

УДК 532.5:519.63

© С. И. Мартыненко

## АДАПТАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА К УНИВЕРСАЛЬНОЙ МНОГОСЕТОЧНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Рассмотрена адаптация уравнений Навье–Стокса к универсальной многосеточной технологии с целью создания высокоэффективного алгоритма для решения задач вычислительной гидродинамики.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, многосеточные методы.

### Введение

В настоящее время математическое моделирование физических процессов широко используется во многих отраслях машиностроения. Однако до сих пор существует ряд проблем, связанных с формализацией численных методов, повышением эффективности вычислительных алгоритмов, распараллеливанием вычислений и построением сеток. Поэтому существующие пакеты прикладных программ не всегда могут быть использованы для решения прикладных задач. С начала 90-х годов ведутся интенсивные разработки новых методов вычислений для перспективных программных продуктов. Одним из подходов является универсальная многосеточная технология (УМТ), в которой минимизировано число проблемно-зависимых компонент [1, 5]. Отличительной чертой УМТ является адаптация краевых задач к технологии для гибкого изменения порядка и/или способа аппроксимации.

Вычислительная гидродинамика является одной из основных областей применения высокопроизводительных вычислений. Характерной трудностью численного решения уравнений Навье–Стокса является расчет давления. В [2] показано, что эффективность существующих алгоритмов можно повысить, если наряду с основной задачей (исходные уравнения Навье–Стокса) решать вспомогательную задачу для быстрого отыскания части давления.

Целью настоящей работы является описание адаптации уравнений Навье–Стокса (основной и вспомогательной задач) к УМТ и многосеточного цикла технологии.

### § 1. Адаптация уравнений Навье–Стокса

В качестве примера рассмотрим задачу о нестационарном течении в каверне с движущейся крышкой (см. рис. 1). Квадратная каверна  $H \times H$  заполнена жидкостью с постоянными теплофизическими свойствами. Верхняя крышка каверны, движущаяся со скоростью  $U_w$ , увлекает за собой прилегающий слой жидкости. Как следствие, в каверне возникает вихревое движение жидкости.

Нестационарные уравнения Навье–Стокса могут быть записаны в следующем безразмерном виде:

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

б) уравнение движения по X

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.2)$$

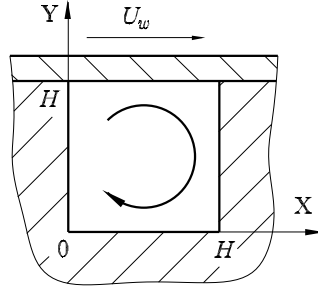


Рис. 1. Каверна с движущейся крышкой

в) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (1.3)$$

где число Рейнольдса определяется как

$$\text{Re} = \frac{\rho U_w H}{\mu}.$$

Представим компоненты скорости и давление в виде

$$u = c^u + \hat{u}, \quad (1.4)$$

$$v = c^v + \hat{v}, \quad (1.5)$$

$$p = c^p + \hat{p}, \quad (1.6)$$

где разностные аналоги  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  и  $\hat{p}$  будут играть роль приближений к решению, а аналоги  $c^u$ ,  $c^v$  и  $c^p$  — поправок в последующих многосеточных итерациях. В УМТ подобное представление получило название  $\Sigma$ -модификации решения [1, 5]. Подставляя (1.4)–(1.6) в безразмерные уравнения Навье–Стокса, получаем:

а)  $\Sigma$ -модифицированное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial c^u}{\partial x} + \frac{\partial c^v}{\partial y} = R^{uv}, \quad (1.7)$$

б)  $\Sigma$ -модифицированное уравнение движения по X

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^u}{\partial t} + \frac{\partial(c^u)^2}{\partial x} + 2\frac{\partial(\hat{u}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{u}c^v)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial y} + \frac{\partial(c^u c^v)}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial c^p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 c^u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^u}{\partial y^2} \right) + R^u, \end{aligned} \quad (1.8)$$

в)  $\Sigma$ -модифицированное уравнение движения по Y

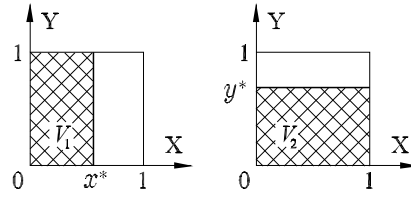
$$\begin{aligned} \frac{\partial c^v}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}c^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(c^u c^v)}{\partial x} + \frac{\partial(c^v)^2}{\partial y} + 2\frac{\partial(\hat{v}c^v)}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial c^p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 c^v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^v}{\partial y^2} \right) + R^v, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$R^{uv} = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad (1.10)$$

$$R^u = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial(\hat{v}\hat{u})}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right), \quad (1.11)$$

$$R^v = -\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \frac{\partial(\hat{u}\hat{v})}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}^2}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right). \quad (1.12)$$



**Рис. 2.** Расположение контрольных объемов  $V_1$  и  $V_2$

Выражения (1.10)–(1.12) образованы приближениями к решению. По мере сходимости многосеточных итераций поправки будут стремиться к нулю, следовательно, к нулю будут стремиться невязки уравнений движения и неразрывности:  $R^{uv} \rightarrow 0$ ,  $R^u \rightarrow 0$  и  $R^v \rightarrow 0$ .

