

УДК 531.38

© А. А. Килин

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В работе найдено семейство периодических в абсолютном пространстве решений (хореографий) в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой на нулевой константе площадей. Данное семейство включает в себя известные решения Делоне (для случая Ковалевской), частные решения для случая Горячева-Чаплыгина, а также решения Стеклова.

Показано, что при ненулевом значении интеграла площадей соответствующие решения являются периодическими в равномерно вращающейся вокруг вертикали системе координат (относительными хореографиями).

Ключевые слова: динамика твердого тела, периодическое решение, продолжение по параметру, бифуркация.

§ 1. Уравнения движения

Уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести, имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \mu \mathbf{r} \times \gamma, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — компоненты вектора угловой скорости, радиус-вектора центра масс и единичного орта вертикали в системе главных осей инерции (e_1, e_2, e_3) , жестко связанных с твердым телом и проходящих через точку закрепления, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции относительно точки закрепления в тех же осях (не умаляя общности будем полагать, что $I_1 > I_2 > I_3$), $\mu = mg$ — вес тела (рис. 1).

При помощи вектора кинетического момента $\mathbf{M} = \mathbf{I}\omega$ в проекциях на те же оси, уравнения (1.1) могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{\gamma_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

со скобкой Пуассона, соответствующей алгебре $e(3)$

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (1.3)$$

и гамильтонианом — полной энергией тела

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \mu(\mathbf{r}, \gamma), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$.

Скобка Ли–Пуассона (1.3) является вырожденной, она обладает двумя функциями Казимира, коммутирующими в структуре (1.3) с любой функцией от \mathbf{M} , γ ,

$$F_1 = (\mathbf{M}, \gamma), \quad F_2 = \gamma^2. \quad (1.5)$$

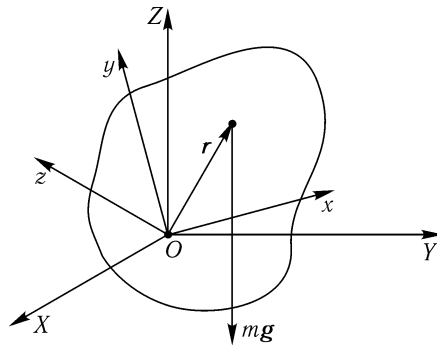


Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в поле тяжести.

В векторном виде уравнения (1.2) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \gamma \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{M}}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Функции F_1 и F_2 являются интегралами уравнений (1.6) с любым гамильтонианом H . Для уравнений Эйлера–Пуассона они имеют естественное физическое и геометрическое происхождение. Интеграл F_1 связан с симметрией относительно вращений вокруг неподвижной вертикальной оси и называется интегралом площадей. Интеграл $F_2 = \text{const}$ — геометрический, для действительных движений значение константы этого интеграла равно единице $F_2 = \gamma^2 = 1$. В конфигурационном пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ уравнение $F_2 = \gamma^2 = 1$ задает сферу Пуассона.

§ 2. Рождение абсолютных хореографий

Случай Эйлера–Пуансо Напомним, что в интегрируемом случае Эйлера–Пуансо тело движется по инерции ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$), а гамильтониан и дополнительный интеграл имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{AM}), \quad \mathbf{F}_3 = \mathbf{M}^2 = \text{const}. \quad (2.1)$$

Явное интегрирование случая Эйлера–Пуансо легко проводится в переменных Андуайе (l, L, g, G, H) , связанных с (\mathbf{M}, γ) следующим образом [3]

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= s \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \left(\frac{H}{G}\right) \left(\frac{L}{G}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g. \end{aligned}$$

Поэтому данные переменные являются наиболее удобными для построения отображения Пуанкаре (фазового портрета). При этом в качестве плоскости сечения выбирается плоскость $g = \pi/2$, а в качестве координат на этой плоскости — $l \bmod 2\pi$ и L/G [12]. Соответствующий фазовый портрет случая Эйлера–Пуансо приведен на рис. 2.

