МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 3

УДК 517.98

© *А. П. Карпова, Ю. И. Сапронов*

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУД ЦИКЛОВ, БИФУРЦИРУЮЩИХ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ

Для класса динамических систем, включающего в себя уравнения колебаний упругой балки на упругом основании, автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы гидродинамического типа и др., изложена процедура приближенного вычисления амплитуд периодических решений, бифурцирующих из точек покоя при наличии резонансов. Методологическая основа процедуры — метод Ляпунова–Шмидта, рассмотренный в рамках общей теории гладких $SO(2)$-эквивариантных фредгольмовых уравнений (в бесконечномерных банаховых пространствах). Материал статьи развивает и дополняет более ранние результаты исследований Б. М. Даринского, Ю. И. Сапронова и В. А. Смольянова.

Ключевые слова: цикл, резонанс, бифуркация, метод Ляпунова–Шмидта, круговая симметрия.

Введение

Разработке и апробации методов исследования зарождения периодических волн, вихревых структур и циклов динамических систем вблизи сложного фокуса посвящено большое число работ (см., например, [1–4] и литературу в этих источниках). В данной статье изложена процедура приближенного вычисления и анализа ветвления периодических решений дифференциальных уравнений, развивающая и дополняющая вычислительные схемы, опубликованные в [5, 6].

Основу предлагаемой вычислительной процедуры составляет теория гладких $SO(2)$-эквивариатных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах. Эта процедура прошла апробацию на задачах о периодических и волновых движениях упругой балки на упругом основании, о периодических решениях нелинейного уравнения типа С.Л. Соболева, уравнений гидродинамического типа и более общих автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь мы коснемся некоторых из перечисленных уравнений лишь с целью иллюстрации. Подробному изложению результатов апробации будут посвящены отдельные статьи.

В статье использован операторный подход: уравнение динамики трактуется как операторное уравнение в тройке последовательно вложенных функциональных пространств. Разумеется, можно отказаться от тройки пространств, так как достаточно рассмотреть лишь пару никак не связанных между собой банаховых пространств или пару гладких банаховых многообразий с фредгольмовыми структурами и т. д. Но тогда нужно задать и согласовать отдельные действия (нелинейные) окружности на них, что сразу внесет в схему неестественность (с точки зрения приложений). Тройка же пространств позволяет одновременно рассматривать круговую симметрию и спектральное строение линейной части уравнения (при выделении мод бифуркации).

Предложенная функционально–аналитическая схема достаточно проста, естественна и максимально приближена к рассмотренным задачам. Все сформулированные в статье условия и предположения реализуются в задачах нелинейной динамики. Одна из целей статьи — демонстрация геометрического единства (в духе [7, 8]) разнообразных задач нелинейной динамики — достигнута с использованием минимального объема средств функционального анализа.

Гильбертово пространство H в примерах — пространство периодических функций класса L_2 (скалярное произведение — интеграл от произведения функций по отрезку длины, равной периоду). Это пространство допускает естественную фильтрацию конечномерными подпространствами тригонометрических многочленов, на которых действие окружности является гладким и ортогональным (в индуцированной из H евклидовой структуре).

Таким образом, описанная схема дает основу для конструктивного бифуркационного анализа, она позволяет решать и задачу дискриминантного анализа параметрических семейств периодических решений.

Ниже использовано условие постоянства базиса собственных функций (мод бифуркаций). Это условие часто выполняется в краевых задачах. Зависимость же базиса собственных функций от параметра — малоинтересное обобщение. Однако существуют задачи, в которых действительно возникает необходимость рассмотрения переменного базиса из несобственных функций, так как из собственных это сделать нельзя [9]. В статье такие случаи не затрагиваются.

