin{aligned}&\Delta_1=(r+q^2), &&\Delta_2=\alpha_1(r+q^2), &&\Delta_3=(r+q^2)(r-\alpha_2+\alpha_1^2),\\ &\Delta_4=0, &&\Delta_5=-(r+q^2), &&\Delta_6=(q-\alpha_1)(r+q^2).\end{aligned}\tag{5.19}$$

Поскольку матрицы (5.18) линейно независимы, ранг матрицы V равен 5. Отсюда следует, что хотя бы одно из чисел (5.19) не равно нулю. Следовательно, $r+q^2\neq 0$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,6}$, $L:=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q,P^4Q]\in M_{25,30}$. Вычеркнем столбцы 17, 23, 28, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}\in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det\widetilde{L}=-144(r+q^2)^5\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank}\widetilde{L}=25$, значит, $\operatorname{rank}L=25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q,PQ,\dots,P^{24}Q]=25$.

6) $m=2$, $k=3$, $p=3$. Без ограничения общности все возможные значения матриц системы (4.1) исчерпываются следующими случаями (a) и (b).

$$(a)\qquad A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\r&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},$$

$r\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\r&0\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}1&0\\r&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^3B=\begin{Vmatrix}r&0\\0&1\\-\alpha_3-\alpha_2r&-\alpha_1\end{Vmatrix},\\ C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&1\\-\alpha_3-\alpha_2r&-\alpha_1\\-\alpha_4-\alpha_3r-\alpha_1(-\alpha_3-\alpha_2r)&-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.20}$$

Очевидно, что матрицы (5.20) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,r$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,6}$, $L:=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q,P^4Q]\in M_{25,30}$. Вычеркнем столбцы 16, 22, 28, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}\in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det\widetilde{L}=108$. Следовательно, $\operatorname{rank}\widetilde{L}=25$, значит, $\operatorname{rank}L=25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q,PQ,\dots,P^{24}Q]=25$.

$$(b)\qquad A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\r&q\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},$$

$r, q \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (5.1), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r & q \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ r & q \\ -\alpha_3 - \alpha_1 r & -\alpha_2 - \alpha_1 q \end{Vmatrix},$$

$$C^*A^4B = \begin{Vmatrix} r & q \\ -\alpha_3 - \alpha_1 r & -\alpha_2 - \alpha_1 q \\ -\alpha_4 - \alpha_2 r + \alpha_1(\alpha_3 + \alpha_1 r) & -\alpha_3 - \alpha_2 q + \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_1 q) \end{Vmatrix}. \tag{5.21}$$

Построим матрицу

$$V = [\operatorname{vec}(C^*B), \ldots, \operatorname{vec}(C^*A^4B)] = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q \\ 0 & 1 & 0 & r & -\alpha_3 - \alpha_1 r \\ 0 & 0 & 1 & q & -\alpha_2 - \alpha_1 q \\ 1 & 0 & r & -\alpha_3 - \alpha_1 r & -\alpha_4 - \alpha_2 r + \alpha_1(\alpha_3 + \alpha_1 r) \\ 0 & 1 & q & -\alpha_2 - \alpha_1 q & -\alpha_3 - \alpha_2 q + \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_1 q) \end{Vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_i, $i = \overline{1,6}$ определитель матрицы, полученной из матрицы V вычеркиванием i-й строки. Получим, что

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = -(\alpha_1 + q)(r + \alpha_2 + \alpha_1 q + q^2), && \Delta_3 = -(r + \alpha_2 + \alpha_1 q + q^2), && \Delta_5 = 0, \\ &\Delta_2 = -(\alpha_2 + q)(r + \alpha_2 + \alpha_1 q + q^2), && \Delta_4 = -\alpha_1(r + \alpha_2 + \alpha_1 q + q^2), && \Delta_6 = \Delta_3. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Поскольку матрицы (5.21) линейно независимы, ранг матрицы V равен 5. Отсюда следует, что хотя бы одно из чисел (5.22) не равно нулю. Следовательно, $r + \alpha_2 + \alpha_1 q + q^2 \neq 0$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{25}$, $Q = B \otimes C \in M_{25,6}$, $L := [Q, PQ, P^2Q, P^3Q, P^4Q] \in M_{25,30}$. Вычеркнем столбцы 16, 22, 28, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det \widetilde{L} = 108(r + \alpha_2 + \alpha_1 q + q^2)^5 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} \widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