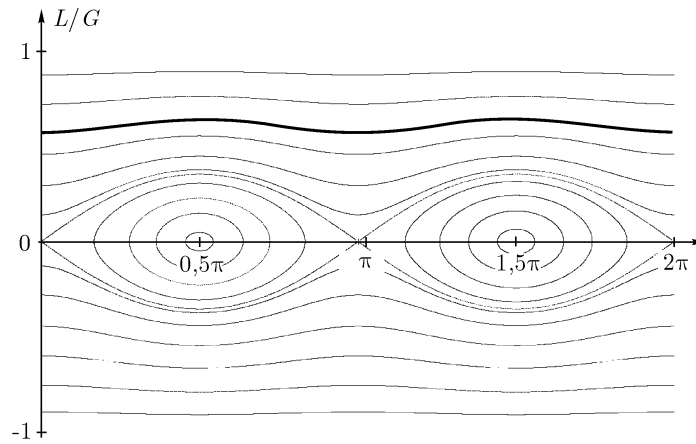


Рис. 2. Отображение Пуанкаре задачи Эйлера–Пуассона при следующих параметрах $E = 2$, $c = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$. Жирной линией на рисунке изображен резонансный тор с числом вращения $n = 1$.

Неподвижным точкам фазового портрета соответствуют перманентные вращения тела вокруг главных осей инерции (устойчивым — вокруг большой и малой, и неустойчивым — вокруг средней). Более сложные интересующие нас периодические решения лежат на резонансных торах. Как известно, частоты движения на резонансных торах становятся соизмеримыми, то есть $p\omega_g - q\omega_l = 0$, $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где ω_l и ω_g — частоты соответствующие угловым переменным Андуайе l и g . При этом весь тор заполняется периодическими решениями, которым на фазовом портрете соответствуют неподвижные точки порядка q (далее для краткости будем говорить о решениях порядка q). Одним из инструментов поиска резонансных торов является исследование *числа вращения* равного отношению частот $n = \omega_l/\omega_g$. Число вращения зависит только от выбранного тора и на резонансных торах равно целочисленной несократимой дроби $n = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, более подробно описание чисел вращения и их свойств для задачи Эйлера–Пуансо можно найти в [10].

На заданном уровне энергии $H(l, L, G) = E$ торы можно параметризовать одной переменной, в данном случае это $\varepsilon = \frac{2E}{G^2}$. Таким образом, число вращения является функцией одной переменной и может быть записано в виде [10]

$$n(\varepsilon)^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(a_1 + (a_2 - a_1) \sin^2 y) dy}{\sqrt{(a_2 - a_1 - (\varepsilon - a_1) \sin^2 y)(a_3 - a_1 - (\varepsilon - a_1) \sin^2 y)}}, & \varepsilon \in [a_1, a_2], \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a_1 \sin^2 l + a_2 \cos^2 l) dl}{\sqrt{(\varepsilon - a_1 \sin^2 l - a_2 \cos^2 l)(a_3 - a_1 \sin^2 l - a_2 \cos^2 l)}}, & \varepsilon \in [a_2, a_3], \end{cases} \quad (2.2)$$

причем значение $\varepsilon = a_1$ соответствует вращению тела вокруг максимальной оси инерции, $\varepsilon = a_3$ — вращению тела вокруг минимальной оси инерции, а $\varepsilon = a_2$ — вращению тела вокруг средней оси инерции. График числа вращения в зависимости от переменной, параметризующей тора, при фиксированных моментах инерции приведен на рисунке 3.

Замечание 1. Вообще говоря, у векторного поля без особых точек на двумерном торе существует не одно, а бесконечно много чисел вращения, связанных между собой соотношением

$$n' = \frac{pn + l}{qn + m}, \quad (2.3)$$

где $\begin{pmatrix} p & l \\ q & m \end{pmatrix}$ — унимодулярная матрица (ее элементы — целые числа, а определитель равен ± 1). В нашем случае конкретное число вращения фиксируется выбором переменных Андуайе и плоскости сечения Пуанкаре.

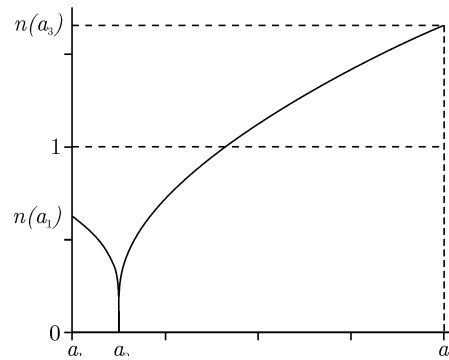


Рис. 3. График числа вращения в зависимости от переменной, параметризующей тора на заданном уровне энергии $E = 2$ при $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$.

