

УДК 539.4

© В. А. Петушков, Н. В. Скороходова

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБОЛОЧКАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ¹**

Разработаны математические модели и сформулирована нелинейная краевая задача динамики тонкостенных оболочечных конструкций произвольной формы под действием ударного импульсного нагружения. Учитывается зависимость деформирования от скорости нагружения, сжимаемость материала, большие деформации и перемещения срединной поверхности оболочки, образование и кинетика зон пластического течения материала в процессе действия ударной волны нагружения. Параметризация поверхности оболочки осуществляется бикубическими сплайнами. Для описания нелинейного, зависящего от времени и скорости нагружения поведения материала оболочек с анизотропным упрочнением используется обобщенная модель микропластичности, развитая на учете вязкости деформирования, гистерезисных потерь и эффекта Баушингера. Решение краевой задачи строится на основе разностных схем аппроксимации по пространству и времени. Приводятся результаты моделирования нелинейных волновых процессов в составной оболочечной конструкции под действием взрыва.

Ключевые слова: нелинейно деформируемая среда, оболочки, ударное нагружение, математическое моделирование.

Введение

Тонкостенные оболочки произвольной формы, широко используемые на практике в качестве несущих конструкций, оказываются наиболее подверженными разнообразным ударным, взрывным и импульсным воздействиям. Известны многочисленные случаи разрушения сосудов давления, трубопроводов, судов и летательных аппаратов, наземных транспортных средств под действием взрывных нагрузок, столкновений друг с другом и препятствиями, сопровождаемого нелинейным поведением материалов, большими смещениями и деформациями, потерей устойчивости. Поэтому разработка эффективных методов исследования нелинейной динамики и процессов разрушения таких конструкций и их элементов при различных скоростях и условиях ударного нагружения остается актуальной задачей механики оболочек [1, 2].

Вместе с тем возможности современных экспериментальных методов для решения подобных задач оказываются весьма ограниченными не только доступным диапазоном исследуемых скоростей, но и локальным характером ударного нагружения и деформирования оболочек, продолжительность которого во многих случаях измеряется микросекундами [3]. Еще более ограничены возможности известных теоретических подходов.

Успешное применение математического моделирования (вычислительного эксперимента) для изучения нелинейного поведения оболочек в реальных условиях эксплуатации и экстремальных ударных воздействий зависит главным образом от эффективности используемых моделей и методов численного решения соответствующих краевых задач.

Предлагаемые в статье математические модели деформирования оболочек с физической и геометрической нелинейностью относятся к их числу и выгодно отличаются своей простотой и общностью. На их основе сформулирована нелинейная краевая задача высокоскоростной ударной динамики оболочечных конструкций сложной формы, решение которой строится на основе оптимальных (рациональных) разностных схем аппроксимации по пространству и времени.

Обоснование используемых моделей поведения деформируемой среды и самих оболочек выполнено на примере решения важных в практическом отношении задач с использованием

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №07-01-00555-а.

интегроинтерполяционного метода и разностной схемы типа «крест» и эффективных итерационных схем учета физической и геометрической нелинейностей [4, 5].

§ 1. Постановка задачи и методы решения

В основе теории оболочек лежат уравнения трехмерной механики деформируемого твердого тела. Наличие вырожденного размера (толщины оболочки) позволяет на практике свести трехмерную задачу к двумерной, используя для этого различные приближенные теории, основанные на классических или обобщенных гипотезах Кирхгофа–Лява. Число работ, выполненных в этом направлении, труднообозримо.

Другой, более строгий, подход к снижению размерности задачи основан на использовании непосредственно в решении асимптотических методов, граничных интегральных уравнений или объемных конечных элементов с линейной интерполяцией по толщине 3-х мерных кинематических соотношений [2, 6–8]. В этом случае удастся получить достаточно точные решения для сложных составных и ветвящихся тонкостенных оболочек и оболочек средней толщины [8–10].

Для тонкостенных нелинейных оболочек, подвергаемых динамическим воздействиям, оказывается более эффективным с вычислительной точки зрения подход, основанный на представлении оболочки в виде многослойной трехмерной среды с плотноупакованными по толщине слоями и использовании линейной аппроксимации решения на каждом слое [7, 8]. Поскольку оболочку принято считать тонкостенной при соблюдении следующих ограничений:

$$\lambda = \max \left\{ \frac{h}{l}, \frac{h}{l_w}, \sqrt{\frac{h}{R}} \right\} \ll 1, \quad (1)$$

где l — наименьший размер характерной длины, l_w — наименьшая длина волны деформирования, R — наименьший радиус кривизны поверхности оболочки, применимость линейного приближения обеспечивается подходящим выбором числа слоев (толщины h каждого слоя).

Обобщим данный подход и каждый слой деформируемой среды будем рассматривать в виде структурного элемента [11], наделенного определенными свойствами, и тем самым оказывается возможным построить достаточно общую математическую модель нелинейного, зависящего от температуры и скорости нагружения, деформирования.

Соответствующие определяющие соотношения упруговязкопластической деформируемой среды с конечными деформациями и уравнения движения оболочки могут быть сформулированы с использованием основных принципов кинематики и термодинамики в механике твердого тела [12, 13].

Здесь приведем только необходимые соотношения, поскольку подробный вывод уравнений для рассматриваемого класса задач представлен в [4, 5].

1.1. Геометрическое описание и кинематические соотношения. Пусть тонкостенная произвольной формы оболочка (или ее отдельный слой) конфигурации B занимает в R^3 область D и подвергается действию импульсной нагрузки на части или всю ее наружную и/или внутреннюю поверхности. Перемещения точек оболочки $u_i(X^i, t)$ ($i = 1, 2, 3$) будем рассматривать в глобальной декартовой системе координат X^i с естественным базисом e_i . Деформации оболочки рассматриваются в связанной с нею криволинейной системе координат η^α ($\alpha = 1, 2$), с координатными линиями, совпадающими с линиями кривизны оболочки, и координатной прямой η^3 , направленной по нормали к ее срединной поверхности Ω , являющейся основной, рис. 1, а.

Таким образом, $B = \{\eta^\alpha \in \Omega, \eta^3 = \pm h/2\}$ и h — начальная толщина оболочки. Введем на исходной конфигурации оболочки метрику $a_{\alpha\beta}(\eta^\gamma, t)$. Функции $a_{\alpha\beta} = a_\alpha a_\beta$, где a_α — векторы, касательные к координатной кривой η^α , определяют в каждый момент времени t коэффициенты первой фундаментальной формы поверхности Ω , характеризующей ее внутреннюю геометрию.

