УДК 519.8(045)

© *А. С. Банников*

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается дифференциальная игра группы преследователей и одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников. Получены необходимые и достаточные условия поимки в случае, когда убегающий стеснен фазовыми ограничениями.

*Ключевые слова*: дифференциальная игра, фазовые ограничения, кусочно-программные стратегии и контрстратегии.

## Введение

Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего с фазовыми ограничениями на состояние убегающего и одинаковыми динамическими возможностями всех участников. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ рассматривался многими авторами. В работах [1, 2] получено решение такой задачи без фазовых ограничений, причем в работе [1] рассмотрен случай, когда множество допустимых управлений игроков — шар, терминальные множества — начало координат, в работе [2] — множество допустимых управлений и терминальные множества — выпуклые компакты. В работе [3] получено решение задачи с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — начало координат, а фазовые ограничения — выпуклый компакт. В работе [4] получено решение задачи с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — компакты, а фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. В работе [5] расматривался случай, когда множество допустимых управлений игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество.

В данной работе рассмотрен нестационарный случай, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество.

## § 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ( $k \geqslant 2$ ) рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: $n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего $E$.

Закон движения каждого из преследователей $P_i$ имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad x_i(t_0) = x^0, \quad u_i \in Q. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего $E$ имеет вид

$$\dot{y}(t) = a(t)v(t), \quad y(t_0) = 0, \quad v \in Q, \tag{1.2}$$

причем $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$ ( $i = 1, \ldots, n$ ), где $M_1, \ldots, M_n$ — заданные выпуклые компакты; $a(t)$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси $t$; $Q$ — выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей, $0 \in Q$.

Будем полагать, что убегающий $E$ в процессе игры не покидает пределы множества $D$, $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Пусть $T > t_0$ — произвольное число и $\sigma$ — некоторое конечное разбиение $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$ отрезка $[t_0, T]$.

**Определение 1.** *Кусочно-программной стратегией* $V$ убегающего $E$, заданной на $[t_0, T]$, соответствующей разбиению $\sigma$, называется семейство отображений $b^l$, $l = 0, 1, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l, x_1(\tau_l), \ldots, x_n(\tau_l), y(\tau_l)) \tag{1.3}$$

измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$, и такую, что $v_l(t) \in Q$, $y(t) \in D$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

**Определение 2.** *Кусочно-программной контрстратегией* $U_i$ преследователя $P_i$, соответствующей разбиению $\sigma$, называется семейство отображений $c^l$, $l = 0, 1, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам (1.3) и управлению $v_l(t)$ измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in Q$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$. Обозначим данную игру $\Gamma = \Gamma(n, z^0, D)$.

**Определение 3.** В игре $\Gamma$ возможно *уклонение от встречи,* если для любого $T > t_0$ существует разбиение $\sigma$ интервала $[t_0, T]$, стратегия $V$ убегающего $E$, соответствующая разбиению $\sigma$, такие, что для любых траекторий игроков $P_i$ имеет место

$$x_i(t) - y(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $y(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего $E$.

**Определение 4.** В игре $\Gamma$ происходит *поимка,* если существует $T > t_0$ и для любого разбиения $\sigma$ интервала $[t_0, T]$, любой траектории $y(t)$ игрока $E$ существуют кусочно-программные контрстратегии $U_i$ игроков $P_i$, соответствующие разбиению $\sigma$, существует момент $\tau \in [t_0, T]$ и номер $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что

$$x_m(\tau) - y(\tau) \in M_m,$$

где $x_m(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя $P_m$.

Вместо систем (1.1) и (1.2) будем рассматривать систему

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.4}$$

Введем функции $\lambda_i$ следующим образом:

$$\lambda_i(v, m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q\},$$
$$\lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как $Q$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то функции $\lambda_i$ непрерывны на $Q$ (см. [6]) и существует

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v).$$

**Предположение 1.** Существует константа $C_1 > 0$ такая, что $C_1 \leqslant a(t)$, $t \geqslant t_0$.

## § 2. Групповое преследование одного убегающего без фазовых ограничений

Рассмотрим случай, когда $D = \mathbb{R}^k$, то есть на траекторию убегающего не наложено никаких ограничений.

