

УДК 517.995.8, 532.529.2

© С. В. Козицкий

АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ БИДИФФУЗИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ ХОПФА

Рассматривается трехмерная бидиффузионная конвекция в бесконечном плоском слое несжимаемой жидкости в окрестности точек бифуркации Хопфа. Методом многомасштабных разложений выведена система амплитудных уравнений для горизонтальных вариаций амплитуды конвективных ячеек квадратного типа. Уделено внимание взаимодействию конвекции с горизонтальным вихрем. Обсуждаются различные частные случаи получившихся уравнений.

Ключевые слова: бидиффузионная конвекция, термохалинная конвекция, амплитудные уравнения, метод многомасштабных разложений.

Введение

Физические системы, в которых существенную роль играет конвекция, обусловленная двойной диффузией, часто встречаются в природе. В таких системах присутствуют две компоненты, коэффициенты диффузии которых существенно различны. Это могут быть тепло и соль в морской воде, тепло и гелий в звездных атмосферах либо два реагента в химическом реакторе. В результате различного пространственного распределения этих компонент в поле силы тяжести возникает конвекция, которая может принимать различные формы и приводить к разнообразным явлениям [1]. Широко известны, например, солевые пальцы, возникающие в подсолненной и подогретой сверху воде. Понятно, что результаты, полученные для бидиффузионной конвекции, скажем, в океане, могут быть применимыми и для бидиффузионной конвекции в астрофизических системах или в химическом реакторе.

Бидиффузионная (термохалинная) конвекция играет важную роль в процессах тепло-массопереноса в океане и также существенно влияет на различные мелкомасштабные процессы, например, на формирование тонкой вертикальной термохалинной структуры [2]. Подобные феномены на настоящий момент изучены недостаточно хорошо. Одним из эффективных способов исследования этих явлений является построение простых математических моделей, в основе которых лежит вывод так называемых амплитудных уравнений методом многомасштабных разложений. Такой подход позволяет избежать громоздких численных расчетов и обычно выводит исследователя на непосредственный физический смысл того или иного явления.

В литературе существуют многочисленные работы, посвященные теоретическим моделям систем с бидиффузионной конвекцией. В 80–90-е гг. появился ряд работ, в которых изучается процесс формирования структур в окрестности точек бифуркации Хопфа для трансляционно-инвариантных по горизонтали систем. Осцилляции в таких системах могут привести к возникновению различных типов волн (например, стоячих, бегущих, модулированных, хаотических), которые хорошо описываются в рамках обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау [3, 4]. Вид этих уравнений часто постулируется из общих соображений (типа соображений симметрии); предполагается, что коэффициенты в них должны быть выведены асимптотическими методами из исходных уравнений в частных производных, описывающих конкретную физическую систему. Однако полный и обоснованный вывод амплитудных уравнений для систем с бидиффузионной конвекцией пока слабо представлен в литературе. Отчасти это может объясняться сравнительно большим объемом выкладок, необходимых для строгого вывода уравнений и формул для их коэффициентов. А работ, посвященных амплитудным уравнениям для трехмерной бидиффузионной конвекции, автору найти пока не удалось.

Целью настоящей работы является вывод амплитудных уравнений для трехмерной бидиффузионной конвекции в окрестности точек бифуркации Хопфа. Последняя характерна для рассматриваемой физической системы при достаточно больших числах Рэлея, что имеет место в большинстве случаев, важных для океанологии. Кроме того, в работе исследуется случай квадратных конвективных ячеек, как наиболее часто встречающихся в задачах конвекции [5], наиболее простой с точки зрения объема выкладок.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается трехмерная термохалинная конвекция в слое воды толщиной h , ограниченном двумя бесконечными плоскими горизонтальными границами, подогреваемом и подсаживаемом снизу. Исходными в этом случае являются уравнения гидродинамики для жидкой смеси в поле силы тяжести [6]:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \\ \partial_t S + (\mathbf{v} \nabla) S &= D \Delta S, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ — поле скоростей жидкости; $T(t, x, y, z)$ — температура; $S(t, x, y, z)$ — концентрация соли; $p(t, x, y, z)$ — давление; $\rho(t, x, y, z)$ — плотность жидкости; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; ν — коэффициент вязкости жидкости; χ — коэффициент температуропроводности жидкости; D — коэффициент диффузии соли. Используются горизонтальные x и y , а также вертикальная z пространственные переменные; время обозначено через t .

Предполагается, что распределенные источники тепла и соли отсутствуют. На верхней и нижней границах области поддерживаются постоянные значения температур и соленостей, что соответствует линейному по вертикали и не зависящему от времени основному распределению этих величин. Существует два принципиально различных типа термохалинной конвекции: пальцевая [7], когда более теплая и соленая вода находится у верхней границы области, и диффузионная, когда температура и соленость больше у нижней границы [1]. В настоящей работе рассматривается второй тип.

Выделим в качестве отдельного члена стационарное решение:

$$\begin{aligned}\rho(x, y, z, t) &= \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t), & P(x, y, z, t) &= P_0(z) + P'(x, y, z, t), \\ T(x, y, z, t) &= T_0(z) + T'(x, y, z, t), & S(x, y, z, t) &= S_0(z) + S'(x, y, z, t).\end{aligned}$$

Преобразуем члены с плотностью и давлением в духе приближения Обербека–Буссинеска, стандартного для задач конвекции [6]:

$$-\frac{1}{\rho_0 + \rho'} (P_0 + P')_z - g = -\frac{P'_z}{\rho_0} + g\alpha' T'(x, y, z, t) - g\gamma' S'(x, y, z, t),$$

где α' и γ' — температурный и солёностный коэффициенты объемного расширения. Далее будем полагать, что ρ_0 является константой, равной плотности жидкости на среднем уровне по глубине. Температура и соленость в случае стационарного решения запишутся так:

$$\begin{aligned}T_0(z) &= T_+ - (T_+ - T_-)zh^{-1} = T_+ - T_\Delta zh^{-1}, & T_\Delta &= T_+ - T_-, \\ S_0(z) &= S_+ - (S_+ - S_-)zh^{-1} = S_+ - S_\Delta zh^{-1}, & S_\Delta &= S_+ - S_-.\end{aligned}$$

Здесь через T_+ и T_- , а также через S_+ и S_- обозначены значения температур и солёностей на нижней (+) и верхней (−) границах области соответственно.

Введем следующие единицы измерения для всех фигурирующих в уравнениях величин: для длины, времени, скорости, давления, температуры и солености это будут соответственно h , h^2/χ , χ/h , $\rho_0\chi^2/h^2$, T_Δ , S_Δ , где T_Δ и S_Δ — разности температур и солёностей на границах

слоя. Проведем обезразмеривание исходных уравнений с учетом приближения Буссинеска и вида стационарного решения.

Обезразмеренные эволюционные уравнения для момента импульса жидкой частицы, температуры и солености приобретают следующий вид [3, 8]:

$$\begin{aligned}
 u_t + (uu_x + vv_y + ww_z) &= -p_x + \sigma \Delta u, \\
 v_t + (wv_x + vv_y + vw_z) &= -p_y + \sigma \Delta v, \\
 w_t + (uw_x + vw_y + ww_z) &= -p_z + \sigma \Delta w + \sigma R_T \theta - \sigma R_S \xi, \\
 \theta_t + (u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z) - w &= \Delta \theta, \\
 \xi_t + (u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z) - w &= \tau \Delta \xi, \\
 u_x + v_y + w_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь введены: $\sigma = \nu/\chi$ — число Прандтля ($\sigma \approx 7.0$), $\tau = D/\chi$ — число Льюиса ($0 < \tau < 1$, обычно $\tau = 0.01 - 0.1$), $R_T = (g\alpha'h^3/\chi\nu)T_\Delta$ — температурное и $R_S = (g\gamma'h^3/\chi\nu)S_\Delta$ — соленостное числа Рэлея.

Граничные условия для зависимых переменных выберем нулевыми, что означает постоянную температуру и соленость на границах области, обращение в нуль вихря на границах, а также непроницаемость границ:

$$u_z = v_z = w = \theta = \xi = 0 \text{ при } z = 0, 1.$$

Эти граничные условия в литературе обычно называются условиями со свободным скольжением или просто свободными, так как горизонтальная компонента скорости на границе не определена. Несмотря на некоторую искусственность подобных граничных условий, считается [9, 10], что они хорошо подходят для описания конвекции во внутренних слоях жидкости и не меняют существенно критерии возникновения конвективной неустойчивости для исследуемого класса систем [9].

