МЕХАНИКА 2008. Вып. 3

УДК 532.5:534

© *А. А. Пожалостин, А. В. Паншина*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛИ, ВНУТРЕННЯЯ ПОЛОСТЬ КОТОРОЙ ЗАПОЛНЕНА ЖИДКОСТЬЮ[1]

В работе обсуждается вопрос о возбуждении параметрических колебаний защемленной одним концом консольной балки (цилиндрической трубки), внутренняя полость которой заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Решаются, во-первых, гидродинамическая задача о взаимодействии стенок балки и жидкости и, во-вторых, задача о параметрических поперечных колебаниях консоли.

Ключевые слова: балка, идеальная несжимаемая жидкость, осесимметричные колебания, поперечные колебания.

Введение

В работе обсуждается вопрос о возбуждении параметрических колебаний защемленной одним концом консольной балки (цилиндрической трубки), внутренняя полость которой заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Такие колебания могут возникать в трубопроводах авиационных конструкций и энергетических установок при внезапном защемлении конца трубопровода.

Во-первых, решается гидродинамическая задача о взаимодействии стенок балки и жидкости, которая полностью заполняет внутреннее пространство балки. Предполагается, что со стороны свободного конца консоли сообщается вынуждающее перемещение, изменяющееся по гармоническому закону частоты p. Эта задача решается при следующих допущениях: колебания жидкости и цилиндрической стенки консоли считаются малыми, материал подчиняется закону Гука. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а ее движение — потенциальным с потенциалом скорости Φ. Рассматривается случай осесимметричных продольных вынужденных колебаний оболочки, полностью заполненной жидкостью. Для получения аналитического решения гидродинамической задачи используется метод собственных функций, а именно частные решения уравнения Лапласа. Упругая оболочка считается безмоментной. В результате решения этой краевой задачи определяется прогиб стенки как функция частоты возмущающего перемещения p.

Во-вторых, за счет периодического вынужденного перемещения свободного конца консоли возникает переменное давление в жидкости, которое вызывает упругие колебания оболочки. Это приводит к периодическому изменению погонной массы балки, что может способствовать возбуждению параметрических изгибных поперечных колебаний балки как стержня. Применяя к решению этой задачи разложение по собственным формам, сводим ее для временной функции к уравнению Матье–Хилла, решение которого изучено в достаточной мере.

§ 1. Решение гидродинамической задачи

Пусть консольная цилиндрическая балка полностью заполнена идеальной несжимаемой жидкостью (рис. 1). Движение жидкости предполагается потенциальным с потенциалом скорости $\Phi(r, x, t)$. Функция Φ для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа [1, 2]:

$$\Delta\Phi = 0$$

в объеме жидкости τ.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ, код НШ–1311.2008.8).

МЕХАНИКА 2008. Вып. 3

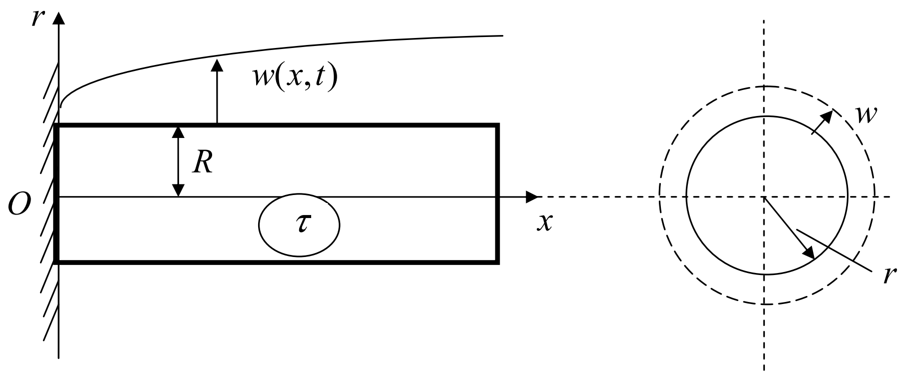

Рис. 1.

Распишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0. \tag{1.1}$$

Скорости частиц жидкости определяются формулой $\mathbf{v}=-\operatorname{grad}\Phi$. Поэтому проекции скоростей v_x и v_r частиц жидкости имеют вид [3]:

$$v_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad v_r=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

Гидродинамическое давление жидкости p в любой точке объема τ имеет вид (интеграл Лагранжа–Коши):

$$p=\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

где ρ — плотность жидкости.

Чисто радиальные осесимметричные колебания оболочки балки описываются уравнением [4]:

$$\ddot{w}+\omega_1^2\,w=\frac{1}{\rho_1\delta_1}\cdot p|_{r=R}\,. \tag{1.2}$$

Здесь $\omega_1^2=\frac{E}{\rho_1 R^2}$ — квадрат частоты свободных колебаний сухой оболочки, E — модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга), ρ_1 — плотность материала оболочки, δ_1 — радиус тонкой цилиндрической оболочки, w — нормальный прогиб оболочки.

Граничные условия для потенциала скорости имеют вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=pu_0\sin pt \quad \text{при } x=l, \tag{1.4}$$

где p — частота возмущающего гармонического воздействия, u_0 — амплитуда воздействия, l — длина цилиндрической оболочки.

Ищем потенциал скорости Φ в виде [2]:

$$\Phi=AJ_0(kr)\frac{\operatorname{ch}kx}{\operatorname{sh}kl}\sin pt. \tag{1.5}$$

Из граничного условия (1.4) будем иметь:

$$AJ_0(kr)k=pu_o. \tag{1.6}$$

Здесь $J_0(kr)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, k — неизвестная константа разделения.

Решаем функциональное уравнение (1.6) приближенно, умножая обе части его на функцию $J_0(kr)$ и интегрируя по r в пределах от 0 до R.

Находим константу A:

$$A = pu_0 \frac{\int\limits_0^R J_0(kr) r\, dr}{k \int\limits_0^R J_0^2(kr) r\, dr}.$$

Входящие в это выражение интегралы равны [5]:

$$\int\limits_0^R J_0(kr)\, r\, dr = -\frac{R}{k} J_1(kR),$$

$$\int\limits_0^R J_0^2(kr)\, r\, dr = \frac{R}{2}[J_0^2(kR) + J_1^2(kR)].$$

Здесь $J_1(kr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Тогда

$$A = \frac{2pu_o[-\frac{R}{k} J_1(kR)]}{kR^2[J_0^2(kR) + J_1(kR)]}.$$

Условие непротекания на смоченной поверхности оболочки имеет вид:

$$\dot{w} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = R.$$

С учетом формулы (1.5) получим:

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} kl} k J_1(kR) \cdot \sin pt.$$

Из формулы (1.2) имеем:

$$\dddot{w} + \omega_1^2 \dot{w} = \frac{1}{\rho_1 \delta_1}\Big|_{r=R}.$$

Так как $\dddot{w} = -p^2 \dot{w}$ и $A \neq 0$, то будем иметь:

$$(p^2 - \omega_1^2) k J_1(kR) = \frac{p^2}{\rho_1 \delta_1} \rho\, J_0(kR). \tag{1.7}$$

Трансцендентное уравнение (1.7) (мероморфная функция) для заданного значения дает спектр значений константы k:

$$k_1, k_2, \ldots .$$

Будем учитывать только первые значения: $k = k_1$.

Итак, решение для прогиба балки w имеет вид:

$$w = -\frac{k}{p} A \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} kl}\, J_1(kR)\, \cos pt.$$

Можно утверждать, что

$$w(x,t) = \varepsilon(x)\, \cos pt. \tag{1.8}$$

Здесь $\varepsilon(x)$ — малая величина первого порядка малости:

$$\varepsilon(x) = -\frac{k}{p} A(k,p) \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} kl} \cdot J_1(kR). \tag{1.9}$$

§ 2. Параметрические поперечные колебания консоли

Для рассмотрения изгибных поперечных колебаний оболочки консольной балки используем балочную модель. Уравнение поперечных свободных колебаний имеет вид:

$$EJy^{(IV)} + \mu(x)y^{(II)} = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь E — модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга), EJ — жесткость балки на изгиб, $\mu(x)$ — погонная масса балки.

