ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 517.9

© *А. С. Воронин, Н. Б. Медведева*

УСТОЙЧИВОСТЬ МОНОДРОМНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК С ФИКСИРОВАННОЙ ДИАГРАММОЙ НЬЮТОНА

Вычисляется второй член асимптотики преобразования монодромии монодромной особой точки для некоторого класса векторных полей на плоскости, диаграмма Ньютона которых состоит из двух четных ребер. В таком случае главный член преобразования монодромии тождественен. Полученный результат дает достаточное условие фокуса для особой точки из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: монодромная особая точка, преобразование монодромии, диаграмма Ньютона, раздутие особенностей.

Введение

В данной работе вычисляется второй член асимптотики преобразования монодромии монодромной особой точки в случае, когда главный член этого преобразования тождественен.

Для особой точки векторного поля на плоскости либо существует траектория, входящая в нее с определенной касательной, либо не существует ни одной такой траектории. Если векторное поле аналитическое, то во втором случае особая точка является *монодромной*, то есть для нее определено преобразование монодромии $\Delta(\rho)$, переводящее некоторую кривую (полутрансверсаль) с началом в особой точке в себя вдоль траекторий векторного поля.

Если $\Delta(\rho) \equiv \rho$, то особая точка — центр. Доказано [1, 2], что при подходящем выборе полутрансверсали $\Delta(\rho) = c\rho + o(\rho)$, $c > 0$, при $\rho \to 0$. Неравенство $\ln c \neq 0$ является достаточным условием того, чтобы особая точка была фокусом.

В работе [3] вычислена величина $\ln c$ для Γ-невырожденных векторных полей, где Γ — диаграмма Ньютона. Однако оказалось, что если все ребра диаграммы Ньютона Γ четные, то $\ln c \equiv 0$ на всем пространстве Γ-невырожденных векторных полей, то есть преобразование монодромии в этом случае имеет асимптотику $\Delta(\rho) = \rho + o(\rho)$, а значит, невозможно получить достаточное условие фокуса с помощью главного члена асимптотики.

В настоящей работе рассматриваются Γ-невырожденные векторные поля с монодромной особой точкой, имеющей диаграмму Ньютона, состоящую из двух четных ребер.

Ранее второй член асимптотики преобразования монодромии был вычислен в [4] для того же класса векторных полей, но с очень ограничительными дополнительными условиями, а также в [5] для случая, когда отношение собственных значений седловой особой точки, возникающей в результате раздутия особенности, по модулю меньше единицы. Случай, когда это отношение равно единице, рассматриваемый в данной статье, является более технически сложным, так как нормальная форма седла в этом случае содержит резонансный моном.

Дадим некоторые определения, связанные с диаграммой Ньютона.

Рассмотрим аналитическое векторное поле в окрестности точки ноль на плоскости, которое определяет динамическую систему

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y). \tag{0.1}$$

Определение 1. Рассмотрим тейлоровские разложения

$$yX(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} x^i y^j, \quad xY(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} x^i y^j.$$

Носителем системы (0.1), а также векторного поля, соответствующего ей, называется множество таких пар (i,j), что $(a_{ij},b_{ij})\neq(0,0)$. Вектор (a_{ij},b_{ij}) называется *векторным коэффициентом* точки носителя (i,j). *Показателем* точки носителя (i,j) называется величина

$$\begin{cases} b_{ij}/a_{ij}, & \text{если } a_{ij}\neq 0,\\ \infty, & \text{если } a_{ij}=0.\end{cases}$$

Векторным коэффициентом целочисленной точки, не принадлежащей носителю, будем считать нулевой вектор $(0,0)$.

Определение 2. Рассмотрим множество $\bigcup\limits_{(i,j)}\{(i,j)+\mathbb{R}^2_+\}$, где $\mathbb{R}^2_+$ — положительный квадрант, объединение берется по всем точкам (i,j), принадлежащим носителю. Граница выпуклой оболочки этого множества состоит из двух открытых лучей и ломаной, которая может состоять и из одной точки. Эта ломаная называется *диаграммой Ньютона* системы (0.1), а также соответствующего ей векторного поля. Звенья ломаной называются *ребрами* диаграммы Ньютона, а их концы — ее *вершинами.*

Определение 3. *Показателем ребра* диаграммы Ньютона называется положительное рациональное число α, равное тангенсу угла между ребром и осью ординат.

Определение 4. Пусть $\alpha=\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Ребро диаграммы Ньютона с показателем α назовем *четным*, если одно из чисел m и n четно, и *нечетным* в противном случае.

Рассмотрим ребро ℓ диаграммы Ньютона системы (0.1) с показателем $\alpha=\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Члены ряда Тейлора системы (0.1) сгруппируем таким образом, что

$$yX(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(x,y),\qquad xY(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(x,y),\tag{0.2}$$

где

$$X_k(x,y)=\sum_{ni+mj=k+k_0}a_{ij}x^iy^j,\quad Y_k(x,y)=\sum_{ni+mj=k+k_0}b_{ij}x^iy^j\tag{0.3}$$

— квазиоднородные полиномы степени $k+k_0$ с весами n и m переменных x и y соответственно, $k_0>0$.

Обозначим $F_k(x,y)=nY_k(x,y)-mX_k(x,y)$. Таким образом, для любого ребра диаграммы Ньютона мы определили наборы квазиоднородных полиномов $X_k(x,y),Y_k(x,y)$ и $F_k(x,y)$, $k\geqslant 0$. Кроме того, положим

$$\Phi_0=\frac{X_0}{F_0};\quad \Psi_0=-\frac{Y_0}{F_0};\quad \Phi_1=\frac{Y_0X_1-X_0Y_1}{F_0^2}.\tag{0.4}$$

Пусть m/n — несократимая дробь. Для любого квазиоднородного полинома $R(x,y)$ с весами n и m переменных x и y справедливо разложение

$$R(x,y)=Ax^{s_1}y^{s_2}\prod_i(y^n-b_ix^m)^{k_i},$$

где b_i — различные ненулевые комплексные числа, $k_i\geqslant 0$, $s_1\geqslant 0$, $s_2\geqslant 0$ [3, с. 159].

Определение 5. Множитель вида $y^n-b_ix^m$, $b_i\neq 0$, называется *простым множителем* полинома $R(x,y)$, число k_i называется *кратностью* этого множителя.

Определение 6. Векторное поле (росток) с диаграммой Ньютона Γ называется Γ*-невырожденным*, если: 1) для любого ребра диаграммы Ньютона Γ полином $F_0(x,y)$ не имеет простых множителей кратности больше единицы; 2) показатель любой не лежащей на координатной оси вершины отличен от показателей примыкающих к ней ребер.

Множество Γ-невырожденных векторных полей с монодромной особой точкой ноль обозначим M_Γ.

Определение 7. Диаграмма Ньютона Γ называется *монодромной*, если множество M_Γ непусто. В [3, с. 160] доказано, что диаграмма Ньютона является монодромной тогда и только тогда, когда она имеет по одной вершине на каждой координатной оси и длины проекций каждого ребра на координатные оси являются четными числами.

Теорема 1 (см. [3]). *Пусть Γ — монодромная диаграмма Ньютона. Все ребра диаграммы Ньютона Γ четны, если и только если* $\ln\ c = 0$.

Пусть диаграмма Ньютона векторного поля V состоит из двух ребер ℓ и $\widetilde{\ell}$ с показателями $\alpha = \frac{m}{n}$, $\widetilde{\alpha} = \frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ соответственно, где $\widetilde{\alpha} > \alpha$. Для каждого из ребер можем рассмотреть разложения вида (0.2)–(0.3). Функции, аналогичные $X_k, Y_k, F_k, \Phi_0, \Phi_1, \Psi_0$ и соответствующие ребру $\widetilde{\ell}$, обозначим $\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k, \widetilde{F}_k, \widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Phi}_1, \widetilde{\Psi}_0$.

Точки целочисленной решетки (i, j), лежащие на ребре ℓ ($\widetilde{\ell}$ соответственно), удовлетворяют уравнению $ni + mj = d_0$ ($\widetilde{n}i + \widetilde{m}j = \widetilde{d}_0$ соответственно), где $d_0 > 0$, $\widetilde{d}_0 > 0$ — натуральные числа. Рассмотрим на плоскости показателей прямые ℓ_1 и $\widetilde{\ell}_1$, задаваемые соответственно уравнениями $nx + my = d_0 + 1$ и $\widetilde{n}x + \widetilde{m}y = \widetilde{d}_0 + 1$. Пусть A — точка пересечения этих прямых.

Предложение 1. *Если $d = \widetilde{m}n - m\widetilde{n} = 1$, то точка A имеет целочисленные координаты.*

Предложение 1 будет доказано ниже.