§ 2. Вывод амплитудных уравнений

2.1. Общая схема разложения

Рассмотрим уравнения конвекции с двойной диффузией в окрестности некоторой точки бифуркации, температурное и соленостное числа Рэлея для которой обозначены через R_T^* и R_S^* соответственно. В этом случае числа Рэлея можно представить в виде

$$R_T = R_T^*(1 + \varepsilon^2 r_T), \quad R_S = R_S^*(1 + \varepsilon^2 r_S).$$

Значения r_T и r_S порядка единицы, а малый параметр ε показывает, насколько далеко от точки бифуркации находится рассматриваемая система. Для вывода амплитудных уравнений будем использовать метод разложения производной [11, 12, 13]. Введем медленные переменные

$$T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad X_1 = \varepsilon x, \quad Y_1 = \varepsilon y.$$

В соответствии с выбранным методом будем считать, что зависимые переменные теперь зависят от t , T_1 , T_2 , x , y , z , X_1 , Y_1 , которые считаются независимыми. Заменяем также производные в уравнениях (1.1) на продолженные по правилам:

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2}, \quad \partial_x \rightarrow \partial_x + \varepsilon \partial_{X_1}, \quad \partial_y \rightarrow \partial_y + \varepsilon \partial_{Y_1}.$$

Тогда уравнения (1.1) запишутся так:

$$\begin{aligned}
u_t + (uu_x + vu_y + wu_z) + p_x - \sigma \Delta u &= \\
&= -\varepsilon[u_{T_1} + uu_{X_1} + vv_{Y_1} + p_{X_1} - 2\sigma(u_{xX_1} + u_{yY_1})] + \varepsilon^2[\sigma(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)u - u_{T_2}], \\
v_t + (uv_x + vv_y + wv_z) + p_y - \sigma \Delta v &= \\
&= -\varepsilon[v_{T_1} + uv_{X_1} + vv_{Y_1} + p_{Y_1} - 2\sigma(v_{xX_1} + v_{yY_1})] + \varepsilon^2[\sigma(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)v - v_{T_2}], \\
w_t + (uw_x + vw_y + ww_z) + p_z - \sigma \Delta w - \sigma R_T \theta + \sigma R_S \xi &= \\
&= -\varepsilon[w_{T_1} + uw_{X_1} + vw_{Y_1} - 2\sigma(w_{xX_1} + w_{yY_1})] + \\
&+ \varepsilon^2[\sigma(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)w - w_{T_2} + \sigma r_T \theta - \sigma r_S \xi], \\
\theta_t + (u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z) - w - \Delta \theta &= \\
&= -\varepsilon[\theta_{T_1} + u\theta_{X_1} + v\theta_{Y_1} - 2(\theta_{xX_1} + \theta_{yY_1})] + \varepsilon^2[(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)\theta - \theta_{T_2}], \\
\xi_t + (u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z) - w - \tau \Delta \xi &= \\
&= -\varepsilon[\xi_{T_1} + u\xi_{X_1} + v\xi_{Y_1} - 2\tau(\xi_{xX_1} + \xi_{yY_1})] + \varepsilon^2[\tau(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)\xi - \xi_{T_2}], \\
u_x + v_y + w_z &= -\varepsilon(u_{X_1} + v_{Y_1}).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра ε :

$$\begin{aligned}
u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots, & v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots, \\
w &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + \dots, & p &= \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots, \\
\theta &= \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3 + \dots, & \xi &= \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \dots.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

После подстановки этих выражений в уравнения (2.1) и приведения членов с одинаковыми степенями ε получается системы уравнений для определения членов рядов (2.2).

2.2. Члены порядка ε

При $O(\varepsilon^1)$ получается следующая система:

$$\begin{aligned}
u_{1t} + p_{1x} - \sigma \Delta u_1 &= 0, \\
v_{1t} + p_{1y} - \sigma \Delta v_1 &= 0, \\
w_{1t} + p_{1z} - \sigma \Delta w_1 - \sigma R_T \theta_1 + \sigma R_S \xi_1 &= 0, \\
\theta_{1t} - w_1 - \Delta \theta_1 &= 0, \\
\xi_{1t} - w_1 - \tau \Delta \xi_1 &= 0, \\
u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Поддействовав на первые три уравнения оператором $\vec{z} \cdot \text{rot rot}$ и приняв во внимание последнее уравнение системы (2.3), получим систему из трех уравнений относительно трех зависимых переменных w, θ, ξ :

$$\begin{aligned}
\Delta(w_{1t} - \sigma \Delta w_1) - \sigma(\partial_x^2 + \partial_y^2)(R_T \theta_1 - R_S \xi_1) &= 0, \\
\theta_{1t} - w_1 - \Delta \theta_1 &= 0, \\
\xi_{1t} - w_1 - \tau \Delta \xi_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Решения этой линейной системы будем искать в виде нормальных мод:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \bar{w}_1(X_1, Y_1, T_1, T_2) e^{\lambda t} f(x, y) \phi(z), \\
\theta_1 &= \bar{\theta}_1(X_1, Y_1, T_1, T_2) e^{\lambda t} f(x, y) \phi(z) + \hat{\theta}_1(X_1, Y_1, T_1, T_2), \\
\xi_1 &= \bar{\xi}_1(X_1, Y_1, T_1, T_2) e^{\lambda t} f(x, y) \phi(z) + \hat{\xi}_1(X_1, Y_1, T_1, T_2).
\end{aligned}$$

Под $f(x, y)$ подразумевается некое пространственно-периодическое решение двумерного уравнения Гельмгольца $(\partial_x^2 + \partial_y^2)f + k^2 f = 0$ которое называется планформой. В качестве отправной точки будем использовать решения для квадратных конвективных ячеек, для которых

справедливо $f(x, y) = \cos kx + \cos ky$. Выделим каждую из мод своей амплитудной переменной, а также положим $\phi(z) = \sin \pi z$, так что в итоге имеем $w_1 = (A e^{ikx} + B e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \text{с.с.}$. Выразим аналогичным образом и все остальные зависимые переменные для конвективных ячеек квадратного типа:

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_{1a} e^{ikx} e^{\lambda t} \cos \pi z + \hat{u}_1 + \text{с.с.}, \\ v_1 &= \bar{v}_{1b} e^{iky} e^{\lambda t} \cos \pi z + \hat{v}_1 + \text{с.с.}, \\ w_1 &= (A e^{ikx} + B e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \text{с.с.}, \\ \theta_1 &= (\bar{\theta}_{1a} e^{ikx} + \bar{\theta}_{1b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \hat{\theta}_1 + \text{с.с.}, \\ \xi_1 &= (\bar{\xi}_{1a} e^{ikx} + \bar{\xi}_{1b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \hat{\xi}_1 + \text{с.с.}, \\ p_1 &= (\bar{p}_{1a} e^{ikx} + \bar{p}_{1b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \hat{p}_1 + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь члены со шляпками означают средние величины, зависящие только от медленных переменных. Подстановка приведенных выражений в уравнения дает следующие соотношения для средних амплитуд:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{1j} &= \frac{1}{\lambda + \chi^2} \bar{w}_{1j}, \quad \bar{\xi}_{1j} = \frac{1}{\lambda + \tau \chi^2} \bar{w}_{1j}, \quad A \equiv \bar{w}_{1a}, \quad B \equiv \bar{w}_{1b}, \\ \bar{p}_{1j} &= -\frac{\sigma \pi}{\chi^2} \left(\frac{R_T}{\lambda + \chi^2} - \frac{R_S}{\lambda + \tau \chi^2} \right) \bar{w}_{1j} = -\frac{\pi}{k^2} (\lambda + \sigma \chi^2) \bar{w}_{1j}, \\ \bar{u}_{1a} &= -\frac{ik}{\lambda + \sigma \chi^2} \bar{p}_{1a} = -\frac{\pi}{ik} \bar{w}_{1a}, \quad \bar{v}_{1b} = -\frac{ik}{\lambda + \sigma \chi^2} \bar{p}_{1b} = -\frac{\pi}{ik} \bar{w}_{1b}. \end{aligned}$$

Здесь введено полное волновое число $\chi^2 = k^2 + \pi^2$.

Из приведенных выше выражений непосредственно следует формула для дисперсионного соотношения, связывающая инкремент, частоту волн, волновые числа и управляющие параметры:

$$(\lambda + \sigma \chi^2)(\lambda + \chi^2)(\lambda + \tau \chi^2) + \sigma(k^2/\chi^2)[R_S(\lambda + \chi^2) - R_T(\lambda + \tau \chi^2)] = 0.$$

Это алгебраическое уравнение третьего порядка по λ . Оно имеет три корня, два из которых могут быть комплексно-сопряженными. В последнем случае, когда при некоторой величине R_T^* комплексно-сопряженные корни приобретают положительную действительную часть, происходит бифуркация Хопфа. Для R_T^* и частоты волн конвекции имеют место следующие соотношения:

$$R_T^* = \frac{\sigma + \tau}{1 + \sigma} R_S^* + \frac{\chi^6}{\sigma k^2} (1 + \tau)(\tau + \sigma), \quad \omega^2 = \frac{1 - \tau}{1 + \sigma} \sigma R_S^* \frac{k^2}{\chi^2} - \tau^2 \chi^4.$$

Здесь и далее звездочки означают критические значения соответствующих чисел Релея. При сравнительно малых величинах R_S , когда формула для ω становится некорректной, в системе при некотором R_T происходит бифуркация Тейлора, когда один действительный корень дисперсионного соотношения становится положительным. Однако в данной работе этот случай мы не рассматриваем.