Если поверхность Ω , к тому же, ориентирована в пространстве R^3 положением нормали n^i , внешней по отношению к каждой точке на поверхности, вводится вторая фундаментальная форма Ω , определяемая выражением $b_{\alpha\beta}(\eta^\alpha, \eta^\beta)$, где характеризующий кривизну

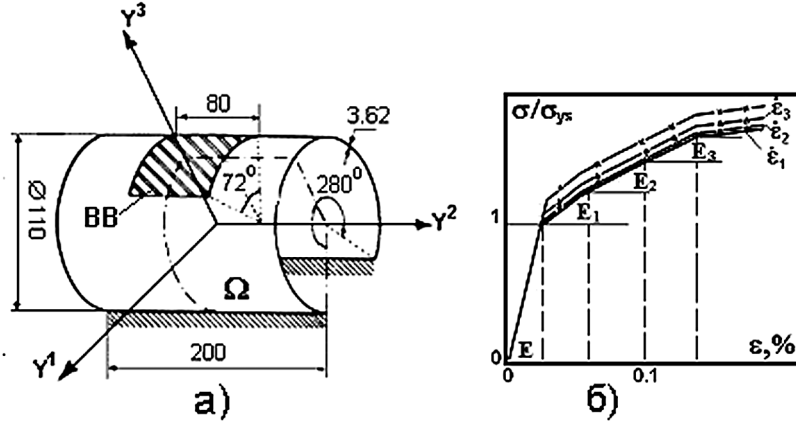


Рис. 1. Цилиндрическая панель с накладным зарядом ВВ: а) геометрия и расчетная область; б) диаграммы деформирования материала и их аппроксимация

оболочки тензор $b_{\alpha\beta} = -r_{,\alpha} \cdot n_{,\beta} = r_{,\alpha\beta} \cdot n = b_{\beta\alpha}$ и запятая обозначает частное дифференцирование по η^α . При этом средняя кривизна поверхности Ω определяется как $H = \frac{1}{2}b_{\alpha}^{\alpha}$.

Изменение метрического тензора по толщине оболочки h вдоль нормали к срединной поверхности определяется выражением

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\eta^3 b_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где η^3 — вырожденная координата.

Движение оболочки под действием указанных сил в течение рассматриваемого промежутка времени $D_t = (0, \tau)$, $\tau > 0$, будем связывать с движением ее срединной поверхности Ω как поверхности Коссера, наделенной жесткостными и инерционными свойствами. Если Ω_0 — срединная поверхность оболочки в исходной конфигурации B в момент времени $t = 0$, то движение оболочки определяется уравнением $r = r(R, t)$, где r обозначает точку Ω_t , которая соответствует R в момент времени t .

Если при движении оболочки происходит ее деформирование, иначе изменение метрики, вводится понятие вектора относительного смещения $\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ с компонентами $u_i(X^i, t)$ и тензора конечных деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ на поверхности Ω_t :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})/2 = (u_{,\alpha}^{\beta} + u_{,\beta}^{\alpha} + u_{,\alpha}^i u_{,\beta}^i)/2. \quad (3)$$

Здесь u^α — компоненты вектора \mathbf{U} , $G_{\alpha\beta}$ определяется (2) для текущей конфигурации B_t с поверхностью Ω_t оболочки, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензор деформаций Грина.

Приращения компонент тензора деформаций Грина при движении оболочки из конфигурации B_t в $B_{t+\Delta t}$ разложим в тензорный ряд по вырожденной координате η^3 и, удерживая первые два члена этого ряда, получим следующее выражение для произвольной точки с координатой z на η^3 :

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^z = \frac{1}{2}(G_{\alpha\beta}(t + \Delta t) - G_{\alpha\beta}(t))/2 \cong \frac{1}{2}\Delta A_{\alpha\beta} - z\Delta B_{\alpha\beta} + \dots, \quad (4)$$

где $\Delta A_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\beta} + \frac{\partial X^i}{\partial \eta^\beta} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\alpha} - \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\beta}$ для деформации на срединной поверхности и $\Delta B_{\alpha\beta} = \tilde{n}^i \frac{\partial^2 \Delta u^i}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Delta n_\gamma + B_{\alpha\beta} \Delta n$ для деформаций по толщине оболочки вдоль нормали n .

При этом $\Delta n = A^{\alpha\beta} \Delta n_\alpha \Delta n_\beta / (1 + n^i \tilde{n}^i)$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = A^{\gamma\delta} \frac{\partial X^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^\beta \partial \eta^\delta}$ — так называемый символ Кристоффеля и $\Delta n_\gamma = -\tilde{n}^i \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\gamma}$. Здесь $A^{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}/A$, $A = \det /A_{\alpha\beta}/$, $\tilde{n}^i = e^{ijk} \frac{\partial X^j}{\partial \eta^1} \frac{\partial X^k}{\partial \eta^2} / A$ — компоненты вектора нормали к срединной поверхности оболочки в точке относительно декартовой системы координат X^i для момента времени t , e^{ijk} — символ Леви-Чевита.

Компоненты тензора полной деформации в любой точке оболочки определяются следующим интегралом по времени:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^z = \int_t \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^z dt. \quad (5)$$

Относительные удлинения волокон оболочки вдоль координатных линий $o\eta^1$, $o\eta^2$ могут быть найдены из выражения

$$E_\alpha = (1 + 2\varepsilon_\alpha)^{1/2} - 1, \quad (6)$$

где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha}/G_{\alpha\alpha}$.

Текущее значение толщины оболочки в момент времени t определяется соотношением [6]

$$h^t = \int_{-1}^1 \left(1 - \left(\frac{\partial u_i^t}{\partial \eta^3}\right)^2 + 2\varepsilon_{33}^t\right)^{1/2} \frac{h}{2} d\eta^3. \quad (7)$$

1.2. Напряжения в оболочке и определяющие соотношения. В процессе нелинейного деформирования оболочки в ней возникают напряженные состояния, характеризуемые симметричным тензором напряжений Пиола–Кирхгоффа $\sigma^{\alpha\beta}$. Нелинейное деформирование оболочки определяется конечными деформациями (3) и уравнениями состояния ее материала, зависящего от скорости деформирования.

Для упруго деформируемой среды компоненты тензора напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ связаны с деформациями обобщенным законом Гука

$$\sigma^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (8)$$

где $\Lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + 2\mu g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}$ — компоненты тензора упругости, $\lambda = E\nu/(1 - 2\nu)(1 + \nu)$ и $\mu = E/2(1 + \nu)$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Производные по времени от компонент тензора напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ полагаются удовлетворяющими условию объективности и принимаются в смысле Яумана–Нолла [13].