**Теорема 1.** *Пусть выполнено предположение* 1, *тогда*

1) *если* $\delta(z^0) > 0$, *то в игре* $\Gamma$ *происходит поимка;*
2) *если* $\delta(z^0) = 0$, *то в игре* $\Gamma$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [6] следует, что функции $\lambda_i(v, m_i)$ непрерывны по совокупности переменных, а отображения $\mathcal{M}_i(v) = \{m_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\}$ однозначны и непрерывны.

Зададим контрстратегии $U_i$ преследователей $P_i$ следующим образом:

$$u_l^i(t) = v_l(t) - \lambda_i(v_l(t))\left(z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))\right), \quad t \in [\tau_l, \tau_{l+1}),$$

где $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{s+1} = T(z^0) = \frac{n}{C_1\delta(z^0)}\}$, $V$ — произвольная стратегия убегающего $E$, соответствующая разбиению $\sigma$. Тогда для решения (1.4) справедливо представление

$$z_i(t) = z_i^0 - \int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(s))\left(z_i^0 - \mathcal{M}_i(v(s))\right) ds =$$
$$= z_i^0\Big(1 - \int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(s))\, ds\Big) + \int_{t_0}^{t} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s))\, ds.$$

Из определения величины $\delta(z^0)$ получаем

$$\min_{i=1,\ldots,n}\Big(1 - \int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(s))\, ds\Big) = 1 - \max_{i=1,\ldots,n}\int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(s))\, ds \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t} a(s)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v(s))\, ds \leqslant 1 - \frac{C_1}{n}\delta(z^0)(t - t_0).$$

Поэтому не позже момента $T(z^0) = t_0 + \frac{n}{C_1\delta(z^0)}$ хотя бы одна из величин $1 - \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(s))\, ds$ обратится в нуль. Тогда

$$z_i(T(z^0)) = \int_{t_0}^{T(z^0)} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s))\, ds \in M_i,$$

так как скалярное произведение $(z_i(T(z^0)), p)$ не превосходит опорной функции $C(M_i, p)$ при любом $p \in \mathbb{R}^k$ :

$$(z_i(T(z^0)), p) = \int_{t_0}^{T(z^0)} a(s)\lambda_i(v(s))(\mathcal{M}_i(v(s)), p)\, ds \leqslant C(M_i, p).$$

Таким образом, хотя бы один из преследователей ловит к моменту $T(z^0)$ убегающего.

Пусть теперь для позиции $z_0$ выполнено второе условие теоремы. Это означает, что существует вектор $v_0 \in Q$, такой, что $\lambda_i(v_0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Зададим стратегию убегающего следующим образом: $\sigma = \{t_0, +\infty\}$, $v(t) = v_0$.

Предположим, что в игре $\Gamma$ происходит поимка. Тогда существует $T > t_0$, контрстратегии преследователей $U_1, \ldots, U_n$, такие, что $z_i(T) \in M_i$ при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда

$$z_i(t) = z_i^0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\Big(u_i(s) - v_0\Big)\, ds =$$
$$= z_i^0 - v_0\int_{t_0}^{T} a(s)\, ds + \int_{t_0}^{T} a(s)u_i(s)\, ds.$$

Пусть $\widehat{u}_i(T) = \dfrac{\displaystyle\int_{t_0}^{T} a(s)u_i(s)\,ds}{\displaystyle\int_{t_0}^{T} a(s)\,ds}$. Тогда $\widehat{u}_i(T) \in Q$ и

$$z_i(T) = z_i^0 + \Bigl(\widehat{u}_i(T) - v_0\Bigr)\int_{t_0}^{T} a(s)\,ds \in M_i,$$