2.3. Члены порядка ε^2

При $O(\varepsilon^2)$ получается следующая система:

$$\begin{aligned} u_{2t} + p_{2x} - \sigma \Delta u_2 &= -[u_{1T_1} + (u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y} + w_1 u_{1z}) + p_{1X_1} - 2\sigma(u_{1xX_1} + u_{1yY_1})], \\ v_{2t} + p_{2y} - \sigma \Delta v_2 &= -[v_{1T_1} + (u_1 v_{1x} + v_1 v_{1y} + w_1 v_{1z}) + p_{1Y_1} - 2\sigma(v_{1xX_1} + v_{1yY_1})], \\ w_{2t} + p_{2z} - \sigma \Delta w_2 - \sigma R_T \theta_2 + \sigma R_S \xi_2 &= \\ &= -[w_{1T_1} + (u_1 w_{1x} + v_1 w_{1y} + w_1 w_{1z}) - 2\sigma(w_{1xX_1} + w_{1yY_1})], \\ \theta_{2t} - w_2 - \Delta \theta_2 &= -[\theta_{1T_1} + (u_1 \theta_{1x} + v_1 \theta_{1y} + w_1 \theta_{1z}) - 2(\theta_{1xX_1} + \theta_{1yY_1})], \\ \xi_{2t} - w_2 - \tau \Delta \xi_2 &= -[\xi_{1T_1} + (u_1 \xi_{1x} + v_1 \xi_{1y} + w_1 \xi_{1z}) - 2\tau(\xi_{1xX_1} + \xi_{1yY_1})], \\ u_{2x} + v_{2y} + w_{2z} &= -(u_{1X_1} + v_{1Y_1}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Правые части этих уравнений далее будем обозначать через Q_i по порядку уравнений. Эти правые части для удобства вычислений представим в виде следующих сумм: $Q_i = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} + Q_i^{(3)} + Q_i^{(4)}$, где цифра 1 означает резонансные члены, получающиеся из линейных частей Q_i , цифра 2 — резонансные члены из нелинейных частей, цифра 3 — константы, зависящие только от медленных переменных, цифра 4 — нерезонансные члены, которые во всех последующих вычислениях не учитываются.

Решение системы (2.5) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_2 &= (\bar{u}_{2a} e^{ikx} + \bar{u}_{2b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \tilde{u}_2 + \hat{u}_2 + \text{с.с.}, \\ v_2 &= (\bar{v}_{2a} e^{ikx} + \bar{v}_{2b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \tilde{v}_2 + \hat{v}_2 + \text{с.с.}, \\ w_2 &= (\bar{w}_{2a} e^{ikx} + \bar{w}_{2b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \tilde{w}_2 + \hat{w}_2 + \text{с.с.}, \\ \theta_2 &= (\bar{\theta}_{2a} e^{ikx} + \bar{\theta}_{2b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \tilde{\theta}_2 + \hat{\theta}_2 + \text{с.с.}, \\ \xi_2 &= (\bar{\xi}_{2a} e^{ikx} + \bar{\xi}_{2b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \tilde{\xi}_2 + \hat{\xi}_2 + \text{с.с.}, \\ p_2 &= (\bar{p}_{2a} e^{ikx} + \bar{p}_{2b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \tilde{p}_2 + \hat{p}_2 + \text{с.с.} \end{aligned} \tag{2.6}$$

По сравнению с (2.4) здесь появились члены с тильдами, которые необходимы для того, чтобы уравновесить нелинейные по амплитудам мод нерезонансные члены в правых частях уравнений (2.5). В результате подстановки получается, что переменные связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{2a} &= \frac{1}{\lambda + \sigma \varkappa^2} (Q_{1a} - ik\bar{p}_{2a}), & \bar{u}_{2b} &= \frac{1}{\lambda + \sigma \varkappa^2} Q_{1b}, \\ \bar{v}_{2a} &= \frac{1}{\lambda + \sigma \varkappa^2} Q_{2a}, & \bar{v}_{2b} &= \frac{1}{\lambda + \sigma \varkappa^2} (Q_{2b} - ik\bar{p}_{2b}), \\ \bar{p}_{2j} &= -\frac{\pi}{k^2} (\lambda + \sigma \varkappa^2) \bar{w}_{2j} + \frac{1}{k^2} (\lambda + \sigma \varkappa^2) Q_{6j} - \frac{ik}{k^2} (Q_{1j} + Q_{2j}), \\ \bar{\theta}_{2j} &= \frac{1}{\lambda + \varkappa^2} (\bar{w}_{2j} + Q_{4j}), & \bar{\xi}_{2j} &= \frac{1}{\lambda + \tau \varkappa^2} (\bar{w}_{2j} + Q_{5j}), \\ \bar{u}_{2a} &= -\frac{\pi}{ik} \bar{w}_{2a} + \frac{1}{ik} Q_{6a} - \frac{1}{\lambda + \sigma \varkappa^2} Q_{2a}, & \bar{v}_{2b} &= -\frac{\pi}{ik} \bar{w}_{2b} + \frac{1}{ik} Q_{6b} - \frac{1}{\lambda + \sigma \varkappa^2} Q_{1b}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В этих формулах были введены функции Q_{ia}, Q_{ib} , которые определяются из формулы $Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} = (Q_{ia} e^{ikx} + Q_{ib} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z$ при условии, что $i = 1, 2, 6$, в остальных случаях в этой формуле косинус меняется на синус. Далее будет также использоваться обозначение Q_{ij} , где индекс j относится к моде и может принимать одно из двух значений: a либо b .

Подобно тому как мы это делали в случае системы при ε^1 , подействуем на первые три уравнения (2.5) оператором $\vec{z} \cdot \text{rot rot}$ и, учтя последнее уравнение данной системы, получим систему из трех уравнений относительно трех зависимых переменных w, θ, ξ :

$$\begin{aligned} \Delta(w_{2t} - \sigma \Delta w_2) - \sigma(\partial_x^2 + \partial_y^2)(R_T \theta_2 - R_S \xi_2) &= Q_7, \\ \theta_{2t} - w_2 - \Delta \theta_2 &= Q_4, \\ \xi_{2t} - w_2 - \tau \Delta \xi_2 &= Q_5. \end{aligned}$$

С учетом конкретного вида подстановки (2.6) для решений этой системы уравнений функции Q_{ij} должны удовлетворять следующему условию разрешимости:

$$(\lambda + \varkappa^2)(\lambda + \tau \varkappa^2) Q_{7j} + \sigma k^2 R_S (\lambda + \varkappa^2) Q_{5j} - \sigma k^2 R_T (\lambda + \tau \varkappa^2) Q_{4j} = 0, \tag{2.8}$$

где через Q_{7j} обозначены соответствующие компоненты функции Q_7 , которая определяется по формуле: $Q_7 = \Delta Q_3 - (Q_{1x} + Q_{2y} + Q_{3z})_z + (\partial_t - \sigma \Delta) Q_{6z}$. По существу, условие разрешимости (2.8) — есть условие совместности алгебраической системы, которая получается из системы

уравнений (2.5) при подстановке в нее решений (2.6) с учетом структуры функций Q_i в правой части этой системы.

Далее положим $\lambda = i\omega$, что означает то, что мы конкретизировали тип бифуркации, происходящей в нашей системе, выбрав прямую, на которой происходит бифуркация Хопфа. В этом случае условие разрешимости (2.8) можно записать, используя явные выражения для чисел Релея в точках бифуркации Хопфа, а именно:

$$\begin{aligned} R_T^* &= \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \frac{\varkappa^2}{\sigma k^2} (\omega^2 + \varkappa^4), & R_S^* &= \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \frac{\varkappa^2}{\sigma k^2} (\omega^2 + \tau^2 \varkappa^4), \\ Q_{7j} - \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \varkappa^2 (i\omega - \tau \varkappa^2) Q_{5j} + \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \varkappa^2 (i\omega - \varkappa^2) Q_{4j} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В исходных уравнениях (2.5) присутствуют два типа секулярных членов в правых частях. Первый тип — это константы интегрирования в решениях системы уравнений при $O(\varepsilon^1)$, зависящие только от медленных переменных. Соотношения для констант интегрирования получим из условия регулярного характера решений системы уравнений при членах первого и второго порядка. При этом для констант по температуре и солёности получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} -R_T \hat{\theta}_1 + R_S \hat{\xi}_1 &= 0, & \hat{\xi}_1 &= (R_T/R_S) \hat{\theta}_1 = (1 - N^2) \hat{\theta}_1, \\ \hat{w}_2 &= -\hat{\theta}_{1T_1} = -\hat{\xi}_{1T_1} = -(1 - N^2) \hat{\theta}_{1T_1}, \\ \hat{\theta}_{1T_1} &= 0, & \hat{\xi}_{1T_1} &= 0, & \hat{w}_2 &= 0, \end{aligned}$$

где N^2 — квадрат частоты плавучести. Иначе говоря, фоновая вертикальная скорость в исследуемой физической системе может быть только нулевой, но при этом допускаются фоновые поля температуры и солёности, зависящие от медленных горизонтальных переменных и медленного времени T_2 , а именно $\hat{\theta}_1(X_1, Y_1, T_2)$ и $\hat{\xi}_1(X_1, Y_1, T_2)$, пропорциональные друг другу. Далее в настоящей статье будем полагать их равными нулю, что следует из более подробных последующих вычислений. Для фоновых полей давления и горизонтальной скорости из условий разрешимости справедливо:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1X_1} + \hat{v}_{1Y_1} &= 0, & \hat{u}_1 &= \Omega_{Y_1}, & \hat{v}_1 &= -\Omega_{X_1}, \\ \Omega_{Y_1 T_1} + \hat{p}_{1X_1} &= 0, & -\Omega_{X_1 T_1} + \hat{p}_{1Y_1} &= 0, \\ (\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2) \Omega_{T_1} &= 0, & (\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2) \hat{p}_1 &= 0, \\ \Delta_{\perp} \Omega_{T_1} &= 0, & \Delta_{\perp} \hat{p}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначение $\Delta_{\perp} = \partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2$ для горизонтального лапласиана по медленным пространственным переменным, которым будем далее иногда пользоваться. Получается, что фоновое поле давления удовлетворяет уравнению Лапласа с введенным поперечным лапласианом. Также удовлетворяет уравнению Лапласа поле горизонтального вихря Ω , продифференцированное по медленному времени T_1 .