Для описания поведения материала оболочки как сжимаемой, зависящей от скорости нагружения деформируемой среды, тензоры напряжений и деформаций представим в виде суммы шаровой и девиаторной составляющих:

$$\sigma^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + p\delta_{\alpha\beta}^{\beta}; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \varepsilon\delta_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где $S^{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta}$ соответственно девиаторы напряжений и деформаций, p — гидростатическое давление и $\varepsilon = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ — объемная деформация.

Для связи между шаровыми составляющими напряжений и деформаций и учета сжимаемости среды в рассматриваемом диапазоне изменения скоростей ударного взаимодействия и деформирования оболочек ограничимся акустическим

$$p = K(V^{-1} - 1), \quad (10)$$

где

$$K = E/3(1 - 2\nu)$$

— коэффициент объемного сжатия, или более общим квазиакустическим приближением, когда ударная адиабата полагается совпадающей с изоэнтропой расширения, а давление — только функцией объема

$$p = A(V^{-1} - 1) + B(V^{-1} - 1)^2 + C(V^{-1} - 1)^3. \quad (11)$$

Здесь A, B, C — константы материала, определяемые по ударной адиабате.

Такое приближение имеет опытное обоснование для достаточно широкого диапазона изменения давлений на фронтах ударных волн порядка 10–15 ГПа. В этом диапазоне необратимость процессов деформирования обусловлена в основном вязкостью и пластическими деформациями сдвига.

Определяющие соотношения для сдвиговых составляющих (9) сформулируем с учетом структурной неоднородности реальных поликристаллических конструкционных материалов. В этом случае всякий бесконечно малый элемент среды может быть представлен в виде совокупности N связанных между собой первично изотропных структурных частиц — субэлементов, свойства которых и взвешенный вклад каждого определяют поведение среды в целом [11, 14].

Все субэлементы, входящие в элементарный объем, полагаются идеально упругопластическими, с одним и тем же модулем упругости E , но разными пределами текучести, зависящими от скорости нагружения и, если необходимо, температуры. Выражение для пределов текучести может быть принято в форме

$$\sigma_{yd}^{(k)} = \sigma_{ys}^{(k)}(1 + |\dot{\varepsilon}_i/d|^p) \quad k \in (1, N), \quad (12)$$

где $\sigma_{ys}^{(k)}$ — статический предел текучести k -го подэлемента, $\dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{\Delta t} \left[(2/3)e_\beta^\alpha e_\alpha^\beta \right]^{1/2}$ — скорость изменения интенсивности деформаций, d и p — коэффициенты, определяемые по экспериментальным кривым однократного деформирования, полученным для различных скоростей нагружения и, если необходимо, температур.

Весовые коэффициенты l_k вклада каждого субэлемента определяются на основе полилинейной аппроксимации указанных кривых деформирования $l_k = (1/E)(E_k - E_{k-1})$, где $E_k = (\sigma_i^k - \sigma_i^{k-1})/(\varepsilon_i^k - \varepsilon_i^{k-1})$, причем $\sum_{k=1}^N l_k = 1$, (рис. 1, б).

Для моделирования пластического течения в каждом субэлементе, принадлежащем рассматриваемому элементарному объему оболочки, используются условие текучести Мизеса

$$f(\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}) = (\sigma_i^{(k)})^2 - (\sigma_{yd}^{(k)})^2 = 0, \quad (13)$$

где $\sigma_i^{(k)} = (\frac{3}{2}S_{\alpha\beta}^{(k)}S_{\alpha\beta}^{(k)})^{1/2}$ — интенсивность напряжений, и ассоциированный закон течения Прандтля–Рейсса, который запишем для компактности в векторной форме

$$\dot{\vec{\sigma}}^{(k)} = 2\mu\dot{\vec{\varepsilon}}^{(k)} - 2\vec{\sigma}^{(k)}\mu(\vec{\sigma}^{(k)} \cdot \vec{\varepsilon}^{(k)})/\sigma_{yd}^{(k)2}. \quad (14)$$

Полные деформации и напряжения в точке — элементарном объеме оболочки распределяются с соответствующими весовыми коэффициентами $l^{(k)}$ для всех N субэлементов $\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^N l_k \varepsilon_{\alpha\beta}^k$,

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^N l_k \sigma_{\alpha\beta}^k.$$

Такое описание нелинейного поведения деформируемой среды позволяет учитывать анизотропию пластических свойств и гистерезисные потери на пластических деформациях, хотя и добавляет к числу обычных переменных физического поля еще $2N$ параметров l_k , σ_i^k .

В дальнейшем каждый подэлемент деформируемой среды будем отождествлять с соответствующим слоем оболочки в ее многослойном представлении. Оптимальное число N структурных элементов или слоев оболочки, используемых в модели, выбирается с учетом условия (1) на основе гистограммы статистического распределения пределов текучести рассматриваемого материала и обычно оказывается достаточным от 4 до 6 элементов [15].

§ 2. Основные уравнения

Краевую задачу динамики оболочки представим в виде уравнений сохранения массы, количества движения и энергии, полагая процессы деформирования оболочки адиабатическими, а возникающие напряженные состояния обобщенными плоскими:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{11}}{\partial \eta^1} + \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{33}}{\partial \eta^3},$$

$$A^{1/2} \rho h \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (M^{\alpha\beta} n^i)}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} + \frac{\partial N^{i\alpha}}{\partial \eta^\alpha} - p * n^i, \quad (15)$$

$$W_p - \Pi - W_k - W_{vp} = 0.$$

Здесь V — текущее значение относительного объема бесконечно малого элемента оболочки, ρ — плотность материала, $p* = A^{1/2} p$ — приведенные распределенные усилия, например давление, на текущей поверхности Ω_t деформируемой оболочки, $M^{\alpha\beta}$, $N^{i\alpha}$ — внутренние усилия, соответственно моменты и компоненты вектора равнодействующей, действующие на бесконечно малый элемент оболочки:

$$M^{\alpha\beta} = A^{1/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} (1 - z B_\gamma^\gamma) - \frac{z}{2} (\sigma^{\alpha\gamma} B_\gamma^\beta + \sigma^{\beta\gamma} B_\gamma^\alpha) \right\} z dz,$$

$$N^{i\alpha} = Q^{\alpha\beta} \partial X^i / \partial \eta^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha M^{\beta\gamma} n^i, \quad (16)$$

где $Q^{\alpha\beta} = A^{1/2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} (1 - z B_\gamma^\gamma) dz$, $\sigma^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений, возникающих в оболочке под действием импульсных нагрузок, W_p — работа внешних сил, Π — потенциальная, а W_k — кинетическая энергии оболочки, W_{vp} — работа диссипативных сил, обусловленных нелинейным деформированием материала оболочки, выражения для которых и алгоритмы вычисления приведены в [4].