Через C обозначим вершину диаграммы Ньютона, соединяющую ребра ℓ и $\widetilde{\ell}$. В случае $d = 1$ кроме точек A и C носителя векторного поля V рассмотрим целочисленную точку B, ближайшую к C на ребре $\widetilde{\ell}$, и целочисленную точку D, ближайшую к C на ребре ℓ. Обозначим векторные коэффициенты точки A через (a_1, a_2), точки B через (b_1, b_2), точки C через (c_1, c_2), точки D через (d_1, d_2).

Определение интеграла Адамара дано в [7]. Дадим здесь краткое определение для случая рациональных функций, который только нам и понадобится.

Определение 8. Пусть $g(x)$ — рациональная функция, ограниченная на промежутке $[a, +\infty)$, $n \geqslant -1$ — целое число. Тогда $\displaystyle\int_a^{\frac{1}{\varepsilon}} x^n g(x)\,dx = Q_0 + Q_1 \ln\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} q(\varepsilon)$, где $q(\varepsilon)$ — аналитическая в окрестности нуля функция, причем разложение $\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} q(\varepsilon)$ не содержит свободного члена. Тогда интеграл Адамара (конечная часть несобственного интеграла) от функции $x^n g(x)$ обозначается $\left|\overline{\displaystyle\int_a^{+\infty} x^n g(x)\,dx}\right.$ и равняется Q_0.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 2. *Пусть Γ — монодромная диаграмма Ньютона, состоящая из двух чётных рёбер с показателями $\alpha = \frac{m}{n}$, $\widetilde{\alpha} = \frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ $(\widetilde{\alpha} > \alpha)$, $\frac{m}{n}$ и $\frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ — несократимые дроби, V — Γ-невырожденное векторное поле с монодромной особой точкой $(0, 0)$, и пусть*

$$\lambda = \frac{nc_2 - mc_1}{\widetilde{n}c_2 - \widetilde{m}c_1} = 1.$$

Тогда:

1) *если $d = \widetilde{m}n - m\widetilde{n} = 1$, то преобразование монодромии особой точки $(0, 0)$ векторного поля V имеет при $\rho \to 0$ асимптотику вида*

$$\Delta(\rho) = \rho(1 + F_2\rho\ln\rho + O(\rho)),$$

причем уравнение $F_2=0$ *эквивалентно уравнению*

$$d_1b_1(2\widetilde{m}^2+\widetilde{m}m-m^2)+d_1b_2(-2\widetilde{m}\widetilde{n}-\widetilde{m}n+nm)+d_2b_1(-2\widetilde{n}\widetilde{m}-\widetilde{n}m+mn)+ \\ +d_2b_2(2\widetilde{n}^2+\widetilde{n}n-n^2)-c_1a_1\widetilde{m}(\widetilde{m}+m)+c_1a_2\widetilde{m}(\widetilde{n}+n)+c_2a_1\widetilde{n}(\widetilde{m}+m)-c_2a_2\widetilde{n}(\widetilde{n}+n)=0;$$

2) если $d=\widetilde{m}n-m\widetilde{n}>1,$ то преобразование монодромии имеет асимптотику вида

$$\Delta(\rho)=\rho(1+F_2\rho+o(\rho)),$$

где в случае, когда m нечётно и $\widetilde{m}$ чётно, уравнение $F_2=0$ эквивалентно уравнению

$$\left(1+\exp\quad v.p.\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\widetilde{\Phi}_0(1,w)}{w}\,dw\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_1(w,1)}{w}\exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w}\frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\,d\xi}\,dw+\right. \\ +\left(1+\exp\quad v.p.\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\Psi_0(w,1)}{w}\,dw\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w}\exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w}\frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\,d\xi}\,dw=0,\right.$$

а в случае, когда m и $\widetilde{m}$ нечётны, уравнение $F_2=0$ эквивалентно уравнению

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_1(w,1)}{w}\exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w}\frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\,d\xi}\,dw=\exp\left(v.p.\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\Psi_0(w,1)}{w}\,dw\right)\times\right. \\ \times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{\Phi}_1(-1,w)}{w}\exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w}\frac{\widetilde{\Phi}_0(-1,\xi)}{\xi}\,d\xi}\,dw-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w}\exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w}\frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\,d\xi}\,dw\,.\right.\right.$$

Два остальных случая четности-нечетности m и $\widetilde{m}$ получаются из рассмотренных в теореме 2 с помощью замены x на y.

Предложение 2. *Равенства* $F_2=0$ *из формулировки теоремы* 2 *в обоих случаях не выполняются тождественно на множестве* Γ *-невырожденных векторных полей с диаграммой Ньютона* Γ *и монодромной особой точкой.*

Предложение 2 в случае 2) доказывается простым подбором подынтегральных функций. В случае 1) утверждение очевидно.

Если $F_2\neq 0,$ то особая точка — фокус. Из предложения 2 вытекает, что граница устойчивости в рассматриваемом классе векторных полей с монодромной особой точкой задается уравнением $F_2=0.$ Построение формул, задающих границы устойчивости в классах монодромных векторных полей, может дать ключ к исследованию вопроса об аналитической разрешимости проблемы устойчивости особых точек на плоскости [6].

§ 1. Раздутие особенности

Пусть диаграмма Ньютона системы (0.1) состоит из двух ребер ℓ и $\widetilde{\ell}$ с показателями $\alpha=\frac{m}{n}$ и $\widetilde{\alpha}=\frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}},$ $\alpha<\widetilde{\alpha},$ $\frac{m}{n},$ $\frac{\widetilde{m}}{\widetilde{n}}$ — несократимые дроби, $d=\widetilde{m}n-m\widetilde{n}.$

В положительном квадранте $x>0,$ $y>0$ рассмотрим замену переменной

$$x=wz^n,\quad y=z^m \tag{1.1}$$

и сопоставим ее ребру $\ell.$ Пусть $\delta,$ ε_1 — малые положительные числа. Образом прямоугольника $P_\ell=\bigl\{(z,w):0\leqslant w\leqslant\delta^{-d/\alpha},\quad 0\leqslant z\leqslant\varepsilon_1\bigr\}$ при отображении (1.1) является некоторый криволинейный сектор S_ℓ с вершиной в начале координат.

В положительном квадранте $x>0,$ $y>0$ рассмотрим замену переменной

$$x=\widetilde{z}^{\widetilde{n}},\quad y=\widetilde{z}^{\widetilde{m}}\widetilde{w} \tag{1.2}$$

и сопоставим ее ребру $\widetilde{\ell}$. Пусть ε, ε_2 — малые положительные числа. Образом прямоугольника $P_{\widetilde{\ell}} = \big\{(\widetilde{z}, \widetilde{w}) : 0 \leqslant \widetilde{w} \leqslant \varepsilon^{-d}, \quad 0 \leqslant \widetilde{z} \leqslant \varepsilon_2\big\}$ при отображении (1.2) является некоторый криволинейный сектор $S_{\widetilde{\ell}}$ с вершиной в начале координат.

Пусть C — общая вершина ребер ℓ и $\widetilde{\ell}$. В малой окрестности нуля между секторами P_ℓ и $P_{\widetilde{\ell}}$ имеется «зазор» в виде криволинейного сектора S_c, который мы сопоставим вершине C. Замена переменной

$$x = u^n v^{\widetilde{n}}, \quad y = u^m v^{\widetilde{m}} \tag{1.3}$$

отображает прямоугольник $P_c = \big\{0 \leqslant u \leqslant \varepsilon^{\widetilde{n}}, 0 \leqslant v \leqslant \delta^n\big\}$ в сектор S_c. Более подробно процесс раздутия описан в [6].

§ 2. Отображение соответствия в прямоугольнике, соответствующем ребру

Обозначим через $g(z)$ отображение соответствия в прямоугольнике P_ℓ, переводящее границу $w = 0$ в границу $w = \delta^{-d/\alpha}$, а через $f(\widetilde{z})$ отображение соответствия в прямоугольнике $P_{\widetilde{\ell}}$, переводящее границу $\widetilde{w} = \varepsilon^{-d}$ в границу $\widetilde{w} = 0$.