Найдем теперь последовательно конкретные выражения для функций Q_{ij} . Выполнив некоторые вычисления, получим выражения для функций Q_{ia} :

$$\begin{aligned} Q_{7a} &= \varkappa^2 (A_{T_1} - 2ik\sigma(A_{X_1} + A_{Y_1})) + ik\varkappa^2 A \Omega_{Y_1} + 2ik \frac{\pi^2}{k^2} (\lambda + \sigma \varkappa^2) A_{X_1}, \\ Q_{4a} &= -\frac{1}{\lambda + \varkappa^2} [(A_{T_1} - 2ik(A_{X_1} + A_{Y_1})) + ikA \Omega_{Y_1}], \\ Q_{5a} &= -\frac{1}{\lambda + \tau \varkappa^2} [(A_{T_1} - 2ik\tau(A_{X_1} + A_{Y_1})) + ikA \Omega_{Y_1}]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для функций Q_{ib} аналогично получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} Q_{7b} &= \varkappa^2 (B_{T_1} - 2ik\sigma(B_{X_1} + B_{Y_1})) - ik\varkappa^2 B \Omega_{X_1} + 2ik \frac{\pi^2}{k^2} (\lambda + \sigma \varkappa^2) B_{Y_1}, \\ Q_{4b} &= -\frac{1}{\lambda + \varkappa^2} [(B_{T_1} - 2ik(B_{X_1} + B_{Y_1})) - ikB \Omega_{X_1}], \\ Q_{5b} &= -\frac{1}{\lambda + \tau \varkappa^2} [(B_{T_1} - 2ik\tau(B_{X_1} + B_{Y_1})) - ikB \Omega_{X_1}]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подстановка (2.10) и (2.11) в условие разрешимости (2.9) приводит к двум амплитудным уравнениям для амплитуд A и B :

$$\begin{aligned} A_{T_1} - \frac{k\omega}{\varkappa^2} \left[2 + \left(\frac{\pi^2}{k^2} - 2 \right) \left(1 - \frac{\varkappa^4}{\omega^2} b_4 \right) \right] A_{X_1} - \frac{2k\varkappa^2}{\omega} b_4 A_{Y_1} + ikA\Omega_{Y_1} &= 0, \\ B_{T_1} - \frac{k\omega}{\varkappa^2} \left[2 + \left(\frac{\pi^2}{k^2} - 2 \right) \left(1 - \frac{\varkappa^4}{\omega^2} b_4 \right) \right] B_{Y_1} - \frac{2k\varkappa^2}{\omega} b_4 B_{X_1} - ikB\Omega_{X_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этих уравнениях введено обозначение для константы, зависящей от параметров задачи:

$$b_4 = \frac{(\tau + \sigma + \tau\sigma)i\omega + \tau\sigma\varkappa^2}{i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2}.$$

Следует отметить, что в полученных уравнениях мы не фиксировали величину волнового числа k из тех соображений, что для больших чисел Релея анализ линейной устойчивости волн конвекции дает максимальный инкремент роста волн при $k \approx 10^2$, согласно работе [14]. В то же время, при не слишком больших числах Релея быстрее всего растут моды с $k = \pi/\sqrt{2}$. Если подставить в уравнения (2.12) именно это значение k , то вторые члены в квадратных скобках тождественно обратятся в нуль. Для случая одной моды и одной пространственной переменной без учета горизонтального вихря (2.12) принимают особенно простой вид $A_{T_1} - (2k\omega/\varkappa^2)A_{X_1} = 0$, что хорошо согласуется с результатами предыдущих работ [3]. В дальнейшем уравнения (2.12) будем записывать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} A_{T_1} &= 2k\alpha_0 A_{X_1} + 2k\alpha_1 A_{Y_1} - ikA\Omega_{Y_1}, \\ B_{T_1} &= 2k\alpha_0 B_{Y_1} + 2k\alpha_1 B_{X_1} + ikB\Omega_{X_1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь введены коэффициенты:

$$\alpha_0 = \frac{\omega}{\varkappa^2} \left[1 + \left(\frac{\pi^2}{2k^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\varkappa^4}{\omega^2} b_4 \right) \right], \quad \alpha_1 = \frac{\varkappa^2}{\omega} b_4. \quad (2.14)$$

Далее вычислим нелинейные члены, входящие в уравнения при ε^2 . Опустим громоздкие и малоинтересные детали вычислений. В итоге члены с тильдами, входящие в подстановку (2.6) для решения системы (2.5), принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= u_{2A}AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} \cos 2\pi z + u_{2B}AB^* e^{i(kx-ky)} \cos 2\pi z + \text{с.с.}, \\ \tilde{v}_2 &= v_{2A}AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} \cos 2\pi z + v_{2B}AB^* e^{i(kx-ky)} \cos 2\pi z + \text{с.с.}, \\ \tilde{w}_2 &= w_{2A}AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} \sin 2\pi z + w_{2B}AB^* e^{i(kx-ky)} \sin 2\pi z + \text{с.с.}, \\ \tilde{\theta}_2 &= \theta_{2C}(|A|^2 + |B|^2) \sin 2\pi z + \\ &\quad + \theta_{2A}AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} \sin 2\pi z + \theta_{2B}AB^* e^{i(kx-ky)} \sin 2\pi z + \text{с.с.}, \\ \tilde{\xi}_2 &= \xi_{2C}(|A|^2 + |B|^2) \sin 2\pi z + \\ &\quad + \xi_{2A}AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} \sin 2\pi z + \xi_{2B}AB^* e^{i(kx-ky)} \sin 2\pi z + \text{с.с.}, \\ \tilde{p}_2 &= p_{2C}(|A|^2 + |B|^2) \cos 2\pi z + \\ &\quad + p_{2A}AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} \cos 2\pi z + p_{2B}AB^* e^{i(kx-ky)} \cos 2\pi z + \\ &\quad + p_{2D}(A^2 e^{i2(\omega t+kx)} + B^2 e^{i2(\omega t+ky)} + AB e^{i(2\omega t+kx+ky)} + AB^* e^{i(kx-ky)}) + \text{с.с.}, \end{aligned}$$

И выражения для констант в этих формулах будут следующими:

$$\theta_{2C} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varkappa^2}{\varkappa^4 + \omega^2}, \quad \xi_{2C} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varkappa^2}{\tau^2 \varkappa^4 + \omega^2}, \quad p_{2C} = \left(1 - \frac{\varkappa^4}{4\pi^2 k^2} \right), \quad p_{2D} = \frac{\pi^2}{2k^2},$$

$$\begin{aligned}
w_{2A} &= \pi \varkappa^2 \{3\omega^2 - 3i\omega(1 + \tau + \sigma)(\varkappa^2 + \pi^2) + [i\omega\sigma - \tau(\varkappa^2 + \pi^2)](\varkappa^2 + 2\pi^2)\} \times \\
&\quad \times \{[(\varkappa^2 + \pi^2)^3 - \varkappa^6][i\omega(\tau + \sigma + \tau\sigma) - \tau\sigma(\varkappa^2 + \pi^2)] - \\
&\quad - (3\varkappa^2 + 4\pi^2)\omega^2[i\omega^2 + (1 + \tau + \sigma)(\varkappa^2 + \pi^2)]\}^{-1}, \\
v_{2A} &= u_{2A}, \quad u_{2A} = -\frac{\pi}{ik}w_{2A}, \quad p_{2A} = -\frac{\pi^2}{2k^2} - \frac{2\pi}{k^2}[i\omega + \sigma(\varkappa^2 + \pi^2)]w_{2A}, \\
\theta_{2A} &= \frac{1}{2[i\omega + (\varkappa^2 + \pi^2)]} \left(w_{2A} - \frac{\pi}{\varkappa^2 + i\omega} \right), \\
\xi_{2A} &= \frac{1}{2[i\omega + \tau(\varkappa^2 + \pi^2)]} \left(w_{2A} - \frac{\pi}{\tau\varkappa^2 + i\omega} \right), \\
w_{2B} &= -\frac{\pi\varkappa^2}{\sigma} \left(1 + \frac{\pi^2}{\varkappa^2 + \pi^2} \right) \cdot \left[4(\varkappa^2 + \pi^2)^2 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \pi^2} \left(\varkappa^4 - \frac{1 + \tau + \sigma}{\tau\sigma} \omega^2 \right) \right]^{-1}, \\
v_{2B} &= -u_{2B}, \quad u_{2B} = -\frac{\pi}{ik}w_{2B}, \quad p_{2B} = -\frac{\pi^2}{2k^2} - \frac{2\pi}{k^2}(\varkappa^2 + \pi^2)\sigma w_{2B}, \\
\theta_{2B} &= \frac{1}{2(\varkappa^2 + \pi^2)} \left(w_{2B} - \frac{\pi\varkappa^2}{\varkappa^4 + \omega^2} \right), \quad \xi_{2B} = \frac{1}{2\tau(\varkappa^2 + \pi^2)} \left(w_{2B} - \frac{\tau\pi\varkappa^2}{\tau^2\varkappa^4 + \omega^2} \right).
\end{aligned}$$