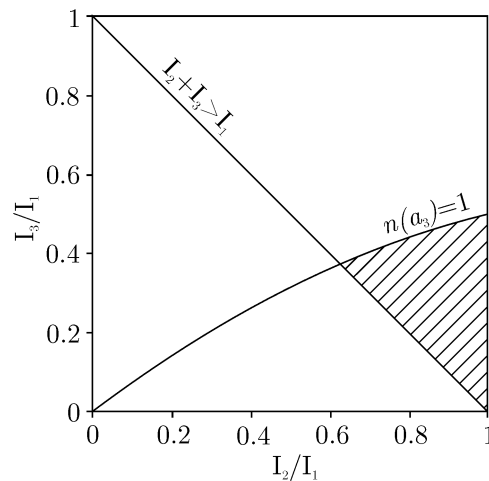


Рис. 4. Область существования резонансного тора $n = 1$.

Рассмотрим наиболее интересный случай равенства частот $\omega_l = \omega_g$, когда число вращения становится равным единице. Как показано в [10] качественный вид графика на 3 сохраняется при любых моментах инерции, следовательно, для существования соответствующего тора необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a_1} n(\varepsilon) > 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow a_3} n(\varepsilon) > 1, \quad (2.4)$$

где, как показано в [10],

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a_1} n(\varepsilon) = ((I_1/I_3 - 1)(I_1/I_2 - 1))^{1/2}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow a_3} n(\varepsilon) = (((1 - I_3/I_2)(1 - I_3/I_1))^{-1/2} - 1)^{-1}. \quad (2.5)$$

Заметим, что из первого неравенства (2.4) следует $I_2 + I_3 < I_1$, что противоречит неравенству треугольника. Следовательно на промежутке $\varepsilon \in (a_1, a_2)$ (то есть внутри сепаратрисы на фазовом портрете) тора с числом вращения $n = 1$ быть не может. Второе из неравенств (2.4) определяет некоторую область на плоскости параметров $(I_2/I_1, I_3/I_1)$. Та часть этой области, для которой выполняется неравенство треугольника ($I_2 + I_3 > I_1$) и будет являться областью существования тора с числом вращения $n = 1$ (см. рис. 4). Отображение Пуанкаре на рис. 2 построено для параметров $(I_2/I_1, I_3/I_1)$, лежащих в найденной области существования тора с $n = 1$. Инвариантная кривая, заполненная неподвижными точками первого порядка соответствующая данному тору изображена на рисунке жирной линией.

Оказывается, что решения, лежащие на резонансном торе, на сфере Пуассона имеют вид замкнутых кривых с самопересечением типа *восьмерки*, причем точки их самопересечения лежат

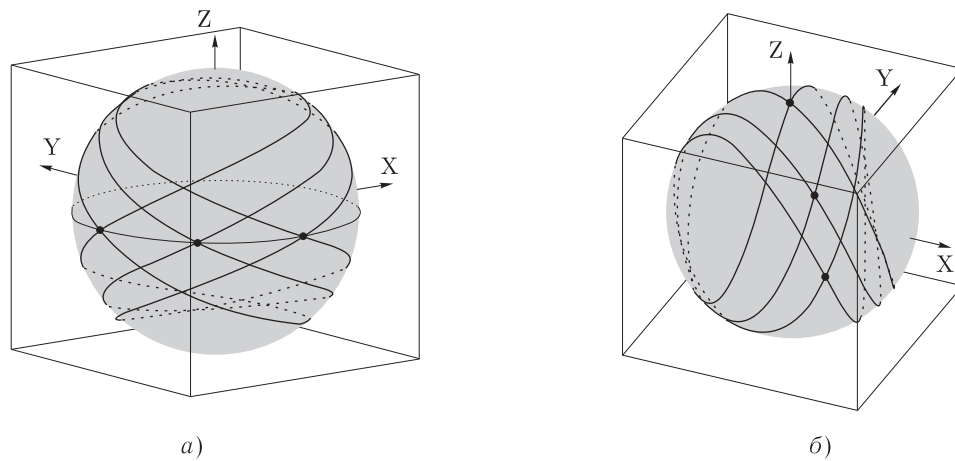


Рис. 5. Периодические решения, лежащие на резонансном торе $n = 1$. а) Движение на сфере Пуассона. б) След апекса e_1 в абсолютном пространстве.