В случае адиабатического процесса деформирования, очевидно, нет необходимости в уравнении термодинамики (15 з) для определения искоемых полевых функций, однако оно может быть использовано для контроля устойчивости численного решения краевой задачи.

В качестве начальных условий краевой задачи (15) принимаются деформированная конфигурация основной поверхности и распределение скоростей ее точек $v_i(X^i, t)$ или усилий $p*(X^i, t)$ на ней в начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$u_i(X^i, t_0) = u_i^o(X^i); \dot{u}_i(X^i, t_0) = v_i(X^i) \quad (17)$$

и аналогично для усилий.

Граничные условия на краях оболочки вдоль координатных линий $\eta^\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2$, определяются конкретной задачей и могут включать в себя как силовые относительно моментов и усилий, так и кинематические условия [4, 5]. При наличии границы раздела взаимодействующих сред (контактного разрыва) условия на ней могут быть заданы в форме [5].

§ 3. Схемы численного решения

Для решения краевой задачи (15)–(17) с уравнениями состояния (10)–(14) и заданными граничными условиями используем метод конечных разностей. Параметризация срединной поверхности Ω оболочек сложной формы и формирование расчетной сетки метода могут быть выполнены на основе бикубических сплайнов $\Omega_0(f, x_{ij}, y_{ij}) = f_{ij}$ при $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$, где f_{ij} — значения функции срединной поверхности в узлах сетки.

Введем два типа разностных сеток, аппроксимирующих текущую поверхность Ω и временной слой D_t — пространственную сетку вдоль координатных линий с постоянными шагами $\Delta\eta^1$ и $\Delta\eta^2$: $(\Omega_\Delta \subset \{(\eta_j^1, \eta_k^2); \eta_j^1 = \eta_0^1 + j\Delta\eta^1; \eta_k^2 = \eta_0^2 + k\Delta\eta^2\})$ и сетку на временном слое с шагом Δt : $D_t = \{t^n : t^n = n\Delta t, n \in Z, 0 \leq n\Delta t \leq \tau\}$.

Пространство действительных сеточных функций, соответствующих сформулированной краевой задаче и заданных на сетке Ω_Δ , обозначим $F(\Omega_\Delta)$. Операторы $\partial F / \partial \eta^1$, $\partial^2 F / (\partial \eta^1)^2$, $\partial^2 F / \partial \eta^1 \partial \eta^2$ и аналогичные им по η^2 аппроксимируются в предлагаемой схеме с использованием односторонних и центральных разностей.

Таким образом, для внутренних узлов сетки $F(\Omega_\Delta)$

$$\begin{aligned} \partial F / \partial \eta^1 &\Rightarrow \Delta F / \Delta \eta^1 = [F(M+1, N) - F(M-1, N)] / 2\Delta \eta^1 \\ \partial^2 F / (\partial \eta^1)^2 &\Rightarrow \Delta^2 F / (\Delta \eta^1)^2 = [F(M+1, N) - 2F(M, N) + F(M-1, N)] / (\Delta \eta^1)^2 \\ \partial^2 F / \partial \eta^1 \partial \eta^2 &\Rightarrow \Delta^2 F / \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 = \\ &= [F(M+1, N+1) - F(M-1, N+1) - F(M+1, N-1) + F(M-1, N-1)] / \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \end{aligned}$$

и для узлов, лежащих на граничной линии $\eta^2 = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \partial F / \partial \eta^1 &\Rightarrow \Delta F / \Delta \eta^1 = - [3F(M, N) - 4F(M + 1, N) + F(M + 2, N)] / 2\Delta \eta^1 \\ &\quad \partial^2 F / (\partial \eta^1)^2 \Rightarrow \Delta^2 F / (\Delta \eta^1)^2 = \\ &= [2F(M, N) - 5F(M + 1, N) + 4F(M + 2, N) - F(M + 3, N)] / (\Delta \eta^1)^2 \\ &\quad \partial^2 F / \partial \eta^1 \partial \eta^2 \Rightarrow \Delta^2 F / \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 = \\ &= - [3\Delta F / \Delta \eta^2(M, N) - 4\Delta F / \Delta \eta^2(M + 1, N) + \Delta F / \Delta \eta^2(M + 2, N)] / \Delta \eta^1 \end{aligned}$$

и т. д.

Для неравномерной сетки в тех случаях, когда приходится рассматривать оболочки сложной геометрии, например с вырезами, производные вычисляются с использованием разностных операторов интегроинтерполяционного метода на девятиточечном шаблоне [4]:

$$\partial F / \partial \eta^\alpha \Rightarrow \sum_{r=1}^9 \frac{\partial F}{\partial \eta^\alpha}(M, N) S_r / \sum_{r=1}^9 S_r,$$

где S_r — площадь сегмента r в шаблоне.

Реализация приведенных схем аппроксимации требует, как известно, специальных подходов для численного представления граничных условий и вычисления составляющих энергии в уравнении баланса (15₃), они подробно представлены в [4, 5].

Уравнения движения оболочки для произвольного узла конечно-разностной сетки Ω_Δ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A^{1/2} \rho h [(\Delta u'_i - \Delta u_i) / \Delta t^2 + D(\Delta u'_i + \Delta u_i) / 2\Delta t] = \\ = \partial^2 (M^{\alpha\beta} n^i) / \partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta + \partial N^{i\alpha} / \partial \eta^\alpha - p^* n^i, \end{aligned} \quad (18)$$

где D — коэффициент искусственного демпфирования, которое обычно вводится при наличии сильных разрывов в профилях изменения плотности, напряжений и других полевых функций, входящих в уравнения (15) или реализации метода установления.

В соответствии со структурной моделью оболочка полагается состоящей из N слоев. Все переменные, входящие в уравнения (15), (18) и приведенные выше выражения, являются функцией номера слоя $k \in (1, N)$. Координата z , отсчитываемая по η^3 вдоль нормали n , принадлежит середине слоя $z = (l' - (N + 1)/2)h/N$, $l' = 1, \dots, N$, где $h = h(\eta^\alpha, t)$ — текущая толщина оболочки. Следовательно, в каждой узловой точке (m, n) конечно-разностной сетки $F(\Omega_\Delta)$ получаем N значений тензоров напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$.