7) $m = 2$, $k = 3$, $p = 4$. Без ограничения общности все возможные значения матриц системы (4.1) исчерпываются следующими случаями (a), (b) и (c).

$$(a) \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$r \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\alpha_2 & r - \alpha_1 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ * & * \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Очевидно, что матрицы (5.23) линейно независимы для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, r$. Построим матрицы $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{25}$, $Q = B \otimes C \in M_{25,6}$, $L := [Q, PQ, P^2Q, P^3Q, P^4Q] \in M_{25,30}$. Вычеркнем столбцы 10, 16, 22, 28, 29 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det \widetilde{L} = 96$. Следовательно, $\operatorname{rank} \widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

$$(b)\qquad A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&q&r\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix},$$

$r,q\in\mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}0&0\\q&1\\r-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\\ C^*A^3B=\begin{Vmatrix}1&0\\-\alpha_2&q-\alpha_1\\ *&*\end{Vmatrix},\quad C^*A^4B=\begin{Vmatrix}0&1\\ *&*\\ *&*\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.24}$$

Очевидно, что матрицы (5.24) линейно независимы для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,r,q$. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,6}$, $L:=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q,P^4Q]\in M_{25,30}$. Вычеркнем столбцы 11, 17, 23, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L}\in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det\widetilde{L}=-96$. Следовательно, $\operatorname{rank}\widetilde{L}=25$, значит, $\operatorname{rank}L=25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q,PQ,\ldots,P^{24}Q]=25$.

$$(c)\qquad A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\-\alpha_5&-\alpha_4&-\alpha_3&-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}s&q&r\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix},$$

$r,q,s\in\mathbb{R}$ — произвольные числа. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered}C^*AB=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad C^*A^2B=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha_2&-\alpha_1\end{Vmatrix},\quad C^*A^3B=\begin{Vmatrix}s&1\\q-\alpha_2&-\alpha_1\\r-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&-\alpha_2+\alpha_1^2\end{Vmatrix},\\ C^*B=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad C^*A^4B=\begin{Vmatrix}-\alpha_2&s-\alpha_1\\-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&q-\alpha_2+\alpha_1^2\\-\alpha_4+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2-\alpha_2\alpha_1^2&r-\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_1^3\end{Vmatrix}.\end{gathered}\tag{5.25}$$

Построим матрицу

$$V=[\operatorname{vec}(C^*B),\ldots,\operatorname{vec}(C^*A^4B)]=\begin{Vmatrix}0&0&1&s&-\alpha_2\\0&0&0&1&s-\alpha_1\\0&1&0&q-\alpha_2&-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\\0&0&1&-\alpha_1&q-\alpha_2+\alpha_1^2\\1&0&-\alpha_2&r-\alpha_3+\alpha_1\alpha_2&-\alpha_4+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2-\alpha_2\alpha_1^2\\0&1&-\alpha_1&-\alpha_2+\alpha_1^2&r-\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_1^3\end{Vmatrix}.$$

Обозначим через Δ_i, $i=\overline{1,6}$ определитель матрицы, полученной из матрицы V вычеркиванием i-й строки. Получим, что

$$\begin{aligned}&\Delta_1=-(r+qs),&&\Delta_2=q^2-sr-\alpha_1r-\alpha_1qs,&&\Delta_5=0,\\&\Delta_3=q+s^2,&&\Delta_4=\alpha_1q+\alpha_1s^2-r-qs,&&\Delta_6=\Delta_3.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Поскольку матрицы (5.25) линейно независимы, ранг матрицы V равен 5. Отсюда следует, что хотя бы одно из чисел (5.26) не равно нулю. Построим матрицы $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{25}$, $Q=B\otimes C\in M_{25,6}$, $L:=[Q,PQ,P^2Q,P^3Q,P^4Q]\in M_{25,30}$.