в экваториальной плоскости (см. рис. 5а). Более того, все эти решения являются периодическими и в абсолютном пространстве. Для доказательства этого факта можно использовать следующее

На рис. 5б приведены несколько следов единичного вектора e_1 (апекса) жестко связанного с осью тела Ox для периодических решений лежащих на рассматриваемом торе. Все эти следы также имеют вид восьмерок, причем точки их самопересечения лежат в некоторой вертикальной плоскости. В дальнейшем, на всех рисунках для иллюстрации движения в абсолютном пространстве также будет приводиться след апекса e_1 .

Возмущение случая Эйлера–Пуансо Поставим вопрос о существовании периодических в абсолютном пространстве решений при возмущении задачи Эйлера–Пуансо. Рассмотрим сначала возмущение на нулевой константе интеграла площадей. В качестве малого параметра выберем смещение центра масс тела относительно его центра инерции. В данном случае справедливо следующее

Предложение 1. При смещении центра масс в плоскости перпендикулярной минимальной оси инерции тела ($r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, r_3 = 0$) из резонансного тора с числом вращения $n = 1$ задачи Эйлера–Пуансо на нулевой константе интеграла площадей рождается пара периодических в абсолютном пространстве решений (устойчивое и неустойчивое).

При малых смещениях центра масс существование данных периодических решений приведенной системы доказывается с помощью теоремы Пуанкаре о рождении периодических решений из резонансных торов невозмущенной задачи [10]. Доказательство периодичности решений в абсолютном пространстве, а также обобщение этого результата на случай конечного смещение центра масс было проведено нами с помощью компьютерных методов. Обобщение на случай конечного смещение центра масс проводилось с помощью метода продолжения по параметру, а для доказательства периодичности в абсолютном пространстве использовалось явное интегрирование абсолютного движения твердого тела методами Эверхарта различного порядка. Минимальная величина незамыкания траектории (которую можно определить, например, как величину смещения апекса e_1 за период относительного движения) при выборе метода Эверхарта 27-го порядка составила 10^{-13} . Кроме того, при увеличении точности, метода наблюдается явная сходимость величины незамыкания траектории к нулю.

Заметим, что при смещении центра масс вне указанной плоскости ($r_3 \neq 0$) также рождаются периодические решения приведенной системы, однако они уже не являются периодическими в абсолютном пространстве.

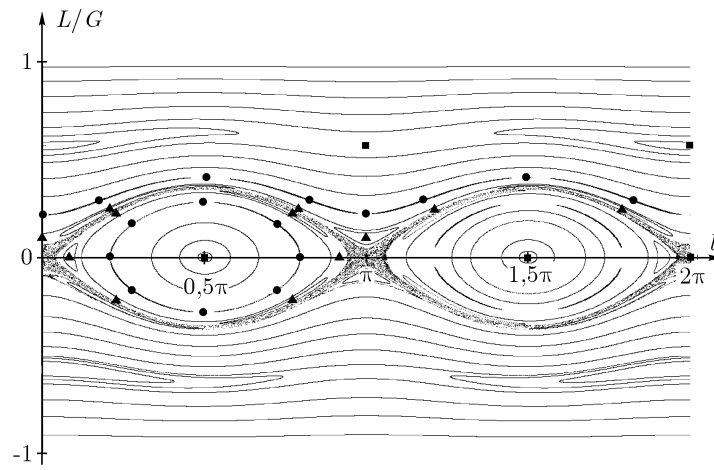


Рис. 6. Отображение Пуанкаре Задачи Эйлера–Пуассона при следующих параметрах $E = 2$, $c = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$, $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{m} = 0.01$. Квадратными маркерами отмечены неподвижные точки первого порядка, круглыми — второго порядка и треугольными — третьего порядка.

Фазовый портрет для случая смещения центра масс вдоль максимальной оси инерции приведен на рис. 6. Замечательно, что решения родившиеся из резонансного тора $n = 1$, наряду с перманентными вращениями, являются определяющими для фазового портрета. Приведем наиболее интересные свойства указанных решений:

1. Вектор γ на сфере Пуассона описывает восьмерку с точкой самопересечения, лежащей на экваторе ($\gamma_3 = 0$) и симметричную относительно экваториальной плоскости. В случае смещения центра масс вдоль одной из главных осей восьмерка обладает симметрией группы C_{2v} (то есть восьмерка является центрально-симметричной). Соответствующие траектории на сфере Пуассона для нескольких смещений центра масс приведены на рис. 7а.
2. Указанное решение симметрично относительно преобразования вида $\sigma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3, -\omega_1, -\omega_2, \omega_3)$. Используя данное свойство при вычислении интеграла можно доказать, что указанные решения являются периодическими в абсолютном пространстве.
3. Апексы главных осей инерции e_1, e_2 описывают на сфере восьмерки с той же группой симметрии, что и на сфере Пуассона, а e_3 — выпуклую замкнутую кривую без самопересечений. Соответствующие следы апекса e_1 для нескольких смещений центра масс приведены на рис. 7б.