Определение напряженных и деформированных состояний в любом слое-субэлементе k для точки интегрирования (m, n) уравнений (15), (18) строится на основе метода последовательной линеаризации, на каждом шаге которой решается задача упругости для упругих «пробных» напряжений (8). Пробное напряжение затем погружается на выпуклую поверхность течения (13).

После завершения итерационного цикла и при переходе к следующему шагу линеаризации осуществляется пересчет толщины оболочки в соответствии с (7). Такая процедура решения выполняется последовательно на каждом слое $k \in (1, N)$ и шаге по времени $\Delta t \in D_t$. Требования сходимости для этого метода означают определенные ограничения на обратное погружение пробного напряжения [4, 16].

Используемые разностные схемы являются условно-устойчивыми, величина Δt устанавливается на основе известных критериев устойчивости, например Куранта:

$$A_a \frac{\Delta t}{\rho_0 V \Delta \eta} \leq 1/3, \quad (19)$$

где A_a — адиабатическая скорость звука, $V = 1/\rho$ — удельный объем, или Неймана, выражения для которого получены из аналитического решения задачи об импульсном нагружении

прямоугольной пластинки соответственно для мембранного и изгибного состояний:

$$\Delta t_M \leq \frac{2}{C} (1/(\Delta\eta^1)^2 + 1/(\Delta\eta^2)^2)^{-1/2}$$

$$\Delta t_B \leq \frac{1}{2hC} \left\{ \frac{1-1/n^2}{12} \left[\frac{1}{(\Delta\eta^1)^4} + \frac{1}{(\Delta\eta^2)^4} + \frac{1+15\nu}{8(\Delta\eta^1\Delta\eta^2)^2} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (20)$$

Здесь $C = (E/(\rho(1-\nu^2)))^{1/2}$, n — число слоев, выделенных по толщине h . В процессе решения выбирается наименьшее из (19), (20) значение шага по времени.

Преимуществом предлагаемого подхода является возможность ограничиться C^0 -аппроксимацией перемещений $u_i(x^k, t)$ по толщине отдельного слоя оболочки, в то время как в обычном приближении необходима по крайней мере C^1 -аппроксимация 3-мерного решения вдоль вырожденного размера оболочки. При этом, очевидно, расширяются границы применения модели на широкий класс композиционных, составленных из разных материалов, многослойных тонкостенных оболочечных конструкций [17].

§ 3. Численные результаты

Для обоснования разработанной модели и подтверждения точности и вычислительной эффективности предлагаемого метода моделирования приведем результаты решения двух задач.

В первой, имеющей помимо практической значимости экспериментальное обоснование и результаты других авторов, исследуется нелинейное деформирование цилиндрической панели при локальном нагружении взрывом накладного заряда ВВ.

Панель, рис. 1, толщиной $h = 3.62$ мм и $h/R = 0.07$ изготовлена из стального листа со следующими характеристиками материала: плотность $\rho_0 = 8.0 \cdot 10^3$ кг/м³, объемный модуль упругости $K = 150$ ГПа, $\mu = 69.2$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$ и предел текучести $\sigma_{ys} = 180$ МПа.

Исходная квазистатическая и зависящие от скорости нагружения диаграммы деформирования материала и их аппроксимация в полилинейной форме также представлены на рис. 1. Оболочка в этом случае полагалась состоящей из 4-х плотно упакованных по толщине слоев или подэлементов.

В качестве граничных использовались условия защемления панели вдоль краев, являющихся образующими ее цилиндрической поверхности: $u_i = 0$ и $\frac{\partial u_i}{\partial \eta^\alpha} = 0$, и свободных боковых краев — криволинейных контуров вдоль η^1 , в каждой точке которых $Q^{22} = 0$, $M^{21} = 0$. Локальный накладной заряд ВВ размещен в центре на внешней поверхности оболочки (рис. 1, а). При его подрыве все точки поверхности оболочки в зоне контакта с ВВ начинают двигаться со скоростью V_3 , значение которой, как и замеренное в эксперименте, принималось равным 140 м/с [18].

В математическом моделировании высокоскоростной динамики оболочки в силу симметрии задачи рассматривалась четверть панели Ω (выделена пунктиром на рис. 1).

Вычисления в настоящей работе проводились на конечно-разностной сетке 20×20 с шагом интегрирования по времени $\Delta t = 0.16 \cdot 10^{-5}$ с, как по схеме типа «крест», так и с использованием интегроинтерполяционного метода (ИИМ) на девятиточечном шаблоне.

Под действием взрыва оболочка деформируется, рис. 2, в ней возникают большие перемещения и деформации. Соответствующая моменту времени $t = 200$ мкс от начала взрыва геометрия оболочки приведена на рис. 2, а.

Изменение максимального смещения оболочки по времени в центральной точке В под зарядом показано на рис. 2, б вместе с решением, полученным в линейной постановке. Здесь же приведены известные результаты других авторов [18], из сравнения с которыми следует хорошее соответствие и адекватность используемой модели. При этом решение на основе конечно-разностной схемы «крест» оказалось ближе к результатам, наблюдаемым в эксперименте, чем полученным интегроинтерполяционным методом и МКЭ.

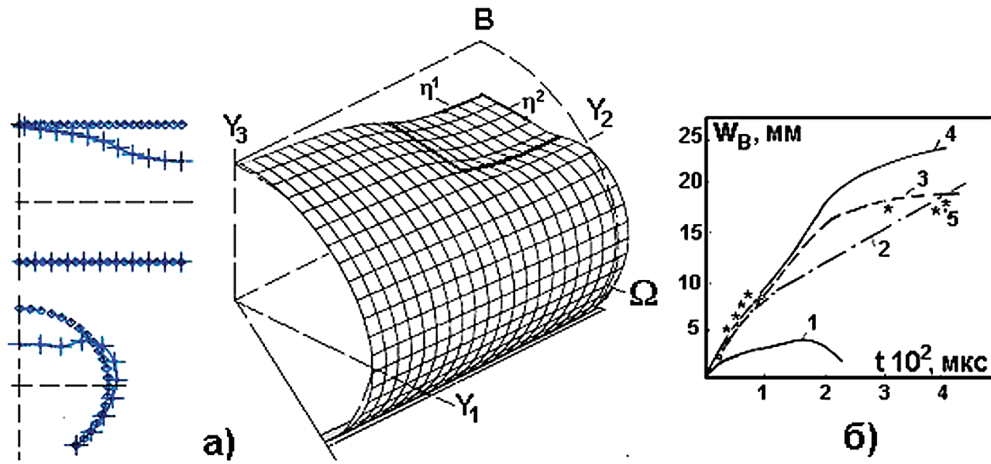


Рис. 2. Расчетная схема оболочки (а) и результаты вычисления ее прогиба в центре действия взрыва (б) (1 — линейная теория; 2 — МКЭ; 3, 4 — МКР и ИИМ; 5 — эксперимент)

Следует отметить сильное влияние нелинейностей на результаты полученного решения. Большие отклонения по сравнению с линейным решением наблюдаются не только в максимальных смещениях, но и в самом характере изменения максимального смещения во времени.