Конечно, есть и другие подходы к решению задач циклогенеза. Например, широко известен подход, основанный на теореме о центральном многообразии и теории локальных нормальных форм динамических систем [3]. Но многие из известных подходов испытывают существенные затруднения при рассмотрении сложных фокусов с сильными резонансами. Каждый, кто пробовал применять такие подходы в численном анализе конкретных систем, знает о существующих здесь трудностях (можно сослаться по этому поводу на известные высказывания Н. Н. Моисеева в послесловии к [4]). Плата за успешную работу алгоритмов, созданных на базе изложенной здесь схемы, — неполучение информации о локальном фазовом портрете. Однако есть соображения и на этот счет: оказывается, что по главной части ключевого отображения классической динамической системы можно определять главную часть нормализованной динамической системы (пока не опубликовано).

§ 1. Фредгольмовы уравнения с круговой симметрией

Вопросам анализа дифференциальных уравнений с групповой симметрией посвящена обширная литература (см., например, монографии и статьи Л. В. Овсянникова, Н. Х. Ибрагимова, П. Олвера, А. М. Виноградова с соавторами, В. Ф. Зайцева, А. Т. Фоменко, В. А. Треногина, Б. В. Логинова и др. [10–13]). Ряд аспектов теории вариационных и общих операторных уравнений с групповой симметрией развивался при непосредственном воздействии эквивариантной теории Морса (А. Т. Фоменко, В. В. Шарко и др.) и теории ветвления решений нелинейных эквивариантных уравнений (J. E. Marsden, Н. А. Бобылев, Б. В. Логинов, В. А. Треногин, З. И. Баланов и др.). Уравнения с круговой, бикруговой и поликруговой симметриями изучались в работах Б. В. Логинова, В. Г. Звягина, В. Кравцевича, Ю. И. Сапронова, В. А. Смольянова, А. В. Гнездилова и др.

Основной результат данной статьи допускает абстрактную формулировку в терминах фредгольмова уравнения [7] со слабой круговой симметрией, рассмотренного вблизи порождающей особой точки с четырехмерным вырождением.

Пусть заданы банаховы пространства E, F и гильбертово пространство H такие, что $E \subset F \subset H$ и эти вложения непрерывны. И пусть задано семейство фредгольмовых отображений нулевого индекса $f : E \times \mathbb{R}^m \to F,$ гладкое по совокупности переменных, представленное в виде

$$\mathcal{A}(\varepsilon)x + \mathcal{B}(x,x,\varepsilon) + \mathcal{C}(x,x,x,\varepsilon) + o(\|x\|_E^3),$$

где $\mathcal{A}(\varepsilon)$ — гладкое семейство линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ — квадратичный и кубический операторы.

Пусть, далее, зафиксирован слабо гладкий гомоморфизм $\mathcal{T} : SO(2) \longrightarrow O(H)$ — из группы $SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований пространства H (его непрерывность не предполагается)[1]. Гомоморфизм $\mathcal{T}$ задает ортогональное действие на пространстве $H:$

$$G \times H \longrightarrow H, \qquad (g,x) \longmapsto y = \mathcal{T}_g(x) \qquad \forall (g,x) \in G \times H.$$

Предполагается, что E и F инвариантны, а f эквивариантно относительно данного действия:

$$\mathcal{T}_g(E) \subset E, \quad \mathcal{T}_g(F) \subset F, \quad f(\mathcal{T}_g(\cdot),\varepsilon) = \mathcal{T}_g(f(\cdot,\varepsilon)) \qquad \forall g \in SO(2),\ \varepsilon \in \mathbb{R}^m.$$

[1] Слабая гладкость означает, что индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким.

Из эквивариантности f следует эквивариантность его производной (в нуле) $\mathcal{A}(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \varepsilon)$ и инвариантность подпространства $N := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0)$.