Пусть $\Delta_3 \neq 0$. Вычеркнем столбцы 11, 17, 23, 29, 30 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det \widetilde{L} = -96(q+s^2)^5 = -96\Delta_3^5 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} \widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

Пусть $\Delta_3 = 0$, $\Delta_1 \neq 0$, Вычеркнем столбцы 10, 16, 22, 28, 29 в матрице L; полученную матрицу обозначим $\widetilde{L} \in M_{25}$. Вычислим определитель матрицы $\widetilde{L}$, получим, что $\det \widetilde{L} = -96(r+qs)^3(r^2+rs^3+3srq-q^3)$. Поскольку $\Delta_3 = 0$, то $q = -s^2$, следовательно,

$$\det \widetilde{L} = -96(r+qs)^3(r^2-2rs^3+s^6) = -96(r+qs)^3(r-s^3)^2 = -96(r+qs)^5 = 96\Delta_1^5 \neq 0.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} \widetilde{L} = 25$, значит, $\operatorname{rank} L = 25$, поэтому $\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{24}Q] = 25$.

Если $\Delta_3 = \Delta_1 = 0$, то $r = -qs$. Имеем $\Delta_4 = \alpha_1\Delta_3 + \Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = q^2 - sr + \alpha_1\Delta_1 = q^2 - sr = q^2 + s^2q = q(q+s^2) = q\Delta_3 = 0$. Таким образом, $\Delta_i = 0$ для всех $i = \overline{1,6}$, но это противоречит линейной независимости матриц (5.25). Следовательно, числа Δ_3, Δ_1 не могут одновременно обращаться в ноль. Согласованность системы (4.1) доказана. На этом доказательство теоремы 12 завершено. □

Замечание 9. В случае когда $n = 6$, утверждение теоремы неверно. Рассмотрим пример.

Пример 5.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d^2 & 2d \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{5.27}$$

$d \in \mathbb{R}$ — любое число такое, что $d \neq 0$. Построим матрицы (5.1), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2d \end{Vmatrix}, \quad C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2d \\ 0 & 3d^2 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^4B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3d^2 \\ 0 & 4d^3 \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{5.28}$$

Построим матрицу

$$V = [\operatorname{vec}(C^*B), \ldots, \operatorname{vec}(C^*A^5B)] = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2d & 3d^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2d & 3d^2 & 4d^2 \end{Vmatrix}.$$

Вычислим $\det V$, получим, что $\det V = 2d \neq 0$. Следовательно, матрицы (5.28) линейно независимы. Покажем, что система (4.1) с матрицами (5.27) не является согласованной. Построим матрицу

$$H = \begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{Vmatrix} \in M_6, \quad H_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{Vmatrix}, \quad H_{11} = 0 \in M_{2,4}, \quad H_{21} = 0 \in M_4, \quad H_{22} = 0 \in M_{4,2}.$$

Положим $N_0 := H$, $N_\nu := [A, N_{\nu-1}]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда получим, что $N_1 = AH - HA = (-d)H$ и так далее, $N_\nu = (-d)^\nu H$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$. Вычислим C^*HB, получим, что $C^*HB = 0 \in M_{3,2}$ и, следовательно, $C^*N_\nu B = 0$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 4 система (4.1) с матрицами (5.27) не является согласованной.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть задана система* (4.1) *с матрицами вида* (4.3). *Пусть даны следующие утверждения:*
(a) *система* (4.1) *согласованна;*
(b) *матрицы* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы;*
(c) *спектр системы* (4.2) *глобально управляем.*

Имеет место следующая цепочка импликаций:

$(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c)$.