Лемма 1. *Имеют место разложения*

$$g(z) = b_0 z(1 + b_1 z + o(z)), \quad f(\widetilde{z}) = a_0 \widetilde{z}(1 + a_1 \widetilde{z} + o(\widetilde{z})), \tag{2.1}$$

где

$$b_0 = \exp \int_0^{\delta^{-\frac{d}{\alpha}}} \frac{\Psi_0(w,1)}{w}\, dw, \quad b_1 = -\int_0^{\delta^{-\frac{d}{\alpha}}} \frac{\Phi_1(w,1)}{w} \exp \int_0^w \frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\, d\xi\, dw, \tag{2.2}$$

$$a_0 = \exp \int_{\varepsilon^{-d}}^0 \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,w)}{w}\, dw, \quad a_1 = a_0 \int_{\varepsilon^{-d}}^0 \frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w} \exp \int_0^w \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{w}\, d\xi\, dw. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем в системе (0.1) замену переменных (1.1), получим

$$\frac{dz}{dw} = z(\Psi_0(w,1) - z\alpha\Phi_1(w,1) + o(z)). \tag{2.4}$$

Аналогично после замены (1.2) получаем

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\widetilde{w}} = \widetilde{z}(\widetilde{\Phi}_0(1,\widetilde{w}) + \widetilde{z}\widetilde{\Phi}_1(1,\widetilde{w}) + o(\widetilde{z})). \tag{2.5}$$

Решая уравнения в вариациях вдоль решения $z = 0$ уравнения (2.4) и вдоль решения $\widetilde{z} = 0$ уравнения (2.5), получаем формулы (2.1)–(2.3). □

§ 3. Отображение соответствия в прямоугольнике, соответствующем вершине

В прямоугольнике P_c обозначим через L_1 границу $v = \delta^n$, а через L_2 границу $u = \varepsilon^{\widetilde{n}}$. Как будет показано ниже, при малых ε и δ определено отображение соответствия $\widetilde{\varphi} : L_1 \to L_2$ вдоль траекторий векторного поля V_c, полученного после раздутия и определённого в прямоугольнике P_c. Везде ниже через $o^x(1)$ обозначается бесконечно малая от x при $x \to 0$.

Напомним, что вершине C диаграммы Ньютона Γ была поставлена в соответствие степенная замена (1.3) с матрицей показателей $C_c = \begin{pmatrix} n & \widetilde{n} \\ m & \widetilde{m} \end{pmatrix}$. Набор собственных значений матрицы линейной части векторного поля V_c, полученного в результате замены (1.3), в особой точке $(u,v) = (0,0)$, получается из векторного коэффициента вершины C с помощью преобразования C_c^{-1} [3]. Система, полученная в результате замены (1.3), после умножения на число d и некоторые степени u и v имеет вид

$$\dot{u} = u(\lambda_1 + a^1(u,v)), \quad \dot{v} = -v(\lambda_2 + a^2(u,v)), \tag{3.1}$$

где $\lambda_1 = \widetilde{m}c_1 - \widetilde{n}c_2$, $\lambda_2 = mc_1 - nc_2$, (c_1, c_2) — векторный коэффициент вершины C. Поскольку $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 > 0$, то $(u, v) = (0, 0)$ является невырожденным седлом. Поэтому определено отображение соответствия $\widetilde{\varphi} : L_1 \to L_2$. Носитель системы (3.1) расположен в пределах некоторого угла, направления сторон которого задаются векторами с положительными координатами. Причём расстояние между точками носителя, расположенными на прямых $i = 1$ и $j = 1$, равно $d = \widetilde{m}n - \widetilde{n}m$. Рассмотрим разложения

$$a^1(u, v) = a_0^1(u) + a_1^1(u)v + O(v^2), \quad a^2(u, v) = a_0^2(u) + a_1^2(u)v + O(v^2), \quad a_0^1(0) = 0, \quad a_0^2(0) = 0.$$

Так как носитель системы (3.1) расположен внутри угла, то a_k^l, $k = 0, 1$, $l = 1, 2$, являются полиномами от u. Пусть

$$\begin{aligned} a_0^1(x) &= \alpha_{10}x + o(x), \qquad & a_1^1(x) &= \alpha_{01} + \alpha_{11}x + o(x), \\ a_0^2(x) &= \beta_{10}x + o(x), \qquad & a_1^1(x) &= \beta_{01} + \beta_{11}x + o(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Отображение $\widetilde{\varphi}$ имеет асимптотическое разложение вида*

$$v = \widetilde{\varphi}(u) = \gamma_0 \frac{\delta^n}{\varepsilon^{\widetilde{n}}} u\big(1 + \gamma_1 u \ln \frac{u}{\varepsilon^{\widetilde{n}}} + \gamma_2 u + o(u)\big), \tag{3.3}$$

где

$$\gamma_0 = \ell_0(\varepsilon^{\widetilde{n}})m_0(\delta^n), \quad \gamma_1 = c^*\delta^n m_0(\delta^n), \quad \gamma_2 = m_1(\delta^n) + \ell_1(\varepsilon^{\widetilde{n}})m_0(\delta^n)\delta^n\varepsilon^{-\widetilde{n}}, \tag{3.4}$$

$$c^* = \lambda_1^{-2}(\alpha_{10}\alpha_{01} - \beta_{10}\beta_{01} + \lambda_1\beta_{11} - \lambda_2\alpha_{11}), \quad m_0(\delta) = 1 + o^{\delta}(1), \quad \ell_0(\varepsilon) = 1 + o^{\varepsilon}(1), \tag{3.5}$$

причём если $d > 1$, то $m_0(\delta) = 1 + o(\delta)$, $\ell_0(\varepsilon) = 1 + o(\varepsilon)$, $m_1(\delta) = o(\delta)$, $\ell_1(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Везде ниже через $G^*(x, y)$ будем обозначать любую функцию, определенную в окрестности точки $x = 0, y = 0$ и ограниченную в этой точке.

Рассмотрим систему вида (3.1) в координатах (x, y) в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, $0 \leqslant y \leqslant \delta$ при малых $\varepsilon, \delta > 0$:

$$\dot{x} = x(\lambda_1 + a^1(x, y)), \quad \dot{y} = -y(\lambda_2 + a^2(x, y)). \tag{3.6}$$

Поделим систему (3.6) на $\lambda_1 + a^1(x, y)$. Получим систему

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y(1 + a(x, y)), \tag{3.7}$$

где

$$a(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + y^2G^*(x, y), \quad a_0(x) = \frac{\lambda_2 + a_0^2(x)}{\lambda_1 + a_0^1(x)} - 1,$$

$$a_1(x) = \frac{a_1^2(x)(\lambda_1 + a_0^1(x)) - a_1^1(x)(\lambda_2 + a_0^2(x))}{(\lambda_1 + a_0^1(x))^2} = f_0 + f_1x + o(x), \tag{3.8}$$

$$f_0 = \frac{\beta_{01} - \alpha_{01}}{\lambda_1}, \quad f_1 = \lambda_1^{-2}(2\alpha_{01}\alpha_{10} - 2\beta_{01}\alpha_{10} + \beta_{01}\alpha_{10} - \beta_{10}\alpha_{01} + \lambda_1\beta_{11} - \lambda_2\alpha_{11}). \tag{3.9}$$

Лемма 3. *Существует аналитическая в точке $(x, y) = (0, 0)$ замена переменных $x = x$, $v = K(x, y)$, которая приводит уравнение (3.7) к виду*

$$\dot{x} = x, \quad \dot{v} = -v(1 + c^*xv + x^2v^2G^*(x, v)), \tag{3.10}$$

где $G^*(x, v)$ — аналитическая функция, $c^* = \lambda_1^{-2}(\alpha_{01}\alpha_{10} - \beta_{01}\beta_{10} + \lambda_1\beta_{11} - \lambda_2\alpha_{11})$.

При этом имеют место разложения

$$K(x, y) = y(m_0(y) + m_1(y)x + x^2G^*(x, y)) = y(\ell_0(x) + \ell_1(x)y + y^2G^*(x, y)),$$

где $m_0(y) = 1 + o^y(1)$, $\ell_0(y) = 1 + o^x(1)$, причём если

$$\alpha_{10} = \beta_{10} = \alpha_{01} = \beta_{01} = \alpha_{11} = \beta_{11} = 0, \tag{3.11}$$

то $m_1(y) = o(y)$ при $y \to 0$, $\ell_1(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $\ell_0(x) = 1 + o(x)$ при $x \to 0$, $m_0(y) = 1 + o(y)$ при $y \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В уравнении (3.7) произведём замену переменных $v = \widetilde{\varphi}_0(x)y$, где $\widetilde{\varphi}_0(x) = e^{\alpha(x)}$, $a_0(x) = x\alpha'(x)$, $\alpha(0) = 0$. Получим уравнение вида $\dot{x} = x$, $\dot{v} = -v(1+v\widetilde{a}(x,v))$, где $v\widetilde{a}(x,v) = \widetilde{\varphi}_0^{-1}(x)a_1(x)v + v^2G^*(x,v)$, $a_1(x)$ определяется формулой (3.8). Предположим далее, что в уравнении (3.7) $a_0(x) = 0$ и переобозначим $a_1 = \widetilde{\varphi}_0^{-1}a_1$. Если бы существовала замена переменных $v = \varphi(x,y)$, приводящая систему (3.7) к виду $\dot{x} = x$, $\dot{v} = -v(1 + c^*xv)$, то функция φ удовлетворяла бы уравнению в частных производных

$$x\varphi'_x - y(1 + a_1y + y^2G^*(x,y))\varphi'_y + \varphi = -c^*x\varphi^2. \tag{3.12}$$

Будем искать функцию $\varphi(x,y)$ в виде

$$\varphi(x,y) = y\varphi_0(x) + y^2\varphi_1(x) + y^3G^*(x,y). \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.12) и приравнивая коэффициенты при y и y^2, получим

$$x\varphi'_0(x) = 0, \quad x\varphi'_1(x) - \varphi_1(x) = a_1(x) - c^*x.$$

Отсюда

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_1(x) = x\int \frac{a_1(x) - c^*x}{x^2}\,dx. \tag{3.14}$$

Положив c^* равным коэффициенту при x в разложении $a_1(x)$, можем выбрать $\varphi_1(x)$ в виде аналитической при $x = 0$ функции.