Теперь перейдем к построению вспомогательной задачи. Интегрируя уравнение неразрывности (1.1) по контрольным объемам

$$V_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq x^*; 0 \leq y \leq 1\},$$

$$V_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq y^*\},$$

показанным на рис. 2, получаем два уравнения постоянства массового расхода

$$\int_0^1 u(x, y) dy = 0, \tag{1.13}$$

$$\int_0^1 v(x, y) dx = 0. \tag{1.14}$$

Уравнения (1.13) и (1.14) можно рассматривать как априорную информацию об искомом решении полных уравнений Навье–Стокса. Основное назначение вспомогательной задачи состоит в использовании априорной информации физического характера (уравнений постоянств массового расхода) для быстрого отыскания части давления с привлечением высокоэффективных численных методов, предложенных ранее для решения упрощенных уравнений Навье–Стокса [2].

Уравнения постоянств массового расхода (1.13) и (1.14) также переписываются в  $\Sigma$ -модифицированной форме:

$$\int_0^1 c^u(x, y) dy = - \int_0^1 \hat{u}(x, y) dy, \tag{1.15}$$

$$\int_0^1 c^v(x, y) dx = - \int_0^1 \hat{v}(x, y) dx. \tag{1.16}$$

С учетом декомпозиции давления

$$c^p(t, x, y) = c^{p^x}(t, x) + c^{p^y}(t, y) + c^{p^{xy}}(t, x, y) \tag{1.17}$$

и соотношений (1.15) и (1.16) вспомогательная задача принимает вид:

а) уравнение движения по X (1.8) и уравнение постоянства массового расхода (1.15)

$$\begin{cases} \frac{\partial c^u}{\partial t} + \frac{\partial (c^u)^2}{\partial x} + 2 \frac{\partial (\hat{u} c^u)}{\partial x} + \frac{\partial (\hat{u} c^v)}{\partial y} + \frac{\partial (\hat{v} c^u)}{\partial y} + \frac{\partial (c^u c^v)}{\partial y} = \\ = - \frac{\partial c^{p^x}}{\partial x} - \left[ \frac{\partial c^{p^{xy}}}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 c^u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^u}{\partial y^2} \right) + R^u, \\ \int_0^1 c^u(x, y) dy = - \int_0^1 \hat{u}(x, y) dy, \end{cases} \tag{1.18}$$

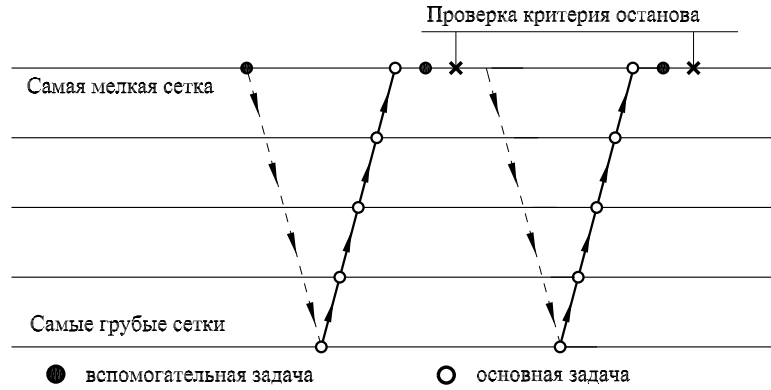


Рис. 3. Многосеточный цикл

б) уравнение движения по  $Y$  (1.9) и уравнение постоянства массового расхода (1.16)

$$\begin{cases} \frac{\partial c^v}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}c^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(c^u c^v)}{\partial x} + \frac{\partial(c^v)^2}{\partial y} + 2\frac{\partial(\hat{v}c^v)}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial c^{p^y}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial c^{p^{xy}}}{\partial y} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 c^v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^v}{\partial y^2} \right) + R^v, \\ \int_0^1 c^v(x, y) dx = - \int_0^1 \hat{v}(x, y) dx, \end{cases} \quad (1.19)$$

где квадратные скобки означают, что производные  $(c^{p^{xy}})'_x$  и  $(c^{p^{xy}})'_y$  являются фиксированными (то есть вычисляются по значениям  $c^{p^{xy}}$ , взятым с предыдущей итерации), а фигурные скобки означают, что уравнения движения решаются согласованно с соответствующими уравнениями постоянств массового расхода.