По аналогии с восьмеркообразными периодическими траекториями в небесномеханической задаче трех тел, открытыми Муром, Шенсине, Монтгомери и Симо [11, 13], в дальнейшем будем называть подобные решения *абсолютными хореографиями*. Термин хореография подразумевает, что несколько частиц движутся по некоторому числу замкнутых кривых. Применимость этого термина в данной ситуации объясняется тем, что для абсолютного движения все три апекса (подобно трем материальным точкам) будут двигаться по замкнутым кривым (так называемая трехсвязная хореография), две из которых являются восьмерками.

Рассматриваемые абсолютные хореографии образуют некоторое семейство, зависящее от параметров системы. Выбором единиц измерения, а также с помощью масштабного преобразования количество независимых параметров от которых зависит семейство сводится к четырем $(E, I_2/I_1, I_3/I_1, r_2/r_1)$. При этом увеличению возмущения задачи Эйлера–Пуансо соответствует уменьшение энергии E из бесконечности при постоянных смещении центра масс и массе тела. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением трехпараметрического семейства при заданном направлении смещения центра масс (r_2/r_1) .

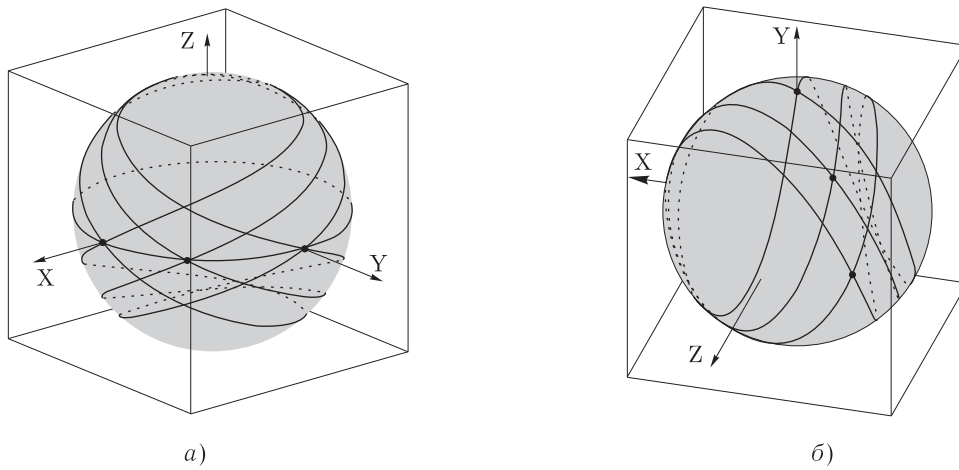


Рис. 7. Периодические решения, рождающиеся из резонансного тора $n = 1$ при трех различных смещениях центра масс $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$. а) Движение на сфере Пуассона. б) След апекса e_1 в абсолютном пространстве.

§ 3. Сценарии рождения абсолютных хореографий

Как было указано выше, абсолютные хореографии в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой рождаются из резонансного тора задачи Эйлера–Пуансо с числом вращения равным единице. В случае, когда такого тора не существует (см. рис. 4) также могут рождаться абсолютные хореографии. Причем в данном случае рождение хореографии происходит путем субкритической бифуркации удвоения периода при продолжении по энергии перманентного вращения вокруг минимальной оси инерции (задачи Эйлера–Пуансо). Отметим, что в работе [4] уже изучались бифуркации удвоения периода перманентных вращений. Более того, в указанной работе был найден целый каскад удвоений периода начинающийся из перманентного вращения задачи Эйлера–Пуансо, однако свойства абсолютного движения рождающихся при этом решений не обсуждались.