Вычислим c^*. На самом деле вместо $a_1(x)$ нужно взять $\frac{a_1(x)}{\widetilde{\varphi}_0(x)}$, где $a_1(x)$ определяется по формуле (3.8), поскольку была сделана замена переменных $v = \varphi_0(x)y$. Напомним, что $\widetilde{\varphi}_0^{-1}(x) = e^{-\alpha(x)}$, где

$$x\alpha'(x) = a_0(x) = \frac{\lambda_2 + a_0^2(x)}{\lambda_1 + a_0^1(x)} - 1 = \frac{\lambda_2 + \beta_{10}x + o(x)}{\lambda_1 + \alpha_{10}x + o(x)} - 1 = \left(\frac{\beta_{10}}{\lambda_1} - \frac{\alpha_{10}}{\lambda_1}\right)x + o(x).$$

Отсюда $\widetilde{\varphi}_0(x) = 1 + \varphi_{01}x + o(x)$, $\varphi_{01} = \frac{\beta_{10}-\alpha_{10}}{\lambda_1}$. Отсюда и из (3.9)

$$c^* = \lambda_1^{-2}(\alpha_{01}\alpha_{10} - \beta_{01}\beta_{10} + \lambda_1\beta_{11} - \lambda_2\alpha_{11}). \tag{3.15}$$

Если выполняются условия (3.11), то из (3.15) вытекает, что $c^* = 0$, и из (3.8) следует, что $a_1(x) = o(x)$. Отсюда и из (3.14) следует, что $\varphi_1(x) = o(x)$.

Рассмотрим функцию $f(x,y) = y(1 + \varphi_1(x)y)$. Она удовлетворяет уравнению

$$xf'_x - y(1 + a(x,y))f'_y + f + c^*xf^2 = y^3\eta, \tag{3.16}$$

где $\eta = \eta(x,y)$ — аналитическая при $x = y = 0$, $y^2\eta(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\eta_n(y)x^n$, $\eta_n(y)$ делится на y^2, $a(x,y) = y\widetilde{a}(x,y) = \widetilde{\varphi}_0^{-1}(x)a_1(x)y + y^2G^*(x,y)$.

Подставим $\varphi = f + \psi$ в уравнение (3.12). Тогда для ψ получим уравнение

$$x\psi'_x - y(1 + a(x,y))\psi'_y + \psi + y^3\eta + c^*(f+\psi)^2 = c^*xf^2. \tag{3.17}$$

Разложим $a(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(y)x^n$ и будем искать решение (3.17) в виде

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(y)x^n. \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в (3.17) и приравнивая коэффициенты при x^0 и x^1, получим уравнения

$$y(1 + b_0(y))\psi'_0(y) - \psi_0(y) = y\eta_0(y), \tag{3.19}$$

$$y(1+b_0(y))\psi_1'(y)-2\psi_1(y)=y\eta_1(y)-yb_1(y))\psi_0'(y)+r_1(y), \tag{3.20}$$

где $r_1(y)=c^*(\psi_0^2(y))+2\psi_0(y)f_0(y))$, $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(y)x^n$, $f_0(y)=y+y^2\varphi_{10}$. Решение уравнения (3.19) имеет вид $\psi_0(y)=ye^{\beta(y)}\displaystyle\int\frac{e^{-\beta(y)}\eta_0(y)}{y(1+b_0(y))}\,dy$, где $(1+b_0(y))^{-1}-1=y\beta'(y)$, $\beta(0)=0$. Очевидно, что $\psi_0(y)$ можно выбрать делящимся на y^3. Тогда и правая часть (3.20) делится на y^3. Отсюда получаем, что решение уравнения (3.20)

$$\psi_1(y)=y^2e^{2\beta(y)}\int\frac{y\eta_1(y)-yb_1(y)\psi_0'(y)+r_1(y)}{y^3(1+b_0(y))}e^{-2\beta(y)}\,dy$$

также можно выбрать делящимся на y^3. Составим функцию $g(x,y)=\psi_0(y)+\psi_1(y)x$. Тогда g удовлетворяет уравнению

$$xg_x'-y(1+a)g_y'+g+c^*x(f+g)^2+y^3\eta=c^*xf^2+x^2y^3h(x,y), \tag{3.21}$$

где $h(x,y)$ — аналитическая в нуле.

Положим $\widetilde{K}=f+g$. Из (3.16) и (3.21) получаем, что замена переменных $v=\widetilde{K}(x,y)$ приводит уравнение (3.7) (где $a_0(x)\equiv 0$) к виду (3.10). И потому суперпозиция замен $v=\widetilde{\varphi}_0(x,y)$ и $v=\widetilde{K}(x,y)$ имеет вид $v=K(x,y)=\widetilde{K}(x,\widetilde{\varphi}_0(x)y)$ и приводит исходное уравнение (3.7) к виду (3.10). При этом

$$\widetilde{K}(x,y)=f(x,y)+g(x,y)=y(1+\varphi_1(x)y)+\psi_0(y)+x\psi_1(y)=$$
$$=y(1+\widetilde{\psi}_0(y)+\varphi_{10}y+x(\varphi_{11}y+\widetilde{\psi}_1(y))+x^2G^*(x,y)),$$

где $\widetilde{\psi}_i(y)=\frac{\psi_i(y)}{y}=o(y)$. Отсюда

$$K(x,y)=\widetilde{\varphi}_0(x)y(1+\widetilde{\psi}_0(\widetilde{\varphi}_0(x)y)+\varphi_{10}\widetilde{\varphi}_0(x)y+x(\varphi_{11}\widetilde{\varphi}_0(x)y)+\widetilde{\psi}_1(\varphi_0(x)y)+x^2G^*(x,y))=$$
$$=y(m_0(y)+xm_1(y)+x^2G^*(x,y)),$$

где

$$m_0(y)=1+\varphi_{10}y+o(y),\quad m_1(y)=\varphi_{01}+(2\varphi_{10}\varphi_{01}+\varphi_{11})y+o(y),$$
$$\widetilde{\varphi}_0(x)=1+\varphi_{01}x+o(x),\quad \varphi_1(x)=\varphi_{10}+\varphi_{11}x+o(x).$$

Очевидно, что если выполняются условия (3.11), то $m_0(y)=1+o(y)$, $m_1(y)=o(y)$. С другой стороны,

$$\widetilde{K}(x,y)=y(1+\varphi_1(x)y)+\widetilde{\psi}_0(y)+x\widetilde{\psi}_1(y)=y(1+\varphi_1(x)y+y^2G^*(x,y)).$$

Отсюда

$$K(x,y)=\widetilde{K}(x,\widetilde{\varphi}_0(x)y)=\widetilde{\varphi}_0(x)y(1+\varphi_1(x)\widetilde{\varphi}_0(x)y+y^2G^*(x,y))=y(\ell_0(x)+\ell_1(x)y+y^2G^*(x,y)),$$

где $\ell_0(x)=\widetilde{\varphi}_0(x)=1+\varphi_{01}x+o(x)$, $\ell_1(x)=\widetilde{\varphi}_0(x)^2\varphi_1(x)=\varphi_{10}+(\varphi_{11}+2\varphi_{01}\varphi_{10})x+o(x)$. Если выполняются условия (3.11), то $\ell_0(x)=1+o(x)$, $\ell_1(x)=o(x)$. Лемма 3 доказана. □