или

$$\widehat{u}_i(T) - v_0 \in \frac{1}{\int_{t^0}^{T} a(s)\,ds}(z_i^0 - M).$$

Так как $\widehat{u}_i(T) - v_0 \neq 0$ (иначе $z_i(T) = z_i^0 \in M_i$, что противоречит условию $z_i^0 \notin M_i$ ), то получаем, что $\lambda_i(v_0) \geqslant \dfrac{1}{\displaystyle\int_{t^0}^{T} a(s)\,ds} > 0$ вопреки тому, что $\delta(z^0) = 0$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma$ происходит уклонение от встречи. □

## § 3. Групповое преследование одного убегающего с фазовыми ограничениями

Будем теперь предполагать, что убегающий $E$ в процессе игры не покидает пределы множества

$$D = \{z \in \mathbb{R}^k | (p_j, z) \leqslant \mu_j, \quad j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа, такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Введем функции $\lambda_{n+j}$ следующим образом:

$$\lambda_{n+j}(v) = (p_j, v), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Пусть

$$\delta_1(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1,\ldots,n+r} \lambda_s(v).$$

**Предположение 2.** Существует константа $C_2 > 0$, такая, что $a(t) \leqslant C_2$, $t \geqslant t_0$.

**Предположение 3.** $Q = \{z \in \mathbb{R}^k | \ \|z\| \leqslant R\}$ — шар радиуса $R > 0$ с центром в нуле.

**Лемма 1.** *Пусть выполнено предположение* 3. *Тогда* $\delta_1(z^0) = 0$ *в том и только том случае, когда*

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_1(z^0) = 0$. Это означает, что существует вектор $v_0 \in \partial Q$, такой, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(v_0) &= 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \lambda_{n+j}(v_0) &\leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Этому вектору $v_0$ соответствует единичный опорный вектор $p_0 = \frac{v_0}{R}$ , поэтому

$$(p_j, p_0) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{3.2}$$

Из (3.1) следует, что при всех $\lambda > 0$

$$\lambda(M_i - z_i^0) \cap Q - v_0 = \varnothing, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Докажем, что гиперплоскость $H = \{z | (z, p_0) = 0\}$ разделяет множества $Q - v_0$ и $M_i - z_i^0$. Действительно, для любого $m_i \in M_i$ отрезок $[0, m_i - z_i^0]$ и $Q - v_0$ имеют только одну общую точку 0, поэтому они отделимы. И если нормальный вектор разделяющей их гиперплоскости

$p_0' \neq p_0$ , то получаем, что граничной точке $0 \in Q - v_0$ соответствуют два различных опорных вектора, чего быть не может в силу гладкости границы шара $Q - v_0$ . Значит,

$$\begin{aligned} &(v - v_0, p_0) \leqslant C(Q - v_0, p_0) = 0, \quad v \in Q, \\ &(m_i - z_i^0, p_0) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad m_i \in M_i. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Сравнивая (3.2) и (3.3), получаем, что $z_i^0 - M_i \subset H^-$ ( $i = 1, \ldots, n$ ), $p_j \in H^-$ ( $j = 1, \ldots, r$ ), поэтому $\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\} \subset H^-$ , где $H^- = \{z | (z, p_0) \leqslant 0\}$ — отрицательное полупространство, определяемое вектором $p_0$. Следовательно,

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Пусть теперь $0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}$. Докажем, что $\delta_1(z^0) > 0$. В силу отделимости 0 и $\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}$ существует единичный вектор $p_0$, такой, что

$$\begin{aligned} &(p_0, p_j) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r \\ &(p_0, z_i^0 - m_i) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad m_i \in M_i. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Опорное множество в направлении $p_0$ шара $Q$ состоит из единственного вектора $v_0 = Rp_0$ , при этом

$$(p_j, v_0) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{3.5}$$

$$(v - v_0, p_0) \leqslant C(Q - v_0, p_0) = 0, \quad v \in Q. \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.6) следует, что $M_i - z_i^0$ и $Q - v_0$ лежат в разных полупространствах относительно гиперплоскости $H = \{z | (z, p_0) = 0\}$. Поэтому $\lambda_i(v_0) = 0$, с учетом (3.5) получаем $\lambda_{n+j}(v_0) \leqslant 0$ , и $\delta_1(z^0) = 0$.