Во второй, чрезвычайно важной в прикладном отношении, задаче выполнено подробное изучение и представлены результаты моделирования нелинейных процессов деформирования и предельных состояний, возникающих при взрыве в тонкостенной оболочечной конструкции-сосуде давления. Такие сосуды широко используются для хранения и перевозки взрывоопасных жидкостей и газов и являются потенциально опасными.

Рассматриваемая конструкция, рис. 3, включает в себя цилиндр радиуса R и сферические днища, соединенные с цилиндром оболочками тороидальной формы с относительными размерами $-h/R = 0.015$, $R_1/R = 2$, $R_2/R = 0.169$, $\alpha = 22.8^\circ$.

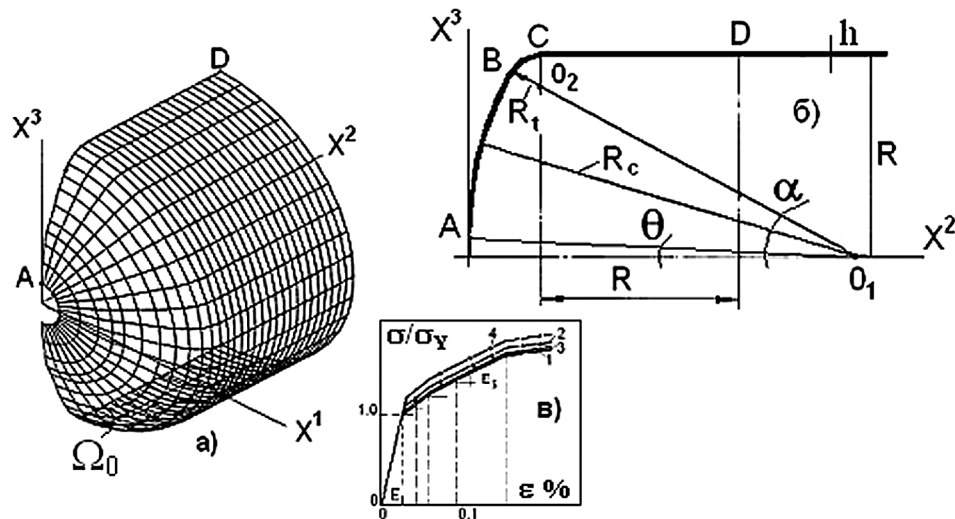


Рис. 3. Составная оболочка под действием взрыва (а — расчетная схема, б — меридиональное сечение и размеры, в — диаграммы деформирования и их аппроксимация)

Используется металл со следующими свойствами, заимствованными из [19]: $\nu = 0.3$, модуль упругости $E = 4.4 \cdot 10^3$ и удельный вес $\rho_0 h / \sigma_Y = 1.0 \cdot 10^{-7}$, где σ_Y — статический предел текучести. Диаграммы деформирования материала с учетом его зависимости от скорости нагружения также представлены на рис. 3, в, где 1 — статическая кривая, 2 — $\dot{\epsilon} = 0.0412^{-1}$, 3 — $\dot{\epsilon} = 0.205^{-1}$, 4 — $\dot{\epsilon} = 1.4^{-1}$.

Оболочка полагается состоящей из 6 плотноупакованных слоев — структурных субэлементов со следующими относительными пределами текучести: $\bar{\sigma}_Y^n = 1.0, 1.6, 2.45, 3.8, 6.3, 15.3$ и соответствующими им коэффициентами влияния: $l_n = 0.778, 0.07, 0.046, 0.035, 0.03, 0.41$.

Изменение пределов текучести в зависимости от скорости нагружения описывается реологической функцией (12) с параметрами $p = 1.0$ и $d = 1.25$ при $\dot{\epsilon} < 0.04 \text{ с}^{-1}$, $d = 3.33$ при $0.04 < \dot{\epsilon} < 0.2 \text{ с}^{-1}$, $d = 7.7$ при $\dot{\epsilon} > 0.2 \text{ с}^{-1}$. В соответствии с этим исходные диаграммы деформирования аппроксимируются шестилинейными ломаными кривыми, рис. 3, в.

Ударное воздействие взрыва на оболочку представляется равномерно распределенной по внутренней поверхности волной давления, интенсивность которого меняется по времени в виде $F(t) = \bar{F}_0 \sin(\pi t/t_0)$, где $\bar{F}_0 = 0.033$ — максимальная амплитуда давления в ударной волне, отнесенная к статическому пределу текучести, $t_0 = 20 \text{ мкс}$ — длительность действия давления.

Расчетная область оболочки Ω принимается, как и в предыдущей задаче, с учетом симметрии в виде составной панели сложной формы, которая покрывается конечно-разностной сеткой размером 20×30 ячеек (рис. 3, а), регулярной с постоянным шагом $\Delta\eta^2/R = 0.05$ и переменным шагом $\Delta\eta^1/R$, равномерно меняющимся от 0.0045 до 0.15.

В качестве граничных условий используются условия симметрии на краях оболочки, лежащих в плоскостях симметрии, и условия свободного края в месте выреза полюса с углом $\theta = 2^\circ$, рис. 3, где в целях наглядности показана четверть оболочки, симметричная относительно вертикальных плоскостей. Решение нелинейной краевой задачи выполнено на разностной схеме типа «крест».

Искажение геометрии оболочки в процессе ее нелинейного деформирования показано на рис. 4, а.