Продолжим доказательство леммы 2. Рассмотрим уравнение вида (3.10):

$$\dot{x}=x,\quad \dot{y}=-y(1+c^*xy+x^2y^2G^*(x,y)). \tag{3.22}$$

Предложение 3. *При достаточно малых* $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ *уравнение* (3.22) *имеет в области* $0<x\leqslant\varepsilon$, $0<y\leqslant\delta$ *первый интеграл вида*

$$F(x,y)=yx(1+c^*xy\ln\frac{x}{\varepsilon}+xy^2G^*(x,y)), \tag{3.23}$$

где $G^*(\varepsilon,y)=0$, $G^*(x,y)\to 0$ *при* $x\to 0$ *при любом* $0<y\leqslant\delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Помимо (3.22) рассмотрим полиномиальную систему

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y(1 + c^* xy).$$

При $x > 0$, $y > 0$ перейдём к координатам $v = xy$, $z = \ln \frac{x}{\varepsilon}$. Получим систему

$$\dot{v} = -c_1 v^2, \quad \dot{z} = 1.$$

Эта система имеет первый интеграл

$$F_1(z, v) = v(1 - c_1 zv)^{-1} = v(1 + c^* zv + z^2 v^2 G^*(vz)),$$

удовлетворяющий условию $F_1|_{z=0} = v$. В координатах (x, y) этот интеграл имеет вид

$$F(x, y) = yx \left(1 + c^* xy \ln \frac{x}{\varepsilon} + xy^2 G^*(x, y)\right),$$

где G^* удовлетворяет условию $G^*(\varepsilon, y) = 0$, $\quad G^*(x, y) \to 0$ при $x \to 0$.

В [8, с. 39–43] показано, что уравнение (3.22) имеет первый интеграл вида

$$F(x, y) = xy\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) y^k\Big), \quad f_k(\varepsilon) = 0.$$

Положим $F(x, y) = F_1(x, y) + x^3 y^3 \varphi(x, y)$, $\quad \varphi(\varepsilon, y) = 0$. В [8, с. 46] показано, что $\varphi(x, y)$ ограничена в окрестности нуля. Отсюда $F(x, y)$ имеет вид (3.23). Предложение 3 доказано. □

Продолжим доказательство леммы 2. Согласно предложению 3 уравнение (3.10) имеет при $0 < x \leqslant \varepsilon$, $\quad 0 < v \leqslant \delta$ первый интеграл вида

$$F(x, v) = xv \left(1 + c^* xv \ln \frac{x}{\varepsilon} + xG^*(x, v)\right), \quad F|_{x=\varepsilon} = \varepsilon v, \tag{3.24}$$

$G^*(x, v) \to 0$ при $x \to 0$. Если в (3.24) положить $v = K(x, y)$, то получится первый интеграл уравнения (3.7)

$$F_0(x, y) = xK(x, y)\Big(1 + c^* xK(x, y) \ln \frac{x}{\varepsilon} + xG^*(x, y)\Big), \tag{3.25}$$

где $G^*(x, y)$ обладает теми же свойствами, что предыдущая $G^*(x, v)$. Подставляя $x = \varepsilon$ в (3.25), получим с учётом леммы 3

$$F_0(\varepsilon, y) = \varepsilon K(\varepsilon, y) = \varepsilon y(\ell_0(\varepsilon) + \ell_1(\varepsilon) y + y^2 G^*(y)).$$

Функцию $\widehat{F}(x, y)$ определим соотношением $F_0(\varepsilon, \widehat{F}) = F_0(x, y)$. Тогда $\widehat{F}$ является первым интегралом уравнения (3.7), удовлетворяющим условию $\widehat{F}|_{x=\varepsilon} = y$, и задаётся формулой

$$\widehat{F}(x, y) = \frac{F_0}{\varepsilon \ell_0(\varepsilon)}\Big(1 - \frac{\ell_1(\varepsilon)}{\varepsilon \ell_0^2(\varepsilon)} F_0 + F_0^2 G^*(x, y)\Big).$$

Обозначим $\ell_0^{-1}(\varepsilon)$ и $\frac{\ell_1(\varepsilon)}{\ell_0^2(\varepsilon)}$ снова через $\ell_0(\varepsilon)$ и $\ell_1(\varepsilon)$, так как они обладают теми же свойствами, что и исходные ℓ_0, ℓ_1, сформулированными в формулировке леммы 3. Тогда $\widehat{F}(x, y)$ имеет вид

$$\widehat{F}(x, y) = \ell_0(\varepsilon) \frac{F_0}{\varepsilon}\Big(1 + \ell_1(\varepsilon) \frac{F_0}{\varepsilon} + F_0^2 G^*(x, y)\Big). \tag{3.26}$$

Учитывая лемму 3 из (3.25), получаем

$$\frac{F_0(x, y)}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} xy(m_0(y) + m_1(y)x + x^2 G*(x, y)) \left(1 + c^* xy \ln \frac{x}{\varepsilon} m_0(y) + xG^*(x, y)\right) =$$
$$= \varepsilon^{-1} xy \left(m_0(y) + m_1(y)x + c^* m_0^2(y) xy \ln \frac{x}{\varepsilon} + xG^*(x, y)\right),$$

где последнее $G^*(x,y) \to 0$ при $x \to 0$. Подставляя последнее выражение в (3.26) и обозначая $\frac{m_1(y)}{m_0(y)}$ снова через $m_1(y)$, получим

$$\widehat{F}(x,y) = \ell_0(\varepsilon)m_0(y)\frac{xy}{\varepsilon}\Big(1 + m_1(y)x + c^*m_0xy\ln\frac{x}{\varepsilon} + l_1(\varepsilon)m_0(y)\frac{xy}{\varepsilon} + xG^*(x,y)\Big), \tag{3.27}$$

где $G^*(x,y) \to 0$ при $x \to 0$ и любом y. Поскольку $\widehat{F}(x,y)$ сохраняет постоянное значение на интегральных кривых уравнения (3.7), то при $y = \widetilde{\varphi}(x)$ выполняется равенство $\widehat{F}(\varepsilon,y) = \widehat{F}(x,\delta)$, или

$$y = \ell_0(\varepsilon)m_0(\delta)\frac{\delta}{\varepsilon}x\Big(1 + c^*m_0(\delta)\delta x\ln\frac{x}{\varepsilon} + \big(m_1(\delta) + l_1(\varepsilon)m_0(\delta)\frac{\delta}{\varepsilon}\big)x + o(x)\Big).$$

Подставляя вместо x, y, ε, δ соответственно u, v, $\varepsilon^{\widetilde{n}}$, δ^n, получим утверждение леммы 2.

§ 4. Отображение соответствия в первом квадранте

Обозначим через Γ_1 (Γ_2 соответственно) образ отрезка L_1 (L_2 соответственно) при замене переменных, связывающей координаты в прямоугольниках P_c и P_ℓ (P_c и $P_{\widetilde{\ell}}$ соответственно). Тогда Γ_1 задаётся уравнением $w = \delta^{-\frac{d}{\alpha}}$, Γ_2 — уравнением $\widetilde{w} = \varepsilon^{-d}$. При малых ε и δ определено отображение соответствия $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. На Γ_1 рассмотрим параметр z, на Γ_2 — параметр $\widetilde{z}$.

Предложение 4. *Отображение φ имеет асимптотическое разложение вида*

$$\widetilde{z} = \varphi(z) = p_0z(1 + p_1z\ln z + p_2z + o(z)), \tag{4.1}$$

где

$$p_0 = \varepsilon^{n-\widetilde{n}}\delta^{n-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}\gamma_0, \quad p_1 = \gamma_1\delta^{\frac{-\widetilde{m}}{\alpha}}, \quad p_2 = \gamma_2\delta^{\frac{-\widetilde{m}}{\alpha}} - \gamma_1\delta^{\frac{-\widetilde{m}}{\alpha}}\Big(\frac{\widetilde{m}}{\alpha}\ln\delta + \widetilde{n}\ln\varepsilon\Big), \tag{4.2}$$

γ_0, γ_1, γ_2 *определены формулами* (3.4), (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (1.1)–(1.3) следует, что координаты на отрезках L_1 и Γ_1 связаны соотношением $z = u\delta^{\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}$, а на отрезках L_2 и Γ_2 — соотношением $v = \varepsilon^{-n}\widetilde{z}$. Подставляя эти соотношения в (3.3), получим (4.1), (4.2). Предложение доказано. □

Рассмотрим в окрестности начала координат в первом квадранте плоскости (x,y) отображение соответствия, отображающее ось y в ось x. Этому отображению после применения процесса раздутия соответствует отображение соответствия Δ, переводящее сторону $w = 0$ прямоугольника P_ℓ в сторону $\widetilde{w} = 0$ прямоугольника $P_{\widetilde{\ell}}$ вдоль траекторий векторных полей, полученных после раздутия. Отображение Δ является композицией трёх отображений соответствия для прямоугольников P_ℓ, P_c, $P_{\widetilde{\ell}}$ последовательно. Из (4.1) и (2.1) получаем следующее утверждение

Лемма 4. *Имеют место разложения*

$$\Delta(z) = E_0z(1 + E_1z\ln z + E_2z + o(z)), \quad \Delta^{-1}(z) = \widetilde{E}_0z(1 + \widetilde{E}_1z\ln z + \widetilde{E}_2z + o(z)), \tag{4.3}$$

где

$$E_0 = a_0b_0p_0, \quad E_1 = p_1b_0, \quad E_2 = b_1 + p_2b_0 + p_1b_0\ln b_0 + a_1p_0b_0, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{E}_0 = E_0^{-1}, \quad \widetilde{E}_2 = -E_2E_0^{-1} + E_1E_0^{-1}\ln E_0, \quad \widetilde{E}_1 = -E_1E_0^{-1}, \tag{4.5}$$

где a_i, b_i, $i = 0,1$ определены в § 2, p_i, $i = 0,1,2$ определены в формулировке предложения 4.