Примем приближенное решение уравнения (2.1) в виде:

$$y = q(t)\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Здесь $q(t)$ — функция времени, подлежащая определению.

Подсчитаем погонную массу балки с учетом деформации ее стенки:

$$\mu(x) = \mu_0 + 2\pi\rho R w(x). \qquad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) ищем с помощью метода Галеркина. Тогда будем иметь дифференциальное уравнение для $q(t)$:

$$\ddot{q}\mu(x)\sin\frac{\pi x}{2l} + EJq\cdot\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\sin\frac{\pi x}{2l} = 0. \qquad (2.3)$$

Умножим обе части уравнения (2.3) на $\sin\frac{\pi x}{2l}dx$. Подставим сюда выражения (2.2), (1.8) и (1.9) и проинтегрируем по x от 0 до R. Получим:

$$(\mu_0^* + \varepsilon\,\cos pt)\cdot\ddot{q} + EJ(\frac{\pi}{2l})^4\frac{l}{2}\cdot q = 0\ddot{q} + \omega_0^2(1-\varepsilon_1\,\cos pt)\,q = 0$$

или

$$\ddot{q} + \omega_0^2(1-\varepsilon_1\cos pt)q = 0. \qquad (2.4)$$

Здесь ω_0 — частота поперечных колебаний балки, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\mu_0^*}$.

Выражения для ε и μ_0^* не приводятся в силу их громоздкости.

Итак, исходная задача свелась к решению дифференциального уравнения (2.4), известного в литературе как уравнение Матье–Хилла. Поскольку решение этого уравнения широко известно, то отсылаем читателя к литературе [6].

Можно определить зоны неустойчивости, используя диаграмму Айнса–Стретта [6]. На рис. 2 представлена примерная картина зоны неустойчивости основного параметрического резонанса при $p = 2\omega_0$, где ε — глубина пульсации, $\frac{p}{\omega_o}$ — коэффициент расстройки.

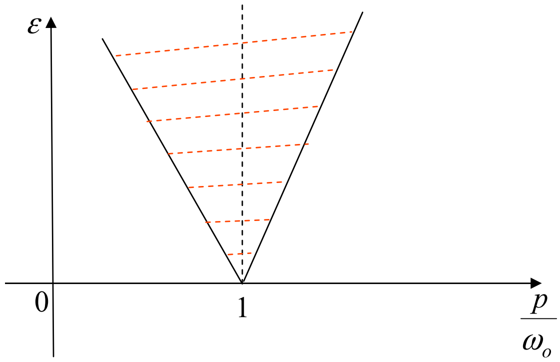

Рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. — М.: Наука, 1967. — 444 с.
2. Балабух Л. И., Ганичев А. И., Молчанов А. Г. Две задачи о собственных колебаниях упругих систем с жидким заполнением // Расчеты на прочность. — 1966. — № 12. — С. 386–392.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1963.
4. Флюгге В. Статика и динамика оболочек / Пер. с нем. — М.: Стройиздат, 1961. — 306 с.
5. Кузнецов Д. С. Специальные функции. — М.: Высшая школа, 1962. — 848 с.
6. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука / Пер. с англ. — М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1955. — 503 с.

Поступила в редакцию 24.09.2008

A. A. Pozhalostin, N. V. Panshina

Parametric oscillations of console, internal cavity of which is filled with liquid

In this paper we discuss a question of exciting parametric oscillations of the balk with one end block up (cylindrical tube), internal value of which is filled with ideal incompressible liquid. First task is a hydrodynamic task about interaction of the walls of console and liquid and second task is about parametric cross oscillations of console.

Keywords: console, ideal incompressibility liquid, axis-symmetric oscillations, cross oscillations.

Mathematical Subject Classifications: 76B:76E

Пожалостин Алексей Алексеевич — д. т. н., профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н. Э. Баумана),105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, E-mail: panalv@mail.ru

Паншина Алла Викторовна — к. ф.-м. н., доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н. Э. Баумана),105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, E-mail: panalv@mail.ru