УДК 517.977

© *В. И. Ухоботов, О. В. Зайцева*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ

Рассматривается игровая задача импульсной встречи в заданный момент времени, в случае когда первый игрок выбирает группу импульсных управлений, на выбор каждого из которых в процессе управления можно потратить свое заданное количество ресурсов. На выбор управления второго игрока накладывается геометрическое ограничение. Найдены достаточные условия возможности окончания игры из заданного начального состояния и построены соответствующие импульсные управления.

Ключевые слова: игровая задача, импульсная встреча, область достижимости, стабильный мост.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим игровую задачу импульсной встречи [1, 2, 3]

$$dz = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\, du_i(t) + v, \quad z \in R^n, \quad v \in V(t) \in R^n, \quad t \leqslant p.$$

Здесь $u_i \in R^{n_i}$, $A_i(t)$ — непрерывные при $t \leqslant p$ матрицы соответствующих размерностей. При каждом $t \leqslant p$ множество $V(t)$ является компактом, непрерывно по Хаусдорфу зависящее от t. На каждом отрезке $[\tau, t] \subset (-\infty, p]$ допустимыми программными управлениями первого игрока являются функции $u_i : [\tau, t] \to R^{n_i}$, каждая из которых имеет ограниченную вариацию

$$\int_{\tau}^{t} \|du_i(r)\|_{(i)} = \sup \sum \|u_i(r_{i+1}) - u_i(r_i)\|_{(i)}\,. \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее $i = 1, \ldots, k$, $\|\cdot\|_{(i)}$ — норма в пространстве R^{n_i}, а верхняя грань берется по всем разбиениям $t = r_0 < r_1 < \ldots < r_j = \tau$. Вариация (1.1) задает количество ресурсов, потраченных на формирование управления u_i [4], а изменение имеющегося запаса ресурсов определяется соотношением $\mu_i(t) = \mu_i(\tau) - \int_\tau^t \|du_i(r)\|_{(i)}$. Позиция игры — точка $(z, \bar{\mu})$, где $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$, а числа $\mu_i \geqslant 0$.

Определение 1. *Стратегией* π первого игрока назовем правило, которое каждому моменту $\tau < p$ и каждой позиции $(z, \bar{\mu})$ ставит в соответствие функции $u_i^{(\pi)} : [\tau, p] \to R^{n_i}$, вариации которых удовлетворяют неравенствам $\int_\tau^p \left\| du_i^{(\pi)}(r) \right\|_{(i)} \leqslant \mu_i$.

Пусть заданы начальный момент времени $t_0 < p$ и начальная позиция $(z(t_0), \bar{\mu}(t_0))$. Возьмем разбиение $\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_{j+1} = p$ с диаметром $d(\omega) = \max_{0 \leqslant i \leqslant j}(t_{i+1} - t_i)$. Построим ломаную

$$z^{(\omega)}(t) = z^{(\omega)}(t_s) + \int_{t_s}^{t} A_i(r)\, du_i^{(\pi)}(r) + \int_{t_s}^{t} v_s(r)\, dr, \tag{1.2}$$

$$\mu_i^{(\omega)}(t) = \mu_i^{(\omega)}(t_s) - \int_{t_s}^{t} \left\| du_i^{(\pi)}(r) \right\|_{(i)}. \tag{1.3}$$

Здесь $t_s < t \leqslant t_{s+1}$, $s = \overline{0, j}$, а интегралы, в которых стоят управления первого игрока, понимаются в смысле Римана–Стилтьеса [4]. Функции $v_s(r) \in V(r)$ при $t_s \leqslant r \leqslant t_{s+1}$ — любые измеримые управления второго игрока. Такой выбор управлений $v_s(r)$ будем называть допустимым поведением второго игрока.

Задано замкнутое множество $Z \subset R^n$. Цель первого игрока заключается в осуществлении включения $z(p) \in Z$. Наличие импульсных управлений приводит к мгновенному изменению позиции, что требует специального определения условия окончания [3]. С этой целью рассмотрим вектограммы

$$U_i(t) = \left\{ z \in R^n : z = A_i(t)u_i,\ \|u_i\|_{(i)} \leqslant 1 \right\}. \tag{1.4}$$

Множества (1.4) являются выпуклыми компактами, непрерывно по Хаусдорфу зависящими от t.