§ 5. Случай d > 1

Докажем теорему 2 в случае $d>1$. Продолжим исследовать асимптотику отображений соответствия. Асимптотика отображения соответствия в первом квадранте и обратного к нему задаётся формулами (4.3)–(4.5). В случае $d>1$ точки $(2,1)$, $(1,2)$ и $(2,2)$ целочисленной решетки не принадлежат носителю векторного поля V_c (системы (3.1)), поэтому выполняются условия (3.11), а значит величина c^* равна 0, откуда $\gamma_1=0$, $p_1=0$, $p_2=\gamma_2\delta^{-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}$, $E_1=0$. Отсюда

$$\Delta(z)=E_0z(1+E_2z+o(z)),$$

где $E_0=a_0p_0b_0$, $E_2=b_1+p_2b_0+a_1p_0b_0$. В [6] доказано (лемма 4.2), что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{n-\widetilde{n}}a_0=A_0<\infty,\quad \lim_{\delta\to0}\delta^{n-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}b_0=B_0<\infty. \tag{5.1}$$

Из выражений (2.2), (2.3) для a_0,b_0 легко получаем

Предложение 5. $A_0=\exp\left|\int_{+\infty}^{0}\dfrac{\widetilde{\Phi}_0(1,w)}{w}\,dw\right|,\quad B_0=\exp\left|\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\Psi_0(w,1)}{w}\,dw\right|.$

Итак, $\lim\limits_{\varepsilon,\delta\to0}E_0=A_0B_0>0$. Рассмотрим

$$p_2b_0=\gamma_2\delta^{-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}=b_0\delta^{-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}m_1(\delta^n)+\varepsilon^{-\widetilde{n}}\ell_1(\varepsilon^{\widetilde{n}})m_0(\delta^n)\delta^{n-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}b_0.$$

Так как при $d>1$ $m_1(\delta^n)=o(\delta^n)$ при $\delta\to0$, $\ell_1(\varepsilon^{\widetilde{n}})=o(\varepsilon^{\widetilde{n}})$ при $\varepsilon\to0$, то из (5.1) следует, что $\lim\limits_{\varepsilon,\delta\to0}p_2b_0=0$.

Исследуем остальные слагаемые в E_2. При $\varepsilon,\delta\to0$

$$a_1p_0b_0=\varepsilon^{n-\widetilde{n}}a_0\int_{\varepsilon^{-d}}^{0}\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w}\exp\int_0^w\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,\xi)}{\xi}\,d\xi\,dw\,\delta^{n-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}b_0(1+o^{\varepsilon,\delta}(1))\to$$

$$A_0B_0\int_{+\infty}^{0}\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w}\exp\int_0^w\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,\xi)}{\xi}\,d\xi\,dw.$$

Последний интеграл конечен, так как E_2 не зависит от ε и δ. По этой же причине конечен

$$\lim_{\delta\to0}b_1=-\int_0^\infty\frac{\Phi_1(w,1)}{w}\exp\int_0^w\frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\,d\xi\,dw.$$

Итак, доказано

Предложение 6. *В случае* $d>1$ $\Delta(z)=E_0z(1+E_2z+o(z))$, *где*

$$E_0=A_0B_0,\quad E_2=-I_1-A_0B_0I_2,$$

$$I_1=\int_0^\infty\frac{\Phi_1(w,1)}{w}\exp\int_0^w\frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\,d\xi\,dw,\quad I_2=\int_0^\infty\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w}\exp\int_0^w\frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\,d\xi\,dw. \tag{5.2}$$

§ 6. Преобразование монодромии в случае d > 1

Пусть S^x,S^y — отражения плоскости (x,y) относительно осей x и y соответственно, $S^{xy}=S^x\circ S^y$. Образы векторного поля V при отражениях S^x,S^y,S^{xy} обозначим V^x,V^y,V^{xy} соответственно. Рассмотрим в первом квадранте четыре векторных поля: V,V^x,V^y,V^{xy} и применим к ним описанный в § 1 процесс раздутия особенностей.

Функции $X_k,Y_k,F_k,\Phi_k,\Psi_k$ для отраженных векторных полей обозначим теми же буквами, но с соответствующим индексом вверху.

В [3, с. 170] доказано, что

$$\Phi_k^y(x,y)=\Phi_k(-x,y),\quad \Phi_k^x(x,y)=\Phi_k(x,-y),\quad \Phi_k^{xy}(x,y)=\Phi_k(-x,-y), \tag{6.1}$$

а также то, что если m нечётно, то

$$\Phi_0(x,-y)=\Phi_0(x,y),\quad \Phi_1(x,-y)=-\Phi_1(x,y),\quad \Psi_0(x,-y)=\Psi_0(x,y), \tag{6.2}$$

а если m чётно, то

$$\Phi_0(-x,y)=\Phi_0(x,y),\quad \Phi_1(-x,y)=-\Phi_1(x,y),\quad \Psi_0(-x,y)=\Psi_0(x,y). \tag{6.3}$$

Отсюда следует

Предложение 7. *Если $\widetilde{m}$ чётно, то $a_0=a_0^y$, $a_0^{xy}=a_0^x$; если $\widetilde{m}$ нечётно, то $a_0=a_0^x$, $a_0^{xy}=a_0^y$; если m чётно, то $b_0^y=b_0$, $b_0^x=b_0^{xy}$; если m нечётно, то $b_0=b_0^x$, $b_0^{xy}=b_0^y$.*

Отображение Δ для случаев отражённых векторных полей обозначается $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_{xy}$ соответственно. Величины I_1,I_2,a_0,b_0,A_0,B_0 для отражённых векторных полей обозначим той же буквой, но с соответствующим индексом вверху.

Из предложения 6 получаем следующее утверждение.

Лемма 5. *Имеют место разложения*

$$\Delta_x^{-1}\circ\Delta(z)=r_0z(1+r_1z+o(z)),\qquad \Delta_y^{-1}\circ\Delta_{xy}(z)=\widetilde{r}_0z(1+\widetilde{r}_1z+o(z)),$$

где

$$r_0=\frac{A_0B_0}{A_0^xB_0^x},\quad r_1=-\left(I_1-\frac{A_0B_0}{A_0^xB_0^x}I_1^x\right)-A_0B_0(I_2-I_2^x),$$

$$\widetilde{r}_0=\frac{A_0^{xy}B_0^{xy}}{A_0^yB_0^y},\quad \widetilde{r}_1=-\left(I_1^{xy}-\frac{A_0^{xy}B_0^{xy}}{A_0^yB_0^y}I_1^y\right)-A_0^{xy}B_0^{xy}(I_2^{xy}-I_2^y).$$

Из формул (6.1) получаем

$$I_1-I_1^y=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_1(w,1)}{w}\exp\int_0^w\frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\,d\xi\,dw=\widehat{I}_1, \tag{6.4}$$

$$I_2-I_2^x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w}\exp\int_0^w\frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\,d\xi\,dw=\widehat{I}_2, \tag{6.5}$$

$$I_1^x-I_1^{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_1(w,-1)}{w}\exp\int_0^w\frac{\Psi_0(\xi,-1)}{\xi}\,d\xi\,dw=\widehat{I}_1^x, \tag{6.6}$$

$$I_2^y-I_2^{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{\Phi}_1(-1,w)}{w}\exp\int_0^w\frac{\widetilde{\Phi}_0(-1,\xi)}{\xi}\,d\xi\,dw=\widehat{I}_2^y. \tag{6.7}$$

Далее рассмотрим 2 случая.

1) m и $\widetilde{m}$ нечётны.