2.4. Члены порядка ε^3

При $O(\varepsilon^3)$ получается следующая система:

$$\begin{aligned}
u_{3t} + p_{3x} - \sigma\Delta u_3 &= [\sigma(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)u_1 - u_{1T_2}] - [u_{2T_1} + p_{2X_1} - 2\sigma(u_{2xX_1} + u_{2yY_1})] - \\
&\quad - (u_1u_{1X_1} + v_1u_{1Y_1}) - (u_1u_{2x} + v_1u_{2y} + w_1u_{2z}) - (u_2u_{1x} + v_2u_{1y} + w_2u_{1z}), \\
v_{3t} + p_{3y} - \sigma\Delta v_3 &= [\sigma(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)v_1 - v_{1T_2}] - [v_{2T_1} + p_{2Y_1} - 2\sigma(v_{2xX_1} + v_{2yY_1})] - \\
&\quad - (u_1v_{1X_1} + v_1v_{1Y_1}) - (u_1v_{2x} + v_1v_{2y} + w_1v_{2z}) - (u_2v_{1x} + v_2v_{1y} + w_2v_{1z}), \\
w_{3t} + p_{3z} - \sigma\Delta w_3 - \sigma R_T\theta_3 + \sigma R_S\xi_3 &= \\
&\quad [\sigma(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)w_1 - w_{1T_2} + \sigma r_T\theta_1 - \sigma r_S\xi_1] - [w_{2T_1} - 2\sigma(w_{2xX_1} + w_{2yY_1})] - \\
&\quad - (u_1w_{1X_1} + v_1w_{1Y_1}) - (u_1w_{2x} + v_1w_{2y} + w_1w_{2z}) - (u_2w_{1x} + v_2w_{1y} + w_2w_{1z}), \\
\theta_{3t} - w_3 - \Delta\theta_3 &= [(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)\theta_1 - \theta_{1T_2}] - [\theta_{2T_1} - 2(\theta_{2xX_1} + \theta_{2yY_1})] - \\
&\quad - (u_1\theta_{1X_1} + v_1\theta_{1Y_1}) - (u_1\theta_{2x} + v_1\theta_{2y} + w_1\theta_{2z}) - (u_2\theta_{1x} + v_2\theta_{1y} + w_2\theta_{1z}), \\
\xi_{3t} - w_3 - \tau\Delta\xi_3 &= [\tau(\partial_{X_1}^2 + \partial_{Y_1}^2)\xi_1 - \xi_{1T_2}] - [\xi_{2T_1} - 2\tau(\xi_{2xX_1} + \xi_{2yY_1})] - \\
&\quad - (u_1\xi_{1X_1} + v_1\xi_{1Y_1}) - (u_1\xi_{2x} + v_1\xi_{2y} + w_1\xi_{2z}) - (u_2\xi_{1x} + v_2\xi_{1y} + w_2\xi_{1z}), \\
u_{3x} + v_{3y} + w_{3z} &= -(u_{2X_1} + v_{2Y_1}).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Решение этой системы, как и ранее в аналогичных ситуациях, будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_3 &= (\bar{u}_{3a} e^{ikx} + \bar{u}_{3b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \tilde{u}_3 + \hat{u}_3 + \text{с.с.}, \\
v_3 &= (\bar{v}_{3a} e^{ikx} + \bar{v}_{3b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \tilde{v}_3 + \hat{v}_3 + \text{с.с.}, \\
w_3 &= (\bar{w}_{3a} e^{ikx} + \bar{w}_{3b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \tilde{w}_3 + \hat{w}_3 + \text{с.с.}, \\
\theta_3 &= (\bar{\theta}_{3a} e^{ikx} + \bar{\theta}_{3b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \tilde{\theta}_3 + \hat{\theta}_3 + \text{с.с.}, \\
\xi_3 &= (\bar{\xi}_{3a} e^{ikx} + \bar{\xi}_{3b} e^{iky}) e^{\lambda t} \sin \pi z + \tilde{\xi}_3 + \hat{\xi}_3 + \text{с.с.}, \\
p_3 &= (\bar{p}_{3a} e^{ikx} + \bar{p}_{3b} e^{iky}) e^{\lambda t} \cos \pi z + \tilde{p}_3 + \hat{p}_3 + \text{с.с.}
\end{aligned}$$

Будем представлять правые части уравнений, как и в предыдущем случае, в виде следующих сумм: $Q_i = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} + Q_i^{(3)} + Q_i^{(4)}$, где нас теперь будут интересовать выражения для первых двух членов, обозначающих резонансные члены, получающиеся из линейных и нелинейных членов правых частей системы (2.15). Для нахождения искомых функций Q_{ia} и Q_{ib}

выпишем подробные выражения для амплитуд (2.7) решений (2.6) уравнений (2.5) при $O(\varepsilon^2)$, полученных на предыдущем этапе:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{2a} &= -\frac{\pi}{ik}\bar{w}_{2a} - \frac{\pi}{k^2}(A_{X_1} + A_{Y_1}), & \bar{u}_{2b} &= \frac{\pi}{k^2}B_{X_1}, \\ \bar{v}_{2a} &= \frac{\pi}{k^2}A_{Y_1}, & \bar{v}_{2b} &= -\frac{\pi}{ik}\bar{w}_{2b} - \frac{\pi}{k^2}(B_{X_1} + B_{Y_1}), \\ \bar{p}_{2a} &= -\frac{\pi}{k^2}(i\omega + \sigma\chi^2)\bar{w}_{2a} - \\ & \frac{ik\pi}{k^4}\{(i\omega + \sigma\chi^2)A_{X_1} - ikA_{T_1} + [i\omega + \sigma(\chi^2 - 2k^2)](A_{X_1} + A_{Y_1}) + k^2A\Omega_{Y_1}\}, \\ \bar{p}_{2b} &= -\frac{\pi}{k^2}(i\omega + \sigma\chi^2)\bar{w}_{2b} - \\ & \frac{ik\pi}{k^4}\{(i\omega + \sigma\chi^2)B_{Y_1} - ikB_{T_1} + [i\omega + \sigma(\chi^2 - 2k^2)](B_{X_1} + B_{Y_1}) - k^2B\Omega_{X_1}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{2a} &= \frac{1}{i\omega + \chi^2} \left\{ \bar{w}_{2a} - \frac{1}{i\omega + \chi^2} [A_{T_1} - 2ik(A_{X_1} + A_{Y_1}) + ikA\Omega_{Y_1}] \right\}, \\ \bar{\theta}_{2b} &= \frac{1}{i\omega + \chi^2} \left\{ \bar{w}_{2b} - \frac{1}{i\omega + \chi^2} [B_{T_1} - 2ik(B_{X_1} + B_{Y_1}) - ikB\Omega_{X_1}] \right\}, \\ \bar{\xi}_{2a} &= \frac{1}{i\omega + \tau\chi^2} \left\{ \bar{w}_{2a} - \frac{1}{i\omega + \tau\chi^2} [A_{T_1} - 2ik\tau(A_{X_1} + A_{Y_1}) + ikA\Omega_{Y_1}] \right\}, \\ \bar{\xi}_{2b} &= \frac{1}{i\omega + \tau\chi^2} \left\{ \bar{w}_{2b} - \frac{1}{i\omega + \tau\chi^2} [B_{T_1} - 2ik\tau(B_{X_1} + B_{Y_1}) - ikB\Omega_{X_1}] \right\}.\end{aligned}$$

Выпишем еще раз условие разрешимости (2.9), из которого будем исходить при выводе амплитудных уравнений, возникающих из системы (2.15) при ε^3 :

$$Q_{7j} - \frac{\sigma + 1}{1 - \tau}\chi^2(i\omega - \tau\chi^2)Q_{5j} + \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau}\chi^2(i\omega - \chi^2)Q_{4j} = 0. \quad (2.16)$$