Таким образом, в задаче Эйлера–Пуассона при уменьшении энергии из бесконечности, существует два сценария рождения абсолютных хореографий:

1. *Рождение из резонансных торов задачи Эйлера–Пуансо. Значения моментов инерции лежат в области существования тора $n = 1$ на рис. 4;*
2. *Рождение из перманентного вращения задачи Эйлера–Пуансо путем бифуркации удвоения периода. Значения моментов инерции лежат вне области существования тора $n = 1$ на рис. 4.*

Заметим, что если в первом случае хореографии рождаются парами (устойчивая-неустойчивая), то во втором — рождается только устойчивая хореография. Связь этих случаев осуществляется путем продолжения по моментам инерции. Причем во время такого продолжения происходит еще одна бифуркация удвоения периода при которой рождается (или исчезает) неустойчивая хореография.

§ 4. Более сложные хореографии

Рассмотрим вопрос о существовании более сложных периодических движений в абсолютном пространстве. Как и ранее, начнем со случая Эйлера–Пуансо. Очевидно, что кроме тора $n = 1$ в задаче Эйлера–Пуансо существует счетное множество резонансных торов (на фиксированном уровне энергии E), заполненных периодическими решениями различного порядка.

Для всех резонансных торов, с помощью неравенств аналогичных 2.4, можно найти области существования на плоскости $(I_2/I_1, I_3/I_1)$. Из тех же неравенств следует, что торы с $n \geq 1$

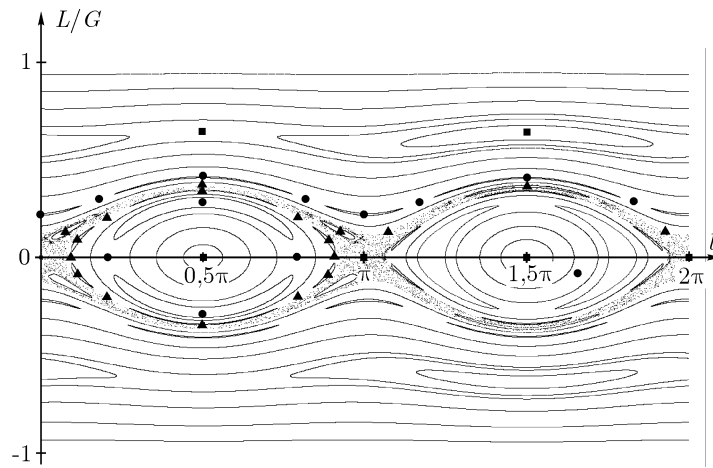


Рис. 8. Отображение Пуанкаре задачи Эйлера-Пуассона при следующих параметрах $E = 2$, $c = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$, $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$, $\mu = 0.02$. Квадратными маркерами отмечены неподвижные точки первого порядка, круглыми — второго порядка и треугольными — третьего порядка.

лежат только в вне сепаратрисы ($p \in (a_2, a_3)$) а торы с числами вращения $n < 1$ могут лежать как вне так и внутри сепаратрисы.

Рассмотрим теперь возмущение задачи Эйлера-Пуансо (как и выше на нулевом уровне интеграла площадей). По теореме Пуанкаре все резонансные торы при возмущении расщепляются на четное число периодических решений (поровну устойчивых и неустойчивых). Некоторые из этих решений также могут быть абсолютными хореографиями. При этом, с точностью до проведенных компьютерных исследований справедливо следующее,

Предложение 2. 1. При смещении центра масс в плоскости перпендикулярной минимальной оси инерции ($r_3 = 0$) из резонансных торов задачи Эйлера-Пуансо, лежащих вне сепаратрисы ($\varepsilon \in (a_2, a_3)$) рождаются периодические в абсолютном пространстве решения.

2. При смещении центра масс в плоскости перпендикулярной максимальной оси инерции ($r_1 = 0$) из резонансных торов задачи Эйлера-Пуансо, лежащих внутри сепаратрисы ($\varepsilon \in (a_1, a_2)$) также рождаются периодические в абсолютном пространстве решения.

Из данного предложения следует, что при смещении центра масс в направлении средней оси инерции все родившиеся из резонансных торов периодические решения являются периодическими в абсолютном пространстве. Соответствующее сечение Пуанкаре, на котором отмечены абсолютные хореографии родившиеся из резонансных торов с числами вращения $n = 1/2$ и $n = 1/3$ приведено на рисунке 8.