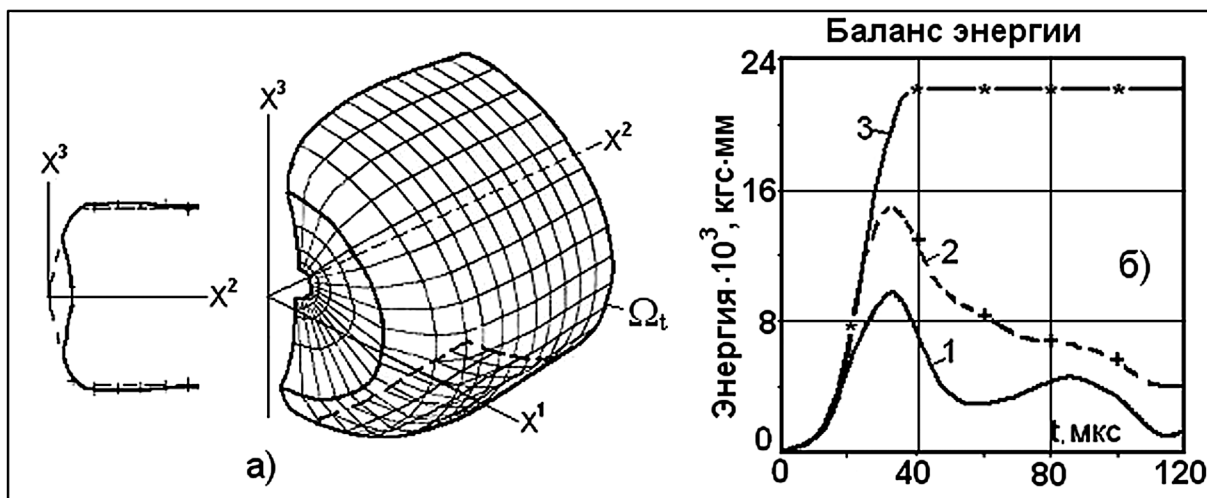


Рис. 4. Процесс деформирования оболочки во времени а) геометрия оболочки в момент времени $t = 40 \text{ мкс}$ от начала взрыва, б) изменение и баланс энергий во времени (1 — кинетическая энергия; 2 — потенциальная энергия и энергия демпфирования; 3 — полная энергия)

Другие результаты численного моделирования оболочки представлены кривыми изменения во времени максимального прогиба-перемещения $w = u^3/R$, (рис. 5, а) и внутренних усилий (рис. 5, б) в точке D на рис. 3, б.

На этих же рисунках приведены решения аналогичной задачи, полученные в осесимметричном приближении [19]. Наблюдается хорошее совпадение результатов по амплитудам и времени для основных полевых функций, представляющих интерес.

Из выполненных расчетов следует, что влияние скорости нагружения (вязкости материала) в данном случае не существенно влияет на протекание волновых процессов в оболочке и ее деформированные состояния.

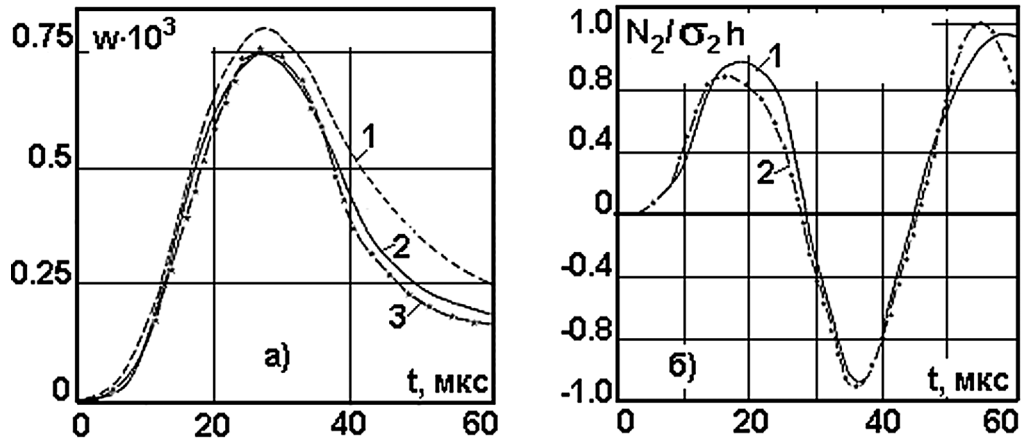


Рис. 5. а) Перемещения внутренней поверхности оболочки в точке D во времени (1 — без учета и 2 с учетом реономных свойств, 3 — осесимметричное приближение); б) изменение во времени мембранного усилия N_2 в точке D оболочки (1 — расчет, 2 — осесимметричное приближение)

Для иллюстрации поведения материала оболочки в процессе ударного нагружения на рис. 6 приведены расчетные диаграммы деформирования в точке D, полученные во времени с учетом (1) и без учета (2) вязкости материала.

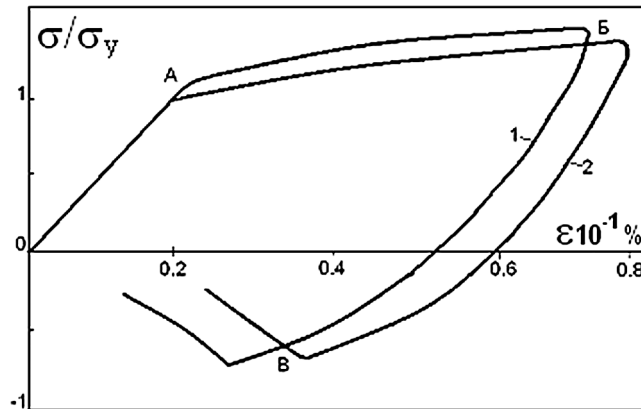


Рис. 6. Расчетная кривая деформирования материала в точке D на внутренней поверхности оболочки в течение 5 мкс от начала взрыва

Используемая модель поведения упругопластических сред хорошо описывает основные этапы деформирования, включая упругое (участок OA), пластическое течение с нелинейным упрочнением (участок AB) и разгрузку с учетом вязкости (участок BB).

Кривые 1, 2 на рис. 6 отражают выявленные особенности влияния скорости нагружения и возможности модели, наиболее важными из которых являются описание гистерезиса и эффекта Баушингера при циклическом динамическом нагружении, поскольку они во многом определяют характер и интенсивность ударных волн, распространяющихся в оболочке.

В этом отношении показательны также полученные результаты по формированию и распространению по времени зон пластического течения и связанных с ними предельных состояний в оболочке и, в частности, по ее толщине в меридиональном сечении, рис. 7, где зоны течения и разгрузки с последующим повторным течением сменяют друг друга в процессе деформирования.