Первое из амплитудных уравнений получим, подставив в приведенное соотношение следующие, предварительно вычисленные выражения, для функций Q_{ia} :

$$\begin{aligned}Q_{7a} &= \chi^2(A_{T_2} - \sigma\Delta_{\perp}A) - \sigma k^2 \left(\frac{r_T}{i\omega + \chi^2} - \frac{r_S}{i\omega + \tau\chi^2} \right) A - \frac{\pi\chi^2}{2}(w_{2A} + w_{2B})A|B|^2 + \\ & + \chi^2(\Omega_{Y_1}A_{X_1} - \Omega_{X_1}A_{Y_1}) - 2\pi^2\Omega_{Y_1}A_{X_1} - \pi^2\Omega_{Y_1}A_{Y_1} + \frac{ik\pi^2}{k^2}(2A_{X_1T_1} + A_{Y_1T_1}) - \\ & - \frac{2\pi^2}{k^2}[i\omega + \sigma(\chi^2 - 2k^2)](A_{X_1X_1} + A_{X_1Y_1}) + \frac{\pi^2}{k^2}(i\omega + \sigma\chi^2)(A_{Y_1Y_1} - A_{X_1X_1}), \\ Q_{4a} &= \frac{1}{i\omega + \chi^2}(\Delta_{\perp}A - A_{T_2}) - \frac{1}{(i\omega + \chi^2)^2}[2ik(2A_{T_1X_1} + A_{T_1Y_1}) + \\ & + 4^2k^2(A_{X_1X_1} + A_{X_1Y_1}) - A_{T_1T_1} - 2k^2(A\Omega_{Y_1})_{X_1} - ik(A\Omega_{Y_1})_{T_1}] - \\ & - \frac{1}{i\omega + \chi^2}(\Omega_{Y_1}A_{X_1} - \Omega_{X_1}A_{Y_1}) + \frac{ik\Omega_{Y_1}}{(i\omega + \chi^2)^2}[A_{T_1} - 2ik(A_{X_1} + A_{Y_1}) + ikA\Omega_{Y_1}] + \\ & + \frac{\pi}{2}[(\theta_{2A} + \theta_{2B})A|B|^2 + 2\theta_{2C}A(|A|^2 + |B|^2)], \\ Q_{5a} &= \frac{1}{i\omega + \tau\chi^2}(\tau\Delta_{\perp}A - A_{T_2}) - \frac{1}{(i\omega + \tau\chi^2)^2}[2\tau ik(2A_{T_1X_1} + A_{T_1Y_1}) + \\ & + 4\tau^2k^2(A_{X_1X_1} + A_{X_1Y_1}) - A_{T_1T_1} - 2\tau k^2(A\Omega_{Y_1})_{X_1} - ik(A\Omega_{Y_1})_{T_1}] - \\ & - \frac{1}{i\omega + \tau\chi^2}(\Omega_{Y_1}A_{X_1} - \Omega_{X_1}A_{Y_1}) + \frac{ik\Omega_{Y_1}}{(i\omega + \tau\chi^2)^2}[A_{T_1} - 2ik\tau(A_{X_1} + A_{Y_1}) + ikA\Omega_{Y_1}] + \\ & + \frac{\pi}{2}[(\xi_{2A} + \xi_{2B})A|B|^2 + 2\xi_{2C}A(|A|^2 + |B|^2)].\end{aligned}$$

Второе амплитудное уравнение получим, подставив в условие разрешимости (2.16) следующие выражения для функций Q_{ib} :

$$\begin{aligned}
Q_{7b} &= \varkappa^2(B_{T_2} - \sigma\Delta_{\perp}B) - \sigma k^2 \left(\frac{r_T}{i\omega + \varkappa^2} - \frac{r_S}{i\omega + \tau\varkappa^2} \right) B - \frac{\pi\varkappa^2}{2}(w_{2A} + 3w_{2B}^*)B|A|^2 + \\
&+ \varkappa^2(\Omega_{Y_1}B_{X_1} - \Omega_{X_1}B_{Y_1}) + 2\pi^2\Omega_{X_1}B_{Y_1} + \pi^2\Omega_{X_1}B_{X_1} + \frac{ik\pi^2}{k^2}(B_{X_1T_1} + 2B_{Y_1T_1}) - \\
&- \frac{2\pi^2}{k^2}[i\omega + \sigma(\varkappa^2 - 2k^2)](B_{X_1Y_1} + B_{Y_1Y_1}) + \frac{\pi^2}{k^2}(i\omega + \sigma\varkappa^2)(B_{X_1X_1} - B_{Y_1Y_1}), \\
Q_{4b} &= \frac{1}{i\omega + \varkappa^2}(\Delta_{\perp}B - B_{T_2}) - \frac{1}{(i\omega + \varkappa^2)^2}[2ik(2B_{T_1Y_1} + B_{T_1X_1}) + \\
&+ 4k^2(B_{X_1Y_1} + B_{Y_1Y_1}) - B_{T_1T_1} + 2k^2(B\Omega_{X_1})_{Y_1} + ik(B\Omega_{X_1})_{T_1}] - \\
&- \frac{1}{i\omega + \varkappa^2}(\Omega_{Y_1}B_{X_1} - \Omega_{X_1}B_{Y_1}) - \frac{ik\Omega_{X_1}}{(i\omega + \varkappa^2)^2}[B_{T_1} - 2ik(B_{X_1} + B_{Y_1}) - ikB\Omega_{X_1}] + \\
&+ \frac{\pi}{2}[(\theta_{2A} + 3\theta_{2B}^*)B|A|^2 + 2\theta_{2C}B(|A|^2 + |B|^2)], \\
Q_{5b} &= \frac{1}{i\omega + \tau\varkappa^2}(\tau\Delta_{\perp}B - B_{T_2}) - \frac{1}{(i\omega + \tau\varkappa^2)^2}[2\tau ik(2B_{T_1Y_1} + B_{T_1X_1}) + \\
&+ 4\tau^2 k^2(B_{X_1Y_1} + B_{Y_1Y_1}) - B_{T_1T_1} + 2\tau k^2(B\Omega_{X_1})_{Y_1} + ik(B\Omega_{X_1})_{T_1}] - \\
&- \frac{1}{i\omega + \tau\varkappa^2}(\Omega_{Y_1}B_{X_1} - \Omega_{X_1}B_{Y_1}) - \frac{ik\Omega_{X_1}}{(i\omega + \tau\varkappa^2)^2}[B_{T_1} - 2ik\tau(B_{X_1} + B_{Y_1}) - ikB\Omega_{X_1}] + \\
&+ \frac{\pi}{2}[(\xi_{2A} + 3\xi_{2B}^*)B|A|^2 + 2\xi_{2C}B(|A|^2 + |B|^2)].
\end{aligned}$$

При выводе амплитудных уравнений будем использовать выражения для констант, зависящих от параметров задачи:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \varkappa^2 + \varkappa^2 \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \tau\varkappa^2}{i\omega + \tau\varkappa^2} - \varkappa^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \varkappa^2}{i\omega + \varkappa^2} = \frac{2i\omega\varkappa^2[i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2]}{(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)}, \\
b_1 &= \sigma\varkappa^2 + \tau\varkappa^2 \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \tau\varkappa^2}{i\omega + \tau\varkappa^2} - \varkappa^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \varkappa^2}{i\omega + \varkappa^2} = \frac{2\varkappa^4[(\tau + \sigma + \tau\sigma)i\omega + \tau\sigma\varkappa^2]}{(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)}, \\
b_5 &= \varkappa^2 \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \tau\varkappa^2}{(i\omega + \tau\varkappa^2)^2} - \varkappa^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \varkappa^2}{(i\omega + \varkappa^2)^2} \quad b_2 = \frac{\pi^2}{k^2}(i\omega + \sigma\varkappa^2), \\
b_6 &= \tau\varkappa^2 \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \tau\varkappa^2}{(i\omega + \tau\varkappa^2)^2} - \varkappa^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \varkappa^2}{(i\omega + \varkappa^2)^2}, \\
b_7 &= \tau^2\varkappa^2 \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \tau\varkappa^2}{(i\omega + \tau\varkappa^2)^2} - \varkappa^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} \cdot \frac{i\omega - \varkappa^2}{(i\omega + \varkappa^2)^2}, \\
b_8 &= -\varkappa^2 \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} (i\omega - \tau\varkappa^2)\pi\xi_{2C} + \varkappa^2 \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} (i\omega - \varkappa^2)\pi\theta_{2C} = -\frac{\varkappa^4[i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2]}{2(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)}, \\
b_9 &= -\frac{\pi\varkappa^2}{2}(w_{2A} + w_{2B}) - \\
&- \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} (i\omega - \tau\varkappa^2)\pi(\xi_{2A} + \xi_{2B}) + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} (i\omega - \varkappa^2)\pi(\theta_{2A} + \theta_{2B}), \\
b_{10} &= -\frac{\pi\varkappa^2}{2}(w_{2A} + 3w_{2B}^*) - \\
&- \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\sigma + 1}{1 - \tau} (i\omega - \tau\varkappa^2)\pi(\xi_{2A} + 3\xi_{2B}^*) + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\sigma + \tau}{1 - \tau} (i\omega - \varkappa^2)\pi(\theta_{2A} + 3\theta_{2B}^*).
\end{aligned}$$