Учитывая, что по определению $\delta_1(z^0) \geqslant 0$, получаем, что

$$\delta_1(z^0) > 0 \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}. \tag{3.7}$$

Приведем теперь ряд примеров, показывающих, что без предположения 3, вообще говоря, только строгой выпуклости и гладкой границы множества $Q \ni 0$ недостаточно для эквивалентности (3.7).

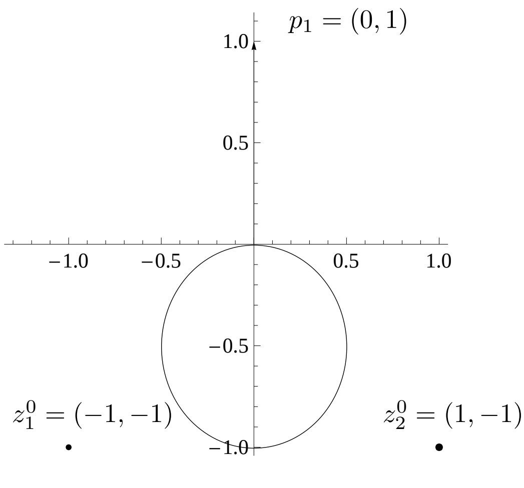


**Рис. 1.** К примеру 1

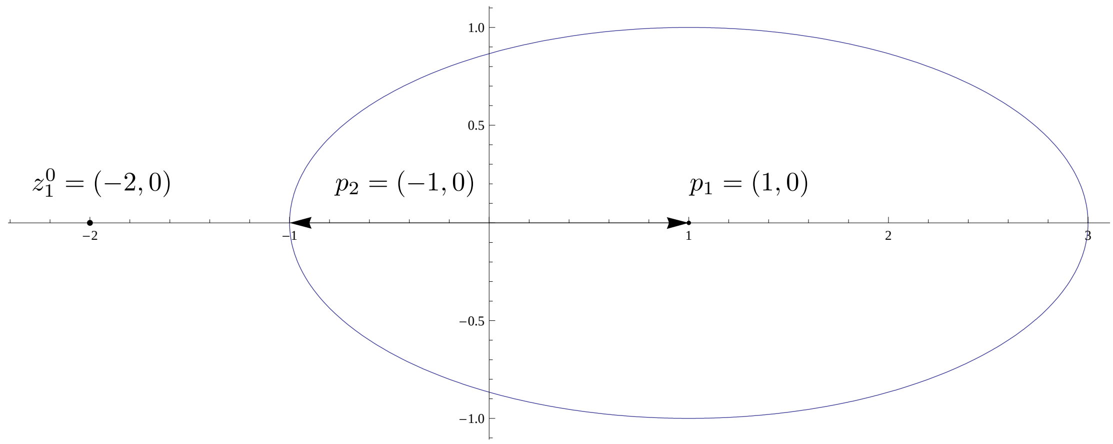


**Рис. 2.** К примеру 2

**Пример 1.** Пусть $k = 2$, $Q$ — шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(0, -\frac{1}{2})$, $n = 2$, $r = 1$, $z_1^0 = (-1, -1)$, $z_2^0 = (1, -1)$, $p_1 = (0, 1)$, $M_1 = M_2 = \{0\}$.

В этом случае $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, z_2^0 - M_2, p_1\}$, но $\delta_1(z^0) = 0$. Действительно, при $v_0 = 0$ $\lambda_3(v_0) = (p_1, v_0) = 0$, $\lambda_i(v_0) = \max\{\lambda \geqslant 0 | -\lambda z_i^0 \in Q - v_0\} = 0$, $i = 1, 2$.

**Пример 2.** Пусть $k = 2$, $Q = \left\{(x, y) | \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 \leqslant 1\right\}$, $n = 1$, $r = 2$, $p_1 = (1, 0)$, $p_2 = (-1, 0)$, $z_1^0 = (-2, 0)$, $M_1 = \{0\}$.