Для обеспечения вычислительной устойчивости решения использовались критерии (19), (20). Оптимальное значение шага интегрирования на временном слое D_t определялось в про-

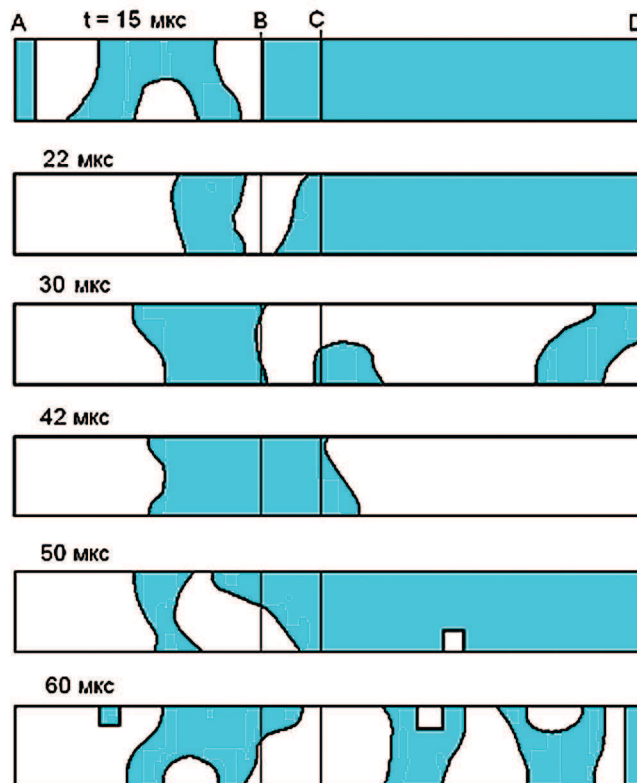


Рис. 7. Кинетика зон пластических деформаций в меридиональном сечении оболочки

цессе выполнения расчетов, принято равным 0.5 мкс и подтверждено условием сохранения консервативности по энергии, рис. 4,б.

§ 4. Заключение

Представлены разработанные модели и особенности их реализации на ЭВМ для изучения нелинейных волновых процессов в тонкостенных оболочках произвольной формы при ударно-импульсном нагружении. Учитываются геометрическая нелинейность, обусловленная конечными деформациями, и нелинейное, зависящее от скорости деформирования поведение материалов с анизотропным упрочнением и эффектом Баушингера. Выполнено обоснование предлагаемых моделей и получено решение важной в прикладном отношении задачи о нелинейном деформировании и распространении ударных волн в замкнутой оболочке под действием взрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proceedings of the 8th intern. Conference "Shell structures theory and applications-2005". Gdansk-Jurata, Poland, (October 4–7, 2005).
2. Kienzler R., Altenbach H., Ott I. (Eds.) Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. (Series: Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, V. 16). — Springer, 2004. — 238 p.
3. Khan, A.S. and Wang, X. Strain Measurements and Stress Analysis. — Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ. — 2001. — 247 p.
4. Петушков В. А., Мельситов А. Н. Постановка и методы решения нелинейных задач импульсной динамики оболочек ИМАШ АН СССР – М., 1991. — 76 с. — Деп. в ВИНТИ № 4170-В91.
5. Петушков В. А. Динамика гидроупругих систем при импульсном возбуждении // Динамика конструкций гидроаэроупругих систем. — М.: Наука, 2002. — С. 162–202.
6. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity Volume III: Theory of Shells. — North-Holland, Amsterdam, 2000. — 666 p.

7. Kratzig W. B., Jun D. On best shell models – from classical shells, degenerated and multi-layered concepts to 3D // Archive of Appl. Mech. — 2003. — V. 73. — P. 1–25.
8. Бакулин В. Н., Образцов И. Ф., Потопахин В. А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек. Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии — М.: Наука. Физматлит, 1998. — 464 с.
9. Петушков В. А. Численная реализация метода граничных интегральных уравнений применительно к нелинейным задачам механики деформирования и разрушения объемных тел // Моделирование в механике. Сб. научных трудов ИТПМ СО АН СССР. — Новосибирск — 1989. — С. 133–156.
10. Петушков В. А. Расчет оборудования первого контура АЭС при динамических (сейсмических) воздействиях // В кн. *Конструкции и методы расчета водо-водяных энергетических реакторов*. — М.: Наука, 1987. — С. 185–204.
11. Бессилинг Дж. Ф. Теория пластического течения начально-изотропного материала, который анизотропно упрочняется при пластических деформациях // Механика: Период. сб.: Пер. с иностр. яз. — М.: Мир, 1961. — № 2. — С. 124–168.
12. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — М.–Л. : Гостехиздат, 1948. — 212 с.
13. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics // Handbuch der Physik — N.Y.: Springer, 1965. — Bd III/3. — 602 p.
14. Петушков В. А., Кащенко С. Ф. Структурное моделирование нелинейных процессов деформирования конструкций с трещинами при циклических воздействиях // *Машиноведение АН СССР*. — 1988, № 1. — С. 3–11.
15. Петушков В. А. Статистические факторы в анализе процессов деформирования и оценке ресурса // *Статистические закономерности малоциклового разрушения* — М.: Наука, 1989. — С. 236–245.
16. Schreyer H. L., Kulak R. F., Kramer J. M. Accurate Numerical Solutions for Elastic Plastic Models // Trans. of the ASME, J. of Pressure Vessels Technology. — 1979. — Vol. 101, № 8. — P. 226–234.
17. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. — Ниж. Новгород: Издательство ННГУ, 2002. — 204 с.
18. Donea J., Guiliani S., Halleux J.P. Prediction of the nonlinear dynamic response of structural Components using finite elements // Nucl. Engng. And Design. — 1976. — Vol. 37, №. 1. — P. 95–114.
19. Takezono S., Tao K. Elasto/visco-plastic dynamic response of shells of revolution // Trans. of the 4th intern. confer. on structural mechanics in reactor technology. — 1977. — M 7/7.

Поступила в редакцию 28.08.2008

V. A. Petushkov, N. V. Skorokhodova

Impact waves propogation in nonlinear deformable shells of a complex form

Mathematical models were developed and the nonlinear boundary value problem of dynamics thinwalled shells of the arbitrary form under action shock pulse is formulated. Dependence of processes of deformation on speed loading, compressibility of a material, finite deformations and large displacements of a shell middle surface, formation and kinetic of plasticity zones of a material during action of a shock wave are considered. Parameterization of a shell surface is carried out by bi-cubic splines. For the description of nonlinear, time and speed dependents of a shell material behavior with anisotropic hardening the generalized model of microplasticity is developed on the account of viscosity of deformation, hysteresis losses and Baushinger's effect. The solution of boundary value problems on the basis of difference schemes is constructed. Results of modeling of nonlinear wave processes in a assemble shell under action of explosion also are presented.

Keywords: nonlinear deformed media, shells, impact dynamics, numerical simulation.

Mathematical Subject Classifications: 37M05, 74M20, 74C20, 74K25

Петушков Владимир Алексеевич — профессор, д. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования ИМАШ РАН 101990, г. Москва, М. Харитоньевский пер., E-mail: pva_imash@bk.ru 4

Скороходова Наталья Владимировна — младший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования ИМАШ РАН 101990, г. Москва, М. Харитоньевский пер., 4, E-mail: skarnat18@gmail.com