Определение 2. Первый игрок *сможет осуществить встречу в момент времени* p из начального состояния $t_0 < p, z(t_0), \bar{\mu}(t_0)$, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и стратегия π первого игрока такие, что для любого разбиения ω с диаметром $d(\omega) < \delta$ при любом допустимом поведении второго игрока выполнено включение

$$z_\omega(p) \in \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(\omega)}(p) U_i(p) + Z + \epsilon S. \tag{1.5}$$

§ 2. Достаточные условия окончания

При каждых $\tau \leqslant t \leqslant p$ обозначим области достижимости [4] :

$$U_i(\tau, t) = \left\{ z \in R^n : z = \int_\tau^t A_i(r) du_i(r), \int_\tau^t \|du_i(r)\|_{(i)} = 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Для любого множества $X \subset R^n$ через $\mathrm{co}X$ обозначим его выпуклую оболочку. Тогда [5]

$$U_i(\tau, t) = \mathrm{co} \bigcup_{\tau \leqslant r \leqslant t} U_i(r). \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что множества (2.1) являются выпуклыми компактами, симметричными относительно начала координат. Многозначные функции $U_i(t,p)$ непрерывно по Хаусдорфу зависят от t. Из равенства (2.2) следует, что $\bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} (\lambda U_i(\tau, r) + (1-\lambda) U_i(r,t)) = U_i(\tau, t)$, $\tau \leqslant r \leqslant t$. Зафиксируем при $t \leqslant p$ скалярные функции $g_i(t) \geqslant 0$, удовлетворяющие условию монотонности $g_i(\tau) \geqslant g_i(t)$, $\tau < t \leqslant p$.

Будем искать достаточные условия возможности осуществления встречи из начального состояния в следующем виде [5] :

$$z(t_0) \in \sum_{i=1}^{k} (\mu_i(t_0) - g_i(t_0))\, U_i(t_0, p) + W(t_0), \quad \mu_i(t_0) \geqslant g_i(t_0). \tag{2.3}$$

Здесь семейство множеств $W(t) \subset R^n$ удовлетворяет включению $W(p) \subset Z$ и условию стабильности [5]

$$W(\tau) + \int_\tau^t V(r)\, dr \subset \sum_{i=1}^{k} (g_i(\tau) - g_i(t))\, U_i(\tau, p) + W(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant p. \tag{2.4}$$

Будем считать, что все функции $g_i(t)$ удовлетворяют условию Липшица с константой $L > 0$

$$g_i(\tau) - g_i(t) \leqslant L(t - \tau), \quad \tau \leqslant t \leqslant p. \tag{2.5}$$

Зафиксируем число $\epsilon > 0$ и построим стратегию π, обеспечивающую встречу (1.5). Зафиксируем число

$$0 < a < \frac{\epsilon}{kL(p - t_0)}. \tag{2.6}$$

Из непрерывности многозначных функций $U_i(t,p)$ следует их равномерная непрерывность на отрезке $[t_0,p]$. Следовательно, существует число $\delta>0$ такое, что

$$U_i(\tau,p)\subset U_i(t,p)+aS,\qquad t_0\leqslant\tau<t\leqslant\tau+\delta,\quad t\leqslant p. \tag{2.7}$$

Рассмотрим разбиение с диаметром $d(\omega)<\delta$. Обозначим

$$W_+(t)=W(t)+akL(t-t_0)S,\quad t_0\leqslant t\leqslant p. \tag{2.8}$$

Очевидно, что условия (2.3) будут выполнены, если в них $W(t)$ заменить на $W_+(t)$.

Пусть для момента $\tau<p$ и позиции $(z,\bar\mu)$ выполнено

$$z\in\sum_{i=1}^{k}(\mu_i-g_i(\tau))\,U_i(\tau,p)+W_+(\tau),\quad \mu_i\geqslant g_i(\tau). \tag{2.9}$$

Тогда

$$z=x+y,\quad x\in\sum_{i=1}^{k}(\mu_i-g_i(\tau))\,U_i(\tau,p),\quad y\in W_+(\tau),\quad \mu_i\geqslant g_i(\tau). \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что существуют функции $u_i^{(\pi)}:[\tau,p]\to R^{n_i}$ такие, что

$$\int_\tau^p\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}\leqslant\mu_i-g_i(\tau),\quad x+\sum_{i=1}^{k}\int_\tau^p A_i(r)\,du_i^{(\pi)}(r)=0. \tag{2.11}$$

Если для момента $\tau<p$ и позиции $(z,\bar\mu)$ условия (2.9) не выполнены, то полагаем $u_i^{(\pi)}(r)=0$ при $\tau\leqslant r\leqslant p$.