Пусть $E = N \oplus R_*$, $F = N \oplus R$, $\dim N = 4$, $\mathcal{A}(\varepsilon)(N) \subset N$, $\mathcal{A}(\varepsilon)(R_*) \subset R$. Предположим также, что в N существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (не зависящий от ε), в котором матрица $A_4(\varepsilon)$ оператора $\mathcal{A}_4(\varepsilon) := \mathcal{A}(\varepsilon)\Big|_N$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2(\varepsilon) & -\beta_2(\varepsilon) \\ 0 & 0 & \beta_2(\varepsilon) & \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственные значения матрицы $A_4(\varepsilon)$ суть следующие комплексные числа: $\lambda_1 = \alpha_1(\varepsilon) \pm \imath\beta_1(\varepsilon)$; $\lambda_2 = \alpha_2(\varepsilon) \pm \imath\beta_2(\varepsilon)$. В приложениях требуется, как правило, выполнение *условия регулярности* в нуле отображения

$$\varepsilon \longmapsto \Big(\alpha_1(\varepsilon),\, \beta_1(\varepsilon),\, \alpha_2(\varepsilon),\, \beta_2(\varepsilon)\Big)^\top, \tag{1}$$

означающего, что ранг матрицы Якоби в нуле (этого отображения) равен четырем. Из условия регулярности вытекает $m \geqslant 4$.

Пусть $\mathcal{P} : E \longrightarrow N$, $\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$ — ортопроекторы (в H). Следуя методу Ляпунова–Шмидта [13, 14], запишем исходное операторное уравнение $f(x, \varepsilon) = 0$ в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} f_{(4)}(u + v, \varepsilon) & = & 0, \\ f_{(\infty-4)}(u + v, \varepsilon) & = & 0, \end{cases}$$

где $u = \mathcal{P}x$, $v = \mathcal{Q}x$, $f_{(4)}(x, \varepsilon) := \mathcal{P}f(x, \varepsilon)$, $f_{(\infty-4)}(x, \varepsilon) := \mathcal{Q}f(x, \varepsilon)$. Из второго уравнения этой системы получаем, в силу теоремы о неявной функции, выражение $v = \widetilde{\Phi}(u, \varepsilon) = \Phi(\xi, \varepsilon)$, $\xi = \widehat{u}$.[2] Отображение Φ называется редуцирующим.

Нетрудно проверить, что имеет место следующее асимптотическое соотношение: $\Phi(\xi, \varepsilon) = o(|\xi|)$. Следовательно,

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^2), \tag{2}$$

где

$$\Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) = \sum_{|k|=2} \Phi_k \xi^k, \qquad k = (k_1, k_2, k_3, k_4),$$

$$\Phi_k \xi^k := \Phi_{k_1 k_2 k_3 k_4} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4}, \quad |k| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+.$$

Легко заметить, что

$$\Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) = -\overline{\mathcal{A}}^{\,-1}\, \mathcal{B}_{(\infty-4)}(u, u, \varepsilon), \quad \overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A}\Big|_{\mathcal{N}^\perp}, \;\; \mathcal{B}_{(\infty-4)} := \mathcal{Q}\mathcal{B}, \tag{3}$$

$u := \sum\limits_{j=1}^{4} \xi_j\, e_j$. Перейдём к ключевому уравнению

$$\Theta(\xi, \varepsilon) := \Theta^{(1)}(\xi, \varepsilon) + \Theta^{(2)}(\xi, \varepsilon) + \Theta^{(3)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^3) = 0,$$

где

$$\Theta(\xi, \varepsilon) = f_{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \Phi(\xi, \varepsilon), \varepsilon\right). \tag{4}$$

[2] Символом $\widehat{\ }$ обозначается «снятие» координат с вектора $u \in N$.

Так как

$$f_{(4)}(x,\varepsilon) = \mathcal{A}_{(4)}(\varepsilon)x + \mathcal{B}_{(4)}(x,x,\varepsilon) + \mathcal{C}_{(4)}(x,x,x,\varepsilon) + \ldots,$$
$$\mathcal{B}_{(4)} := \mathcal{P}\mathcal{B}, \quad \mathcal{C}_{(4)} := \mathcal{P}\mathcal{C},$$

то

$$\Theta(\xi,\varepsilon) = f_{(4)}(u + \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) + \ \ldots, \varepsilon) =$$

$$= \mathcal{A}_{(4)}u + \mathcal{B}_{(4)}(u,u,\varepsilon) + 2\mathcal{B}_{(4)}(u, \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon),\, \varepsilon)) + \mathcal{C}_{(4)}(u,u,u,\varepsilon) + o(|\xi|)^3. \tag{5}$$

В частности,

$$\Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) = A_{(4)}(\varepsilon)\widehat{u}.$$

Замечание 1. Формулы (2)–(5) дают конструктивную основу для получения явных формул зависимости коэффициентов главной части ключевого уравнения от исходных данных.