В этом случае $0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, p_1, p_2\}$, но $\delta_1(z^0) = \frac{1}{2} > 0$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены предположения* 1, 2, 3, *число элементов* $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(z_i^0 - M_i)$ *не меньше* $k$. *Тогда для того, чтобы в игре* $\Gamma$ *происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\delta_1(z^0) > 0$.

Доказательство. Пусть $\delta_1(z^0) > 0$. Докажем, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит поимка.

**1.** Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Пусть $V$ — произвольная стратегия убегающего $E$, соответствующая некоторому разбиению $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{s+1} = T\}$ некоторого интервала $[t_0, T]$.

Зададим контрстратегии $U_i$ преследователей $P_i$ следующим образом:

$$u_l^i(t) = v_l(t) - \lambda_i(v_l(t))\Big(z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))\Big), \quad t \in [\tau_l, \tau_{l+1}),$$

где $\mathcal{M}_i(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\}$ однозначное и непрерывное отображение [6]. Так как стратегия $V$ допустима, то $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T]$. Это означает, что

$$(p_1, y(t)) = (p_1, y^0 + \int_{t_0}^{t} a(s)v(s)\,ds) = (p_1, y_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)(p_1, v(s))\,ds \leqslant \mu_1.$$

Пусть $T_1(t)$ и $T_2(t)$ — два подмножества интервала $[t_0, T]$ такие, что

$$T_1(t) = \{\tau | \tau \in [t_0, t], \quad (p_1, v(\tau)) < \delta_1(z^0)\},$$
$$T_2(t) = \{\tau | \tau \in [t_0, t], \quad (p_1, v(\tau)) \geqslant \delta_1(z^0)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_0 =&\mu_1 - (p_1, y^0) \geqslant \int_{t_0}^{t} a(s)(p_1, v(s))\,ds = \\ =&\int_{T_1(t)} a(s)(p_1, v(s))\,ds + \int_{T_2(t)} a(s)(p_1, v(s))\,ds \geqslant \\ \geqslant& - C_2 R\mu(T_1(t)) + \delta_1(z^0)C_1\mu(T_2(t)).\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mu(T_1(t)) + \mu(T_2(t)) = t - t_0$ (здесь $\mu$ — мера Лебега), получаем оценку для $\mu(T_1(t))$ :

$$\mu(T_1(t)) \geqslant \frac{\delta_1^0 C_1(t-t_0) - \mu_0}{C_2R + C_1\delta_1^0} \qquad (\delta_1^0 = \delta_1(z^0)).$$

Из определения контрстратегий $U_1$ и системы (1.4) получаем

$$z_i(t) = z_i^0\Big(1 - \int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(t))\,ds\Big) + \int_{t_0}^{t} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\,ds.$$

Рассмотрим функции $f_i(t) = 1 - \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\lambda_i(v(s))\,ds$, $i = 1, \ldots, n$. Это непрерывные невозрастающие функции, $f_i(t_0) = 1$ и

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f_i(t) =&n - \int_{t_0}^{t} a(s)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v(s))\,ds \leqslant n - C_1\int_{T_1(t)}\max_{i=1,\ldots,n}\lambda_i(v(s))\,ds \leqslant \\ \leqslant& n - C_1\delta_1^0\mu(T_1(t)) \leqslant n - C1\delta_1^0\frac{\delta_1^0 C_1(t-t_0) - \mu_0}{C_2R + C_1\delta_1^0}.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что существует момент времени $T_0$

$$T_0 \leqslant \frac{n(C_2R + C_1\delta_1^0) + \mu_0 C_1\delta_1^0}{C_1^2\delta_1^{0\,2}} + t_0,$$

такой, что одна из функций $f_i$ обратится в 0 в момент $T_0$. Поэтому при $t = T_0$ будем иметь $1 - \displaystyle\int_{t_0}^{T_0} a(s)\lambda_i(v(s))\,ds = 0$ и

$$z_i(T_0) = \int_{t_0}^{T} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s))\,ds \in M_i.$$

Это и означает, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит поимка.