Запишем теперь в более компактной форме все получившиеся уравнения, включая и (2.13):

$$\begin{aligned}
A_{T_1} &= 2k\alpha_0 A_{X_1} + 2k\alpha_1 A_{Y_1} - ikA\Omega_{Y_1}, \\
B_{T_1} &= 2k\alpha_0 B_{Y_1} + 2k\alpha_1 B_{X_1} + ikB\Omega_{X_1}, \\
A_{T_2} &= rA + \alpha_2 A_{X_1 X_1} - i\alpha_0 A_{Y_1 Y_1} + \alpha_4 A_{X_1 Y_1} + \alpha_5 A_{T_1 T_1} + 2\alpha_6 A_{X_1 T_1} + \alpha_6 A_{Y_1 T_1} + \\
&\quad + \alpha_5 ikA\Omega_{Y_1 T_1} + 2\alpha_5 ik\Omega_{Y_1} A_{T_1} - \alpha_5 k^2 A\Omega_{Y_1}^2 + \Omega_{X_1} A_{Y_1} + \alpha_7 \Omega_{Y_1} A_{X_1} + \alpha_8 \Omega_{Y_1} A_{Y_1} \\
&\quad + \alpha_9 A|A|^2 + \alpha_{10} B|A|^2, \\
B_{T_2} &= rB + \alpha_2 B_{Y_1 Y_1} - i\alpha_0 B_{X_1 X_1} + \alpha_4 B_{X_1 Y_1} + \alpha_5 B_{T_1 T_1} + 2\alpha_6 B_{Y_1 T_1} + \alpha_6 B_{X_1 T_1} - \\
&\quad - \alpha_5 ikB\Omega_{X_1 T_1} - 2\alpha_5 ik\Omega_{X_1} B_{T_1} - \alpha_5 k^2 B\Omega_{X_1}^2 - \Omega_{Y_1} B_{X_1} - \alpha_7 \Omega_{X_1} B_{Y_1} - \alpha_8 \Omega_{X_1} B_{X_1} \\
&\quad + \alpha_9 B|B|^2 + \alpha_{11} A|B|^2, \\
\Delta_{\perp} \Omega_{T_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Коэффициенты в этих уравнениях, наряду с выражениями (2.14), определяются формулами:

$$\begin{aligned}
r &= R/b_0 = \left(\frac{\sigma k^2}{2i\omega \varkappa^2} \right) \frac{(i\omega + \tau \varkappa^2)r_T - (i\omega + \varkappa^2)r_S}{i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2}, \\
\alpha_2 &= (b_1 + 3b_2 - 4k^2 b_7 - 4\sigma\pi^2)/b_0, \quad \alpha_4 = (2b_2 - 4k^2 b_7 - 4\sigma\pi^2)/b_0, \\
\alpha_5 &= b_5/b_0, \quad \alpha_6 = -(2ikb_6 + ik\pi^2/k^2)/b_0, \quad \alpha_7 = (2\varkappa^2 - b_0 - 2ikb_6)/b_0, \\
\alpha_8 &= (\pi^2 - 2ikb_6)/b_0, \quad \alpha_9 = -b_8/b_0 = \varkappa^2/(4i\omega), \\
\alpha_{10} &= -(b_8 + b_9)/b_0, \quad \alpha_{11} = -(b_8 + b_{10})/b_0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

§ 3. Частные случаи амплитудных уравнений

3.1. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау как простой частный случай

Рассмотрим последовательно ряд частных случаев системы (2.17), к которым она сводится при различных упрощающих предположениях. Самый простой вид уравнения получится, если положить, что мы рассматриваем: а) единственную моду в уравнениях; б) пренебрегаем взаимодействием с вихрем; в) рассматриваем всю динамику относительно единственной пространственной переменной; г) считаем, что волновое число соответствует первой теряющей устойчивость моде $k = \pi/\sqrt{2}$. При этих условиях система приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
A_{T_1} &= 2k\alpha_0 A_{X_1}, \\
A_{T_2} &= rA + \alpha_2 A_{X_1 X_1} + \alpha_5 A_{T_1 T_1} + 2\alpha_6 A_{X_1 T_1} + \alpha_9 A|A|^2.
\end{aligned}$$

Кроме того, по нашему предположению, $\alpha_0 = \omega/\varkappa^2$ — действительное число. В этом случае можно ввести новую медленную переменную по формуле $X = X_1 + 2k\alpha_0 T_1$ и положить, что амплитуда A зависит от переменных X_1 и T_1 только через нее. Тогда первое уравнение системы удовлетворяется тождественно, а производные запишутся как $A_{X_1} = A_X$ и $A_{T_1} = 2k\alpha_0 A_X$. Их остается подставить во второе уравнение системы и вычислить коэффициенты получившегося комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау:

$$\begin{aligned}
A_{T_2} &= rA + \alpha_{12} A_{X_1 X_1} + \alpha_9 A|A|^2, \\
\alpha_{12} &= \alpha_2 + 4k^2 \alpha_0^2 \alpha_5 + 4k\alpha_0 \alpha_6 = \alpha_2 + \frac{4k^2 \omega^2}{\varkappa^4} \alpha_5 + \frac{4k\omega}{\varkappa^2} \alpha_6.
\end{aligned}$$

3.2. Случай двух пространственных переменных

Чуть более общий случай состоит в том, что мы при выводе предыдущего уравнения предполагаем, что амплитуда зависит не от одной, а от двух пространственных переменных. Тогда система (2.17) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
A_{T_1} &= 2k\alpha_0 A_{X_1} + 2k\alpha_1 A_{Y_1}, \\
A_{T_2} &= rA + \alpha_2 A_{X_1 X_1} - i\alpha_0 A_{Y_1 Y_1} + \alpha_4 A_{X_1 Y_1} + \alpha_5 A_{T_1 T_1} + 2\alpha_6 A_{X_1 T_1} + \alpha_6 A_{Y_1 T_1} + \alpha_9 A|A|^2.
\end{aligned}$$

Выразим из первого уравнения производную по времени T_1 во втором уравнении через пространственные переменные и соберем члены. Тогда получится в результате уравнение следующего вида:

$$A_{T_2} = rA + \alpha_{12}A_{X_1X_1} + \alpha_{13}A_{Y_1Y_1} + \alpha_{14}A_{X_1Y_1} + \alpha_9A|A|^2. \quad (3.1)$$

Здесь введены коэффициенты по формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= -i\alpha_0 + 4k^2\alpha_1^2\alpha_5 + 2k\alpha_1\alpha_6, \\ \alpha_{14} &= \alpha_4 + 8k^2\alpha_0\alpha_1\alpha_5 + 4k\alpha_1\alpha_6 + 2k\alpha_0\alpha_6. \end{aligned}$$

На рисунке 1 приведен график мнимых частей коэффициентов $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ рассматриваемого уравнения, из которого видно, что эти величины при больших значениях ω линейно растут с ростом частоты и сравниваются между собой. В то же время действительные части этих коэффициентов с ростом частоты стремятся к нулю. Отсюда можно заключить, что уравнение (3.1) при больших числах Релея в линейной своей части становится похожим на известное из акустики параболическое уравнение.

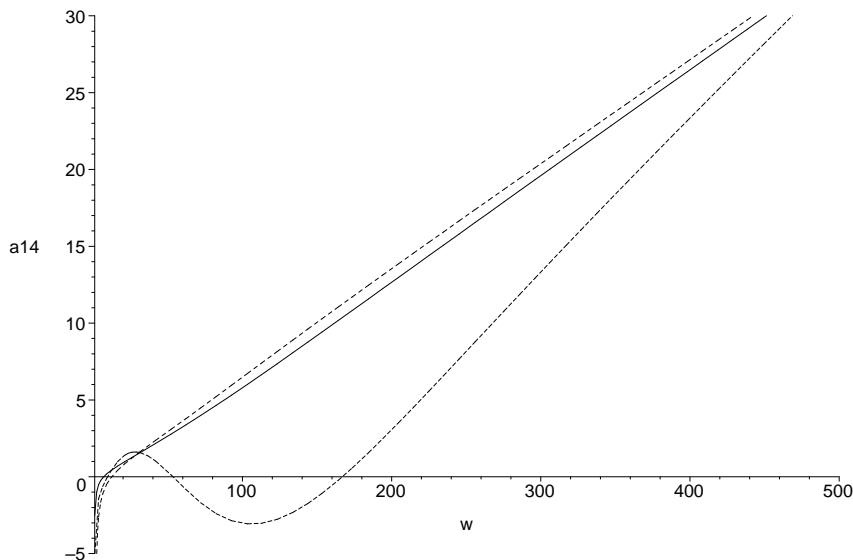


Рис. 1. Мнимые части коэффициентов $\alpha_{12}, -\alpha_{13}, \alpha_{14}$ в уравнении (3.1) в зависимости от частоты ω

3.3. Одна мода и вихрь ($A\Omega$ -система)