В силу нечётности m из (6.1), (6.2) следует, что

$$I_1^x=-I_1,\quad I_1^{xy}=-I_1^y. \tag{6.8}$$

Из предложения 7 получаем, что $A_0B_0=A_0^xB_0^x$, $A_0^{xy}B_0^{xy}=A_0^yB_0^y$, поэтому

$$r_0=\widetilde{r}_0=1,\quad r_1=-2I_1-A_0B_0\widehat{I}_2,\quad \widetilde{r}_1=2I_1^y+A_0^yB_0^y\widehat{I}_2^y.$$

Преобразование монодромии $\Delta_0(z)=\Delta_y^{-1}\circ\Delta_{xy}\circ\Delta_x^{-1}\circ\Delta(z)$ имеет асимптотику

$$\Delta_0(z)=z(1+F_2z+o(z)),$$

где
$$F_2 = r_1 + \widetilde{r}_1 = -2(I_1 - I_1^y) - A_0 B_0 \widehat{I}_2 + A_0^y B_0^y \widehat{I}_2^y = -2\widehat{I}_1 - A_0 B_0 \widehat{I}_2 + A_0^y B_0^y \widehat{I}_2^y.$$
Поэтому уравнение $F_2 = 0$ эквивалентно уравнению
$$2\widehat{I}_1 = A_0^y B_0^y \widehat{I}_2^y - A_0 B_0 \widehat{I}_2 \qquad \text{или} \qquad 2B_0^{-1}\widehat{I}_1 = \frac{B_0^y}{B_0} A_0^y \widehat{I}_2^y - A_0 \widehat{I}_2.$$

Из предложения 5 и формул (6.1), (6.4), (6.5), (2.2) получаем
$$B_0^{-1}\widehat{I}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1(w,1)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right., \quad A_0 \widehat{I}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right.,$$
$$A_0^y \widehat{I}_2^y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_1(-1,w)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\widetilde{\Phi}_0(-1,\xi)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right., \quad \frac{B_0^y}{B_0} = \exp\left(v.p. \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\Psi_0(w,1)}{w}\, dw \right).$$
Тем самым уравнение $F_2 = 0$ эквивалентно уравнению
$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1(w,1)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right. = \exp\left(v.p. \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\, d\xi \right) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_1(-1,w)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\widetilde{\Phi}_0(-1,\xi)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right..$$

2) m нечётно, $\widetilde{m}$ чётно.

Из предложения 7 $B_0 = B_0^x$, $B_0^{xy} = B_0^y$, $A_0 = A_0^y$, $A_0^{xy} = A_0^x$, поэтому с учётом (6.8)
$$r_0 = \frac{A_0}{A_0^x}, \quad \widetilde{r}_0 = \frac{A_0^x}{A_0^y}, \quad r_1 = -\left(1 + \frac{A_0}{A_0^x}\right) I_1 - A_0 B_0 \widehat{I}_2, \quad \widetilde{r}_1 = \left(1 + \frac{A_0^x}{A_0}\right) I_1^y - A_0^x B_0^y \widehat{I}_2^y.$$

Преобразование монодромии $\Delta_0(z)$ имеет асимптотику
$$\Delta_0(z) = z(1 + F_2 z + o(z)),$$
где $F_2 = r_1 + \widetilde{r}_1 r_0 = -\left(1 + \dfrac{A_0}{A_0^x}\right) I_1 - A_0 B_0 \widehat{I}_2 + \left(1 + \dfrac{A_0}{A_0^x}\right) I_1^y + A_0 B_0^y \widehat{I}_2^y =$
$$= -\left(1 + \frac{A_0}{A_0^x}\right) \widehat{I}_1 - A_0 B_0 \widehat{I}_2 + A_0 B_0^y \widehat{I}_2^y.$$
В силу чётности $\widetilde{m}$ из (6.3) следует, что $\widehat{I}_2^y = -\widehat{I}_2$. Отсюда
$$F_2 = -\left(1 + \frac{A_0}{A_0^x}\right) \widehat{I}_1 - A_0 (B_0 + B_0^y) \widehat{I}_2.$$

Таким образом, уравнение $F_2 = 0$ эквивалентно уравнению
$$\left(1 + \frac{A_0}{A_0^x}\right) \widehat{I}_1 + (B_0 + B_0^y) A_0 \widehat{I}_2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \left(1 + \frac{A_0}{A_0^x}\right) B_0^{-1} \widehat{I}_1 + A_0 \left(1 + \frac{B_0^y}{B_0}\right) \widehat{I}_2 = 0.$$
Из предложения 5 и формулы (6.4) с учётом $\lambda = 1$ получаем, что
$$B_0^{-1}\widehat{I}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1(w,1)}{w} \exp \left| \overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\, d\xi} \, dw \right..$$

Из предложения 5 и формулы (6.5) получаем, что

$$A_0\widehat{I}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w} \exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\, d\xi}\, dw\right. .$$

С учетом того, что $\dfrac{A_0}{A_0^x} = \exp\left(v.p. \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,w)}{w}\, dw\right)$, получаем, что уравнение $F_2 = 0$ эквивалентно уравнению

$$\left(1 + \exp\left(v.p. \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,w)}{w}\, dw\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_1(w,1)}{w} \exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\Psi_0(\xi,1)}{\xi}\, d\xi}\, dw\right. +$$

$$+ \left(1 + \exp\left(v.p. \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\Psi_0(w,1)}{w}\, dw\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{\Phi}_1(1,w)}{w} \exp\left|\overline{\int_{+\infty}^{w} \frac{\widetilde{\Phi}_0(1,\xi)}{\xi}\, d\xi}\, dw\right. = 0.$$

§ 7. Преобразование монодромии в случае $\mathbf{d = 1}$

В случае $d = 1$ отображения соответствия в первом квадранте имеют согласно формулам (4.3), (4.2), (3.4) асимптотики

$$\Delta(z) = E_0 z(1 + E_1 z \ln z + O(z)), \quad \Delta^{-1}(z) = \widetilde{E}_0 z(1 + \widetilde{E}_1 z \ln z + O(z)), \tag{7.1}$$

где $E_0 = a_0 b_0 \varepsilon^{n-\widetilde{n}} \delta^{n-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}}(1+o^{\varepsilon}(1))(1+o^{\delta}(1))$, $E_1 = c^* \delta^{n-\frac{\widetilde{m}}{\alpha}} b_0(1+o^{\delta}(1))$, $\widetilde{E}_0 = E_0^{-1}$, $\widetilde{E}_1 = -E_1 E_0^{-1}$, c^* определено в формулировке леммы 2.

Переходя к пределу при $\varepsilon, \delta \to 0$, учитывая, что E_0, E_1 не зависят от ε и δ, получаем

$$E_0 = A_0 B_0, \quad E_1 = c^* B_0, \quad \widetilde{E}_0 = \frac{1}{A_0 B_0}, \quad \widetilde{E}_1 = -\frac{c^*}{A_0}. \tag{7.2}$$

Величины, аналогичные c^*, для отражённых векторных полей обозначим c_x^*, c_y^* и c_{xy}^*.

Лемма 6. $c_x^* = -c^*$, $c_y^* = -c^*$, $c_{xy}^* = c^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a, b) — векторный коэффициент точки носителя векторного поля V, имеющей координаты (i, j). Рассмотрим мономиальную систему $y\dot{x} = ax^i y^i$, $x\dot{y} = bx^j y^j$. Замена переменных $x \to -x$ превращает ее в систему $y\dot{x} = (-1)^{i-1} a x^i y^j$, $x\dot{y} = (-1)^{i-1} b x^i y^j$. Следовательно, векторный коэффициент (a, b) умножается на $(-1)^{i-1}$. Аналогично при замене $y \to -y$ векторный коэффициент умножается на $(-1)^j$, а при замене $x \to -x$, $y \to -y$ — на $(-1)^{i+j}$.