**2.** Пусть теперь $r > 1$. В силу условий теоремы, по лемме 1, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n, p_1, \ldots, p_r\}$. Это означает, что существуют $b_1, \ldots, b_m \in \bigcap\limits_{i=1}^{n}(z_i^0 - M_i)$, такие, что векторы $b_1, \ldots, b_m, p_1, \ldots, p_r$ образуют положительный базис [7]. Можно считать, что $m \geqslant k$ и векторы $b_1, \ldots, b_k$ образуют базис $\mathbb{R}^k$. Так как $b_1, \ldots, b_m, p_1, \ldots, p_r$ — положительный базис, то существуют положительные числа

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m,$$

такие, что

$$0 = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m.$$

Рассмотрим вектор $p_0 = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r$. Тогда векторы $b_1, \ldots, b_m, p_0$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим множество

$$D_1 = \{z | (z, p_0) \leqslant \mu_0\},$$

где $\mu_0 = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_i$. Тогда $D \subset D_1$. Если $p_0 \neq 0$, то в силу пункта 1 данной теоремы в игре $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$ происходит поимка. Если же $p_0 = 0$, то $D_1 = \mathbb{R}^k$ и в силу теоремы 1 в игре $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$ происходит поимка. Поэтому поимка произойдет и в игре $\Gamma(n, z^0, D)$.

Предположим, что $\delta_1^0 \leqslant 0$. Это означает, что существует вектор $v_0 \in Q$ такой, что

$$\lambda_i(v_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$(p_j, v_0) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Зададим стратегию $V$ убегающего $E$ следующим образом:

$$\sigma = \{t_0, +\infty\}, \quad v(t) = v_0, \quad t \geqslant t_0.$$

Стратегия $V$ допустима, так как

$$(p_j, y(t)) = (p_j, y^0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds (p_j, v_0) \leqslant \mu_j, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Предположим, что в игре $\Gamma$ происходит поимка. Тогда существует $T > t_0$, контрстратегии преследователей $U_1, \ldots, U_n$, такие, что $z_i(T) \in M_i$ при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда

$$z_i(t) = z_i^0 + \int_{t_0}^{t} a(s)(u_i(s) - v_0)\, ds =$$
$$= z_i^0 - v_0 \int_{t_0}^{T} a(s)\, ds + \int_{t_0}^{T} a(s) u_i(s)\, ds.$$

Пусть $\widehat{u}_i(T) = \dfrac{\int_{t_0}^{T} a(s) u_i(s)\, ds}{\int_{t_0}^{T} a(s)\, ds}$. Тогда $\widehat{u}_i(T) \in Q$ и

$$z_i(T) = z_i^0 + (\widehat{u}_i(T) - v_0) \int_{t_0}^{T} a(s)\, ds \in M_i,$$

или

$$\widehat{u}_i(T) - v_0 \in \frac{1}{\int_{t^0}^{T} a(s)\, ds} (z_i^0 - M).$$

Так как $\widehat{u}_i(T) - v_0 \neq 0$ (иначе $z_i(T) = z_i^0 \in M_i$, что противоречит условию $z_i^0 \notin M_i$ ), то получаем, что $\lambda_i(v_0) \geqslant \dfrac{1}{\int_{t^0}^{T} a(s)\, ds} > 0$ вопреки тому, что $\delta_1(z^0) = 0$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит уклонение от встречи. $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Григоренко Н. Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн. — 1983. — № 1. — С. 41–47.
3. Иванов Р. П. Простое преследование на компакте // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1318–1321.
4. Петров Н. Н. Теория игр: учеб. пособие. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. — 197 с.
5. Петров Н. Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 5. — С. 22–26.

6. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
7. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. — 1968. — Т. 4, № 4. — С. 606–617.

Поступила в редакцию 23.04.09

***A. S. Bannikov***
**On one problem of simple pursuit**

A differential game of the group of persecutors and one escapee is considered at equal dynamic opportunities of all participants. Necessary and sufficient conditions for capture are received in the case where the escapee is constrained by phase restrictions.

*Keywords*: differential game, phase restrictions, piece-program strategy and counterstrategy.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Банников Александр Сергеевич, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: bannikov_a_s@mail.ru