Кроме того, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:
1) $\operatorname{rank} B = n$;
2) $\operatorname{rank} C = n$;
3) $A = J$;
4) $n < 6$;

то имеет место импликация $(b) \Longrightarrow (a)$.

Соотношение $(b) \Longleftrightarrow (c)$ — это теорема 10. Импликация $(a) \Longrightarrow (b)$ следует из теоремы 7. Импликация $(b) \Longrightarrow (a)$ при условиях 1 или 2 следует из теорем 8 и 5. Импликация $(b) \Longrightarrow (a)$ при условии 3 следует из теоремы 9. Импликация $(b) \Longrightarrow (a)$ при условии 4 — это теорема 12.

В заключение сформулируем утверждение, которое представляется верным, однако не доказано. Предполагается, что матрицы B и C имеют полный ранг m и k соответственно.

Гипотеза 1. *Пусть задана система* (4.1) *с матрицами вида* (4.3). *Если* $m+k=n+1$, *то система* (4.1) *согласованна.*

В случае когда $m = n$ или $k = n$, очевидно, что это утверждение верно. При $n \leqslant 5$ это утверждение фактически доказано (перебором) в теореме 12 (при $n = 3$ случай $m = k = 2$; при $n = 4$ случаи 1 и 2; при $n = 5$ случаи 1, 2, 3). Для произвольного n это утверждение пока не доказано. Если это утверждение верно, то в случае системы (4.1) с матрицами вида (4.3) из этого утверждения и теоремы 11 будет следовать достаточное условие $m + k \geqslant n + 1$ глобальной управляемости спектра не только для почти всех матриц (см. § 1), но и для *всех* матриц A, B, C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попова С. Н. К вопросу об управлении показателями Ляпунова // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 1992. — № 1. — С. 23–39.
2. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 10. — С. 1687–1696.
3. Попова С. Н., Тонков Е. Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 723–724.
4. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 2. — С. 226–235.
5. Зайцев В. А. Согласованность и управление показателями Ляпунова // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1999. — Вып. 2(17). — С. 3–40.
6. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 1949–1957.
7. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 2. — С. 228–238.
8. Макаров Е. К., Попова С. Н. О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова системы с некратными показателями // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 4. — С. 495–499.
9. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
10. Wonham W. M. On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1967. — Vol. AC-12, № 6. — P. 660–665.

11. Леонов Г. А., Шумафов М. М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.
12. Davison E. J., Wang S. H. On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — P. 516–518.
13. Kimura H. On Pole Assignment by Gain Output Feedback // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — P. 509–516.
14. Hermann R., Martin C. Applications of algebraic geometry to systems theory: Part 1 // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1977. — Vol. AC-22. — P. 19–25.
15. Willems J., Hesselink W. Generic properties of the pole placement problem // Proc. of 7th IFAC World Congress. — 1978. — P. 1725–1729.
16. Ланкастер П. Теория матриц. М., 1978.
17. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
19. Зайцев В. А. Модальное управление линейным квазидифференциальным уравнением // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2004. — № 1. — С. 3–20.
20. Зайцев В. А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 9. — С. 1320–1328.

Поступила в редакцию 01.08.09

V. A. Zaitsev

Consistency and control over spectrum in linear systems with an observer

The property of consistency of a linear control system with the observer is investigated. New necessary conditions and sufficient conditions for consistency have been obtained. The problem of control over spectrum in the system with a linear incomplete feedback is investigated; necessary and sufficient conditions for the global controllability over the spectrum have been obtained in the case where the system coefficients have a special form. Connection is established between the property of consistency of a stationary system with the observer and the global controllability over the spectrum of the closed-loop system.

Keywords: control system, incomplete feedback, consistency, control over spectrum.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 93C15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: verba@udm.ru