§ 5. Относительные хореографии

Рассмотрим теперь возмущение задачи Эйлера-Пуансо на ненулевой константе интеграла площадей. В приведенной системе в данном случае из резонансных торов также рождаются периодические решения Пуанкаре [10]. Однако эти решения уже не являются периодическими в абсолютном пространстве.

Сформулируем некоторые общие свойства абсолютного движения связанного с периодическими решениями приведенной системы.

Предложение 3. Всегда существует равномерно вращающаяся вокруг вертикальной оси система координат, в которой абсолютное движение соответствующее периодическому решению приведенной системы также является периодическим с тем же периодом (т. е. все апексы твердого тела описывают в этой системе замкнутые кривые).

Доказательство. Доказательство основывается на методе, предложенном в работе [10]. Поскольку для периодического решения ω , γ — периодические функции времени, разложим

правую часть в сходящийся ряд Фурье

$$\dot{\psi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}.$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$\psi(t) = a_0 t + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{a_n T}{2\pi i n} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + const = a_0 t + \Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ — T -периодическая функция времени. Ясно, что в системе координат, вращающейся вокруг вертикали с угловой скоростью $\Omega = a_0$, для заданного решения все углы Эйлера θ , φ , ψ являются T -периодическими функциями времени. \square

Таким образом, абсолютное движение тела, соответствующее периодическим решениям, родившимся из резонансных торов, в случае ненулевой константы интеграла площадей можно интерпретировать как *относительную хореографию* (термин также заимствован из [11, 13]) — то есть, как периодическое движение в системе координат, равномерно вращающейся вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью Ω . Точно так же можно интерпретировать и периодические решения родившиеся на нулевой константе интеграла площадей при смещении центра масс, не удовлетворяющем условиям предложения 1 (то есть при $r_3 \neq 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский Ю. А. *Динамика быстровращающегося твердого тела* // М.: Наука, 1985.
2. Баркин Ю. В. *Периодические и условно-периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки* // Прикл. Мат. Мех., 1981, т. 45, № 3, с. 535–544.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела* // Москва-Ижевск: РХД, 2001, 384 с.
4. Борисов А. В., Симаков Н. Н. *Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела* // Рег. и хаот. динам., 1997, т. 2, №1, с. 64–75.
5. Горр Г. В. *Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина* // Прикл. мат. мех., 1970, т. 34, вып. 6, с. 1139–1143.
6. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. *Классические задачи динамики твердого тела* // Киев: Наукова думка, 1978, 296 с.
7. Горр Г. В., Левицкая Г. Д. *Об одном периодическом движении гироскопа Горячева-Чаплыгина* // Мех. тв. тела, 1971, № 3, с. 101–106.
8. Горр Г. В., Савченко А. Я. *Об одном периодическом движении в решении С. В. Ковалевской* // Мех. тв. тела, 1971, № 3, с. 64–69.
9. Делоне Н. Б. *К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской* // Мат. сборник Кружка любителей мат. наук, 1892, т. 16, вып. 2, с. 346–351.
10. Козлов В. В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела* // Ижевск: Изд-во РХД, 2000, 256 с.
11. Chenciner A., Montgomery R. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses* // Annals of Mathematics, 2000, V. 152, p. 881–901.
12. Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. *Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point* // Nuovo Cimento, 1981, V. 61B, №1, p. 1–20.
13. Simó C. *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem* // Celestial Mechanics, dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday. Proceedings of an International Conference on Celestial Mechanics, 15-19 December, 1999 at Northwestern University, Evanston, Illinois. Providence, RI: American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 2002, Vol. 292, p.209

Поступила в редакцию 14.07.08

A. A. Kilin**Optimal programming of the rigid body dynamics problems**

For the classical problem of motion of a rigid body about a fixed point with zero integral of areas, the paper presents a family of solutions which are periodic in the absolute space. Such solutions are known as choreographies. The family includes the famous Delaunay solution in the case of Kovalevskaya, some particular solutions in the Goryachev-Chaplygin case and Steklov's solution.

It is shown that if the integral of areas is zero, the solutions are periodic but with respect to a coordinate frame that rotates uniformly about the vertical (relative choreographies).

Keywords: rigid body dynamics, periodic solutions, continuation by a parameter, bifurcation.

Mathematical Subject Classifications: 76B47, 37J35, 70E40

Килин Александр Александрович, к. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: aka@rcd.ru