Покажем, что построенная стратегия π обеспечивает включение (1.5). Пусть в некоторой точке t_s разбиения ω при $\tau=t_s$, $z=z^{(\omega)}(t_s)$, $\mu_i=\mu_i^{(\omega)}(t_s)$ выполнены соотношения (2.9) (при $s=0$ они выполнены). Тогда из формулы (1.3) и из первого неравенства (2.11) получим

$$\mu_i^{(\omega)}(t_{s+1})=\mu_i^{(\omega)}(t_s)-\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}\geqslant g_i(t_s)\geqslant g_i(t_{s+1}).$$

Далее, из формулы (1.2) и из второго равенства (2.11) следует, что

$$z^{(\omega)}(t_{s+1})=-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{s+1}}^{p}A_i(r)\,du_i^{(\pi)}(r)+y+\int_{t_s}^{t_{s+1}}v_s(r)\,dr.$$

Отсюда, используя (2.1) и третье включение в (2.10), получим

$$z^{(\omega)}(t_{s+1})\in\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{s+1}}^{p}\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}U_i(t_{s+1},p)+W_+(t_s)+\int_{t_s}^{t_{s+1}}V(r)\,dr.$$

Так как

$$\int_{t_{s+1}}^{p}\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}=\int_{t_s}^{p}\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}-\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}\leqslant$$
$$\leqslant\mu_i^{(\omega)}(t_s)-g_i(t_s)-\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left\|du_i^{(\pi)}(r)\right\|_{(i)}=\mu_i^{(\omega)}(t_{s+1})-g_i(t_s),$$

то из предыдущего включения получим

$$z^{(\omega)}(t_{s+1})\in\sum_{i=1}^{k}(\mu_i^{(\omega)}(t_{s+1})-g_i(t_s))U_i(t_{s+1},p)+W_+(t_s)+\int_{t_s}^{t_{s+1}}V(r)\,dr. \tag{2.12}$$

Прибавляя к обеим частям включения (2.4) множество $akL(t_s - t_0)S$ и используя (2.8), из включения (2.12) следует, что

$$z^{(\omega)}(t_{s+1}) \in \sum_{i=1}^{k}(\mu_i^{(\omega)}(g_i(t_{s+1}) - g_i(t_s))U_i(t_{s+1}, p)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(g_i(t_s) - g_i(t_{s+1}))U_i(t_s, p) + W(t_{s+1}) + akL(t_s - t_0)S.$$

Отсюда и из включения (2.7) получаем

$$z^{(\omega)}(t_{s+1}) \in \sum_{i=1}^{k}(\mu_i^{(\omega)}(t_{s+1}) - g_i(t_{s+1}))U_i(t_{s+1}, p)+$$

$$+W(t_{s+1}) + \Big(\epsilon\sum_{i=1}^{k}(g_i(t_s) - g_i(t_{s+1})) + akL(t_s - t_0)\Big)S.$$

Из последнего включения и (2.7) получим, что соотношения (2.9) при $\tau = t_{s+1}$, $z = z^{(\omega)}(t_{s+1})$, $\mu_i = \mu_i^{(\omega)}(t_{s+1})$ будут выполнены, если $a\sum\limits_{i=1}^{k}(g_i(t_s) - g_i(t_{s+1})) + akL(t_s - t_0) \leqslant akL(t_{s+1} - t_0)$. Из условия Липшица (2.5) следует, что предыдущее неравенство будет выполнено. Из соотношений (2.9), записанных в момент времени $t_{j+1} = p$, будем иметь

$$z_\omega(p) \subset \sum_{i=1}^{k}(\mu_i^{(\omega)}(p) - g_i(p))U_i(p) + W(p) + akL(p - t_0))S.$$

Учитывая включение $W(p) \subset Z$ и неравенство (2.6), получим требуемое включение (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования // ПММ. — 1963. — Т. 27. —Вып. 2. — С. 244–254.
2. Субботина Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения–уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // ПММ. — 1975. — Т. 39. —Вып. 3. — С. 397–406.
3. Ухоботов В. И. Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // ПММ. — 1988. — Т. 52. — Вып. 3. — С. 355–362.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1980. —319 с.
5. Ухоботов В. И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: Учеб. пособие. — Челябинск: Челяб. гос. ун–т, 2005. — 124 с.

Поступила в редакцию 13.10.08

V. I. Ukhobotov, O. V. Zaytseva

About one problem of a pulse meeting

We consider the game problem of a pulse meeting in the given moment of time, in the case when the first player chooses group of pulse managements, for choice of each of which it is possible to spend the set quantity of resources in control process. On choice of control of the second player geometrical restriction is imposed. Sufficient conditions of possibility of the termination of game from preset start state are found and corresponding pulse controls are constructed.

Keywords: game problem, pulse meeting, attainability domain, stable bridge.

Mathematical Subject Classifications: 91A23, 49N75

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454021, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, E-mail: ukh@csu.ru

Зайцева Оксана Витальевна, аспирант, Челябинский государственный университет, 454021, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, E-mail: ukh@csu.ru