Добавление к предыдущей системе горизонтального вихря Ω в качестве внешнего фактора приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} A_{T_1} &= 2k\alpha_0A_{X_1} + 2k\alpha_1A_{Y_1} - ikA\Omega_{Y_1}, \\ A_{T_2} &= rA + \alpha_2A_{X_1X_1} - i\alpha_0A_{Y_1Y_1} + \alpha_4A_{X_1Y_1} + \alpha_5A_{T_1T_1} + 2\alpha_6A_{X_1T_1} + \alpha_6A_{Y_1T_1} + \\ &\quad + \alpha_5ikA\Omega_{Y_1T_1} + 2\alpha_5ik\Omega_{Y_1}A_{T_1} - \alpha_5k^2A\Omega_{Y_1}^2 + \Omega_{X_1}A_{Y_1} + \alpha_7\Omega_{Y_1}A_{X_1} + \alpha_8\Omega_{Y_1}A_{Y_1} + \\ &\quad + \alpha_9A|A|^2, \\ \Delta_{\perp}\Omega_{T_1} &= 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, выразим из первого уравнения производную по времени T_1 во втором уравнении через пространственные переменные и соберем члены. Тогда получится в результате уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} A_{T_2} &= rA + \alpha_{12}A_{X_1X_1} + \alpha_{13}A_{Y_1Y_1} + \alpha_{14}A_{X_1Y_1} - \\ &\quad - A(\alpha_{15}\Omega_{X_1Y_1} + \alpha_{16}\Omega_{Y_1Y_1}) + \Omega_{Y_1}(\alpha_{17}A_{X_1} + \alpha_{18}A_{Y_1}) + \Omega_{X_1}A_{Y_1} + \alpha_9A|A|^2. \end{aligned}$$

Здесь появились еще 4 следующих коэффициента:

$$\begin{aligned}\alpha_{15} &= 2ik(k\alpha_0\alpha_5 + \alpha_6), & \alpha_{16} &= ik(2k\alpha_1\alpha_5 + \alpha_6), \\ \alpha_{17} &= \alpha_7 - 2ik\alpha_6, & \alpha_{18} &= \alpha_8 - ik\alpha_6.\end{aligned}$$

3.4. Две моды и вихрь ($AB\Omega$ -система)

Аналогичная система получается и для переменной B , и ее комбинация с системой для A собственно эквивалентна первоначальной системе (2.17), только имеет чуть более «облагороженный» вид, следующий:

$$\begin{aligned}A_{T_2} &= rA + \alpha_{12}A_{X_1X_1} + \alpha_{13}A_{Y_1Y_1} + \alpha_{14}A_{X_1Y_1} - A(\alpha_{15}\Omega_{X_1Y_1} + \alpha_{16}\Omega_{Y_1Y_1}) + \\ &\quad + \Omega_{Y_1}(\alpha_{17}A_{X_1} + \alpha_{18}A_{Y_1}) + \Omega_{X_1}A_{Y_1} + \alpha_9A|A|^2 + \alpha_{10}A|B|^2, \\ B_{T_2} &= rB + \alpha_{12}B_{Y_1Y_1} + \alpha_{13}B_{X_1X_1} + \alpha_{14}B_{X_1Y_1} + B(\alpha_{15}\Omega_{X_1Y_1} + \alpha_{16}\Omega_{X_1X_1}) - \\ &\quad - \Omega_{X_1}(\alpha_{17}B_{Y_1} + \alpha_{18}B_{X_1}) - \Omega_{Y_1}B_{X_1} + \alpha_9B|B|^2 + \alpha_{11}B|A|^2, \\ \Delta_{\perp}\Omega_{T_1} &= 0.\end{aligned}$$

3.5. Только две моды (AB -система)

Исключив из полученной выше системы горизонтальный вихрь Ω , получим систему из двух комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау, описывающую взаимодействие двух мод конвекции в «чистом» виде:

$$\begin{aligned}A_{T_2} &= rA + \alpha_{12}A_{X_1X_1} + \alpha_{13}A_{Y_1Y_1} + \alpha_{14}A_{X_1Y_1} + \alpha_9A|A|^2 + \alpha_{10}A|B|^2, \\ B_{T_2} &= rB + \alpha_{12}B_{Y_1Y_1} + \alpha_{13}B_{X_1X_1} + \alpha_{14}B_{X_1Y_1} + \alpha_9B|B|^2 + \alpha_{11}B|A|^2.\end{aligned}$$

3.6. Генерация вихря за счет конвекции

Из условия отсутствия секулярных членов типа констант в уравнениях при третьем порядке по ε необходимо потребовать выполнения следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\Delta_{\perp}\Omega_{2T_1} &= -\frac{\pi^2}{2k^2}\{3(|A|^2)_{X_1} + (|A|^2)_{Y_1}{}_{Y_1} - [3(|B|^2)_{Y_1} + (|B|^2)_{X_1}{}_{X_1}]\}, \\ \Delta_{\perp}\hat{p}_2 &= 2(\Omega_{X_1X_1}\Omega_{Y_1Y_1} - \Omega_{X_1Y_1}^2) - \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2k^2}\{2[(|A|^2)_{X_1X_1} + (|B|^2)_{Y_1Y_1}] - [(|A|^2)_{Y_1Y_1} + (|B|^2)_{X_1X_1}] + [|A|^2 + |B|^2]_{X_1Y_1}\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

При этом мы ввели обозначение для вихря второго порядка Ω_2 исходя из того, что требуется $\hat{u}_2 = \Omega_2Y_1$, а также $\hat{v}_2 = -\Omega_2X_1$, согласно условию разрешимости для констант интегрирования в последнем уравнении системы (2.15). Также предполагалось, что $\Delta_{\perp}\Omega = 0$. Уравнения (3.2) для горизонтального вихря Ω_2 и давления \hat{p}_2 , по существу, являются уравнениями Пуассона, в правых частях которых стоят нелинейные выражения от амплитуд конвективных мод.

Таким образом, оказывается, что конвективные движения в рассматриваемой системе с бидиффузионной конвекцией приводят к генерации горизонтального вихря по амплитуде следующего порядка малости по отношению к амплитуде самой конвекции, которая в свою очередь развивается в соответствии с уравнениями (2.17) на фоне горизонтального вихря Ω , удовлетворяющего уравнению Лапласа $\Delta_{\perp}\Omega = 0$ и уже не зависящего от конвекции. Этот эффект аналогичен Стоксовым течениям в теории нелинейных волн.

Важным частным случаем горизонтального вихря Ω считается тот случай, когда он является линейной функцией горизонтальных координат X_1, Y_1 и описывает горизонтальные постоянные вдоль некоторого направления течения жидкости, на фоне которых развивается конвекция.

§ 4. Заключение

В данной работе методом разложения производной (разновидностью метода многих масштабов) выведены амплитудные уравнения в окрестности точек бифуркации Хопфа, характерной для рассматриваемой системы при достаточно больших числах Релея. При этом получена система комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау (2.17). Приведены аналитические выражения для коэффициентов (2.18) рассматриваемой системы уравнений и рассмотрены ее различные частные случаи. Формулы для коэффициентов согласуются с ранее полученными результатами для амплитудных уравнений в случае однодиффузионной конвекции.

Отметим, что более подробный анализ полученных уравнений, как аналитический, так и численный, выходит за рамки данной статьи и будет являться предметом последующих публикаций.

Работа выполнена при поддержке Программы № 14 (часть 2) Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хапперт Г., Тернер Дж. Конвекция, обусловленная двойной диффузией // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. — М.: Мир, 1984. — С. 413–453.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. — М.: Мир, 1977. — 431 с.
3. Козицкий С.Б. Амплитудные уравнения для системы с термохалинной конвекцией // ПМТФ. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 56–66.
4. Balmforth N.J. and J.A. Biello Double diffusive instability in a tall thin slot // J. Fluid Mech. — 1998. — V. 375. — P. 203–233.
5. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 247 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — 736 с.
7. A. Sorkin, V. Sorkin, I. Leizeron, Salt fingers in double-diffusive systems // Physica A. — 2002. — Vol. 303. — P. 13–26.
8. Knobloch E., Moore D.R., Toomre J. and Weiss N.O. Transitions to chaos in two-dimensional double-diffusive convection // J. Fluid Mech. — 1986. — Vol. 166. — P. 409–448.
9. Weiss N.O. Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection // J. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 108. — P. 247–272.
10. Weiss N.O. Convection in an imposed magnetic field. Part 2. The dynamical regime // J. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 108. — P. 273–289.
11. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.
12. Nayfeh A.H. Perturbation methods. — John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1973.
13. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques. — John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1981.
14. Kozitskiy S.B. Fine structure generation in double-diffusive system // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, № 5. — P. 056309-1-056309-6.

Поступила в редакцию 14.07.08

S. Kozitskiy

Amplitude equations for three-dimensional double-diffusive convection in the neighborhood of Hopf bifurcation points

Three dimensional double-diffusive convection in a horizontally infinite layer of an incompressible liquid is considered in the neighborhood of Hopf bifurcation points. A system of amplitude equations for horizontal variations of the amplitude of a square type convective cells is derived by multiple-scale method. An attention is paid to an interaction of convection and horizontal curl. Different cases of the derived equations are discussed.

Keywords: double-diffusive convection, amplitude equations, multiple-scale method.

Mathematical Subject Classifications: 34E13, 76E06, 76R10, 76R50

Козицкий Сергей Борисович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В.И. Ильичева, 690041, Владивосток, Балтийская, 43, E-mail skozi@poi.dvo.ru