С учетом декомпозиции давления (1.17) уравнения движения (1.8) и (1.9) в основной задаче принимают вид:

а)  $\Sigma$ -модифицированное уравнение движения по  $X$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^u}{\partial t} + \frac{\partial(c^u)^2}{\partial x} + 2\frac{\partial(\hat{u}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{u}c^v)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial y} + \frac{\partial(c^u c^v)}{\partial y} = \\ = - \left[ \frac{\partial c^{p^x}}{\partial x} \right] - \frac{\partial c^{p^{xy}}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 c^u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^u}{\partial y^2} \right) + R^u, \end{aligned} \quad (1.20)$$

б)  $\Sigma$ -модифицированное уравнение движения по  $Y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^v}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}c^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}c^u)}{\partial x} + \frac{\partial(c^u c^v)}{\partial x} + \frac{\partial(c^v)^2}{\partial y} + 2\frac{\partial(\hat{v}c^v)}{\partial y} = \\ = - \left[ \frac{\partial c^{p^y}}{\partial y} \right] - \frac{\partial c^{p^{xy}}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 c^v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^v}{\partial y^2} \right) + R^v. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Заметим, что адаптация уравнений Навье–Стокса и построение вспомогательной задачи в трехмерном случае и/или для сжимаемых сред выполняется аналогичным образом.

## § 2. Многосеточный цикл

Многосеточный цикл показан на рис. 3. Решение модифицированных уравнений Навье–Стокса начинается на самой мелкой сетке со вспомогательной задачи (1.18) и (1.19). В качестве сглаживающей процедуры для вспомогательной задачи используется метод Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных. При этом совместно вычисляются поправки  $c^{p^x}$  и  $c^{p^y}$ . После завершения сглаживания на самой мелкой сетке осуществляется пересчет приближений к решению, обнуление поправок и переход к уровню с самыми грубыми сетками. В УМТ отсутствует

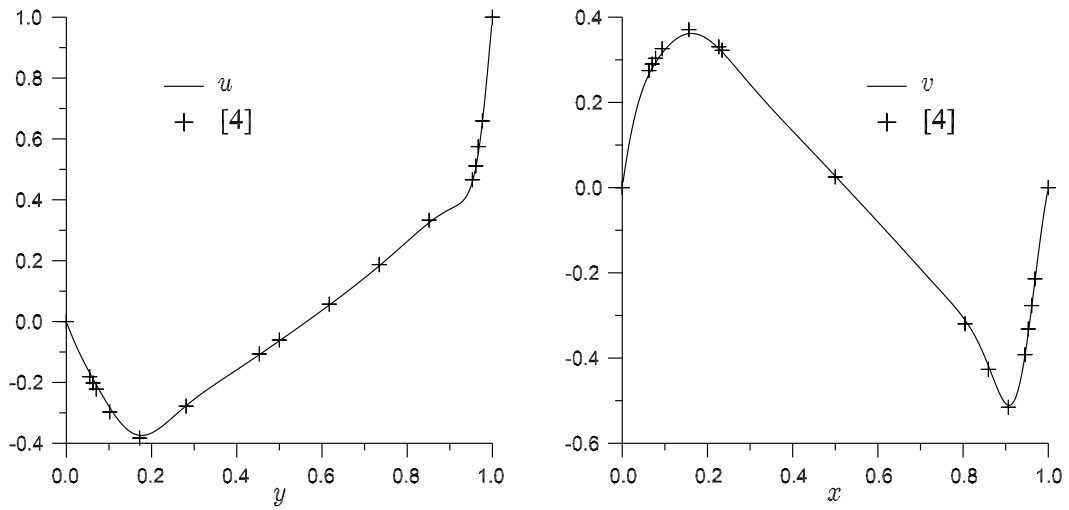


Рис. 4. Распределение стационарных значений компонент скорости в срединных сечениях каверны