Пусть вершина C имеет координаты (i_0, j_0). Тогда точка B имеет координаты $(i_0 - m, j_0 + n)$, точка D — координаты $(i_0 + \widetilde{m}, j_0 - \widetilde{n})$, точка A — координаты $(i_0 - m + \widetilde{m}, j_0 + n - \widetilde{n})$. Поэтому при замене $x \to -x$ все произведения $d_i b_j$ умножаются на $(-1)^{2i_0 - m + \widetilde{m} - 2} = (-1)^{\widetilde{m} - m}$; произведения $c_i a_j$ умножаются на $(-1)^{2i_0 + \widetilde{m} - m - 2} = (-1)^{\widetilde{m} - m}$; λ_1^2 не изменяется. Поскольку $c^* = \frac{1}{\lambda_1^2} f(d_i b_j, c_i a_j)$, где f — линейная функция от $d_i b_j, c_i a_j$, $i, j = 1, 2$, то при замене $x \to -x$ величина c^* умножается на $(-1)^{m - \widetilde{m}}$. Аналогично при замене $y \to -y$ величина c^* умножается на $(-1)^{n - \widetilde{n}}$; при замене $x \to -x$, $y \to -y$ величина c^* умножается на $(-1)^{\widetilde{m} - m + n - \widetilde{n}}$. Поскольку $d = \widetilde{m}n - m\widetilde{n} = 1$, и ребра чётные, то: 1) либо $\widetilde{m}n$ чётно, $m\widetilde{n}$ нечётно, а значит, $m, \widetilde{n}$ нечётны, $\widetilde{m}, n$ чётны, следовательно, $\widetilde{m} - m$, $n - \widetilde{n}$ нечётны; 2) либо $\widetilde{m}n$ нечётно, $m\widetilde{n}$ чётно, а значит, $\widetilde{m}, n$ нечётны, $m, \widetilde{n}$ чётны, следовательно, $\widetilde{m} - m$, $n - \widetilde{n}$ нечётны. В обоих случаях получаем утверждение леммы 6.

Из формул (7.1) получаем

$$\Delta_x^{-1} \circ \Delta(z) = \frac{E_0}{E_0^x} z \left(1 + \left(E_1 - E_1^x \frac{E_0}{E_0^x}\right) z \ln z + O(z)\right),$$

$$\Delta_y^{-1}\circ\Delta_{xy}(z)=\frac{E_0^{xy}}{E_0^y}z\left(1+\left(E_1^{xy}-E_1^y\frac{E_0^{xy}}{E_0^y}\right)z\ln z+O(z)\right).$$

Отсюда

$$\Delta_0(z)=\Delta_y^{-1}\circ\Delta_{xy}\circ\Delta_x^{-1}\circ\Delta(z)=F_1z(1+F_2z\ln z+O(z)),$$

где

$$F_1=\frac{E_0E_0^{xy}}{E_0^xE_0^y}=\frac{A_0A_0^{xy}B_0B_0^{xy}}{A_0^xA_0^yB_0^xB_0^y},\quad F_2=E_1-E_1^x\frac{E_0}{E_0^x}+E_1^{xy}\frac{E_0}{E_0^x}-E_1^yF_1.$$

Из предложения 7 следует, что в обоих случаях, когда $\widetilde{m},m$ нечётны, и когда $\widetilde{m}$ нечётно, m чётно, выполняется равенство $F_1=1$. Отсюда, из (7.2) и из леммы 6 следует

$$F_2=c^*B_0-c_x^*B_0^x\frac{A_0B_0}{A_0^xB_0^x}+c_{xy}^*B_0^{xy}\frac{A_0B_0}{A_0^xB_0^x}-c_y^*B_0^y=c^*\Big(B_0+B_0\frac{A_0}{A_0^x}+B_0^{xy}\frac{A_0B_0}{A_0^xB_0^x}+B_0^y\Big).$$

Поскольку выражение, стоящее в круглых скобках, положительно, уравнение $F_2=0$ эквивалентно уравнению $c^*=0$.

В случае $d=1$ рассмотрим целочисленные точки A, B, C, D на плоскости показателей. Они находятся в вершинах параллелограмма. Векторные коэффициенты образов точек A,B,C,D при отображении C_c^T получаются из векторных коэффициентов самих этих точек с помощью преобразования $dC_c^{-1}=\begin{pmatrix}\widetilde{m}&-\widetilde{n}\\-m&n\end{pmatrix}$. Поэтому векторный коэффициент точки $(1,1)$ носителя поля V_c (системы (3.1)) равен $(\widetilde{m}c_1-\widetilde{n}c_2,nc_2-mc_1)=(\lambda_1,-\lambda_2)$. Аналогично $(\widetilde{m}b_1-\widetilde{n}b_2,nb_2-mb_1)=(\alpha_{01},\beta_{01})$, $(\widetilde{m}d_1-\widetilde{n}d_2,nd_2-md_1)=(\alpha_{10},\beta_{10})$, $(\widetilde{m}a_1-\widetilde{n}a_2,na_2-ma_1)=(\alpha_{11},\beta_{11})$.

Подставляя эти выражения в выражение для c^* из (3.5), получаем

$$\begin{aligned}c^*=\frac{1}{\lambda_1^2}&(2(\widetilde{m}d_1-\widetilde{n}d_2)(\widetilde{m}b_1-\widetilde{n}b_2)-(\widetilde{m}d_1-\widetilde{n}d_2)(nb_2-mb_1)+\\&+(\widetilde{m}c_1-\widetilde{n}c_2)(na_2-ma_1)-(\widetilde{m}c_1-\widetilde{n}c_2)(\widetilde{m}a_1-\widetilde{n}a_2)-(nb_2-mb_1)(nd_2-md_1))=\\&=d_1b_1(2\widetilde{m}^2+\widetilde{m}m-m^2)+d_1b_2(-2\widetilde{m}\widetilde{n}-\widetilde{m}n+nm)+d_2b_1(-2\widetilde{n}\widetilde{m}-\widetilde{n}m+mn)+\\&+d_2b_2(2\widetilde{n}^2+\widetilde{n}n-n^2)-c_1a_1(\widetilde{m}m+\widetilde{m}^2)+c_1a_2(\widetilde{m}n+\widetilde{m}\widetilde{n})+c_2a_1(\widetilde{n}m+\widetilde{n}\widetilde{m})-c_2a_2(\widetilde{n}n+\widetilde{n}^2).\end{aligned}$$

Теорема 2 в случае $d=1$ доказана. □

Докажем здесь предложение 1. Пусть $d=\widetilde{m}n-m\widetilde{n}=1$. Координаты вектора $CA'=(i,j)$, где A' — любая целочисленная точка, лежащая на прямой ℓ_1, удовлетворяют уравнению $ni+mj=1$. Так как $d=1$, то существует решение этого уравнения, равное $(\widetilde{m},-\widetilde{n})$. Тогда остальные решения имеют вид $CA'=(\widetilde{m}-mk,-\widetilde{n}+nk)=(i,j)$, $k\in\mathbb{Z}$. Отсюда $\widetilde{n}i+\widetilde{m}j=\widetilde{n}(\widetilde{m}-mk)+\widetilde{m}(-\widetilde{n}+nk)=dk=k$. При $k=1$ точка A' лежит на прямой $\widetilde{\ell}_1$, то есть совпадает с точкой A пересечения ℓ_1 и $\widetilde{\ell}_1$, следовательно, точка A имеет целые координаты. Предложение 1 доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения–1 // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1985. — С. 7–149.
2. Медведева Н. Б. Главный член преобразования монодромии монодромной особой точки линеен // Сибирский математический журнал. — 1992. — Т. 33, № 2. — С. 116–124.
3. Березовская Ф. С., Медведева Н. Б. Асимптотика преобразования монодромии особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона // Труды семинара имени И. Г. Петровского. — 1991. — Вып. 15. — С. 156–177.
4. Medvedeva N., Batcheva E. The second term of the asymptotics of monodromy map in case of two even edges of the Newton diagram // EJQTDE. Conference Proceedings of the 6-th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations. Szeged, 2000. — № 19. — P. 1–15. www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

5. Воронин А. С., Медведева Н. Б. Асимптотика преобразования монодромии в случае двух четных ребер диаграммы Ньютона // Вестник ЧелГУ. Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. Челябинск, 2006. — Вып. 1. — С. 36–48.
6. Медведева Н. Б. Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса // Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. — 1996. — Т. 254. — С. 11–100.
7. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
8. Дюлак А. О предельных циклах. — М.: Наука, 1980. — 157 с.

Поступила в редакцию 01.08.09

A. S. Voronin, N. B. Medvedeva

Stability of monodromic singular points of planar dynamical systems with a fixed Newton diagram

The second term of asymptotics of the monodromy map of the monodromic singular point is calculated for some class of vector fields in the plane with the Newton diagram having two even edges. In this case the principal term of the monodromy map is identical. The result obtained gives the sufficient condition for a singular point to be a focus.

Keywords: monodromic singular point, monodromy map, Newton diagram, resolution of singularities.

Mathematical Subject Classifications: 34C05, 34C20

Воронин Алексей Сергеевич, ассистент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, 454021, Россия, г. Челябинск, ул. Бр. Кашириных, 129, E-mail: neizwest@mail.ru

Медведева Наталия Борисовна, д. ф.-м. н., профессор кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, 454021, Россия, г. Челябинск, ул. Бр. Кашириных, 129, E-mail: medv@csu.ru, natali1898@mail.ru