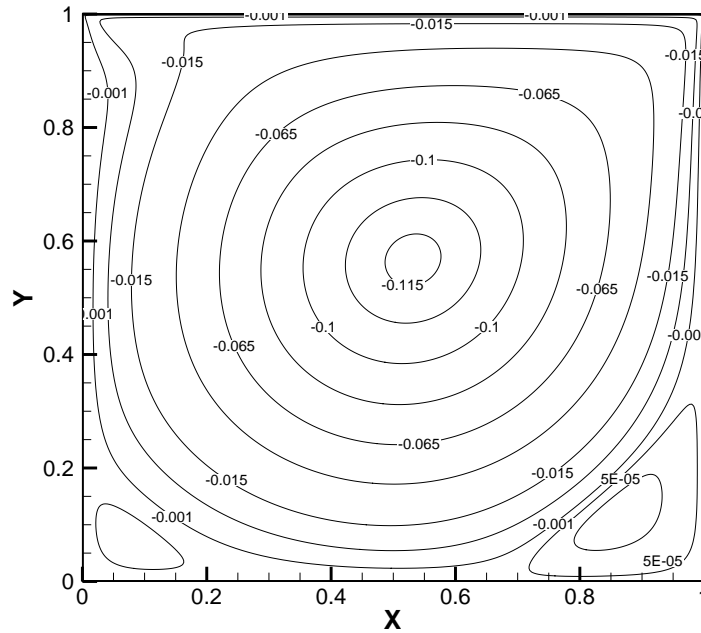


Рис. 5. Изолинии функции тока при  $Re = 1000$

предварительное сглаживание для избежания дополнительных (по сравнению с односеточными алгоритмами) трудностей при решении нелинейных задач. В качестве сглаживающей процедуры на уровнях с грубыми сетками для основной задачи (1.7), (1.20) и (1.21) использован метод Зейделя с точечным упорядочиванием неизвестных. Поправка к давлению  $e^{D^{xy}}$  вычислялась при помощи метода искусственной сжимаемости [3]. После завершения сглаживающих итераций при решении основной и вспомогательных задач на самой мелкой сетке осуществляется пересчет приближений к решению, обнуление поправок и проверка критерия останова. Если критерий останова не достигнут, то выполняется следующая многосеточная итерация. В противном случае выполняется переход на следующий временной слой.

На рис. 4 показано распределение стационарных значений компонент скорости в срединных сечениях каверны при  $Re = 1000$ . Решение уравнений Навье–Стокса получено на шестиуровневой многосеточной структуре с разнесенной самой мелкой сеткой  $1001 \times 1001$ . Изолинии функции тока показаны на рис. 5.

### Заключение

Эффективность вычислительных алгоритмов для решения уравнений Навье–Стокса может быть повышена посредством совершенствования методов вычисления давления и решения разностных уравнений. Сложность уравнений Навье–Стокса крайне затрудняет исследование алгоритмов теоретическими методами. Однако вычислительные эксперименты показали, что использование вспомогательной задачи, основанной на декомпозиции давления и уравнениях постоянств массового расхода, позволяет уменьшить объем вычислительной работы по сравнению с классическими алгоритмами. Минимальное ускорение сходимости (сокращение объема вычислений на  $\sim 30 \dots 50\%$ ) наблюдается при моделировании рециркулирующих течений [2]. Максимальное ускорение сходимости достигается при моделировании течений с доминирующим направлением движения среды. В пределе трудоемкость решения полных уравнений Навье–Стокса становится сравнимой с трудоемкостью решения уравнений Навье–Стокса в приближении длинного канала.

Универсальная многосеточная технология обладает скоростью сходимости близкой к оптимальной и по вычислительным усилиям проигрывает классическим многосеточным методам, оптимально адаптированным к конкретной задаче [1]. Однако УМТ не требует адаптации своих компонент и может быть использована для решения нелинейных задач.

Современные алгоритмы для решения уравнений Навье–Стокса содержат параметр нижней релаксации, значение которого сильно влияет на скорость сходимости. Экспериментальное сравнение эффективности различных алгоритмов будет возможно только при разработке методики определения оптимального значения данного параметра.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко С. И. Универсальная многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. — 2000. — Т. 1. — Раздел 1. — С. 85–104.
2. Мартыненко С. И. Совершенствование вычислительных алгоритмов для решения уравнений Навье–Стокса на структурированных сетках // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. — 2008. — №2. — С. 78–94.
3. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. — 1967. — Vol. 2. — P. 12–26.
4. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // J. Comp. Physics. — 1982. — Vol. 48. — P. 387–411.
5. Martynenko S. I. Robust Multigrid Technique for black box software // Comp. Meth. in Appl. Math. — 2006. — Vol. 6, №4. — P. 413–435.

Поступила в редакцию 16.10.08

*S. I. Martynenko*

#### **Adaptation of Navier–Stokes equations to the robust multigrid technique**

We study an adaptation of the Navier–Stokes equations to the robust multigrid technique in order to develop efficient solver for CFD problems.

*Keywords:* Navier–Stokes equations, multigrid methods.

Mathematical Subject Classifications: 65N55, 76Mxx

Мартыненко Сергей Иванович, к. ф.-м. н., научный сотрудник отдела спецдвигателей и химмотологии ФГУП Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова, 111116, Россия, г. Москва, ул. Авиамоторная, 2, E-mail: martyn\_s@mail.ru