§ 2. Алгебраическое уравнение в $\mathbb{R}^4$ с круговой симметрией и резонансным вырождением типа 1:2

Пусть задано алгебраическое отображение $\Theta : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$:

$$\Theta(\xi) = (\Theta_1(\xi), \Theta_2(\xi), \Theta_3(\xi), \Theta_4(\xi))^\top,$$

где

$$\Theta_j(\xi) = \sum_k \alpha_k^j \xi^k, \quad k = (k_1,k_2,k_3,k_4), \quad |k| < 4,$$

и пусть это отображение эквивариантно относительно стандартного действия окружности (группы $SO(2)$) на $\mathbb{R}^4$, соответствующего резонансу третьего порядка: если отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z = (z_1,z_2)^\top \in \mathbb{C}^2$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$, $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$, то действие задается соответствием

$$\mathcal{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i\varphi)z_1, \exp(2i\varphi)z_2)^\top. \tag{6}$$

Эквивариантность означает выполнение соотношения

$$\Theta(\mathcal{T}_\varphi(\xi)) = \mathcal{T}_\varphi(\Theta(\xi)) \qquad \forall\{\xi,\, \varphi\}. \tag{7}$$

Множество ненулевых решений данного уравнения представляет собой набор одномерных подмногообразий (орбит действия (6), см. [12]), диффеоморфных окружности. Пусть теперь

$$z_1 = \xi_1 + \imath\xi_2, \quad z_2 = \xi_1 - \imath\xi_2, \quad z_3 = \xi_3 + \imath\xi_4, \quad z_4 = \xi_3 - \imath\xi_4, \qquad z = (z_1,z_2,z_3,z_4)^\top,$$

$$\mathcal{T}_\varphi(z) = \left(e^{\imath\varphi}z_1, e^{-\imath\varphi}z_2, e^{2\imath\varphi}z_3, e^{-2\imath\varphi}z_4\right)^\top.$$

Положив $\Upsilon(z) = \Theta(\xi)$, мы сможем записать (7) в виде

$$\mathcal{T}_\varphi\Upsilon(z) = \Upsilon(\mathcal{T}_\varphi(z_1,z_3), \mathcal{T}_{-\varphi}(z_2,z_4)). \tag{8}$$

Здесь $\Upsilon(z) = \sum\limits_k \gamma_k\, z^k = \sum\limits_k \gamma_k\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}$, $\quad \gamma_k = \left(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^3, \gamma_k^4\right)^\top$, $\quad k := (k_1,k_2,k_3,k_4)$,

$$\mathcal{T}_\varphi\Upsilon(z) = \sum_k \mathcal{T}_\varphi(\gamma_k) z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} = \sum_k \begin{pmatrix} e^{\imath\varphi}\gamma_k^1 \\ e^{-\imath\varphi}\gamma_k^2 \\ e^{2\imath\varphi}\gamma_k^3 \\ e^{-2\imath\varphi}\gamma_k^4 \end{pmatrix} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4},$$

$$\Upsilon(\mathcal{T}_\varphi(z)) = \sum_k \gamma_k e^{\imath\varphi((k_1-k_2)+2(k_3-k_4))} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} =$$

$$= \sum_k \gamma_k e^{\imath\varphi((k_1-k_2)+2(k_3-k_4))} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}.$$

Равенство (8) означает, что коэффициенты при одинаковых мономах совпадают:

$$\begin{pmatrix} e^{\imath\varphi}\gamma_k^1 \\ e^{-\imath\varphi}\gamma_k^2 \\ e^{2\imath\varphi}\gamma_k^3 \\ e^{-2\imath\varphi}\gamma_k^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_k^1 \\ \gamma_k^2 \\ \gamma_k^3 \\ \gamma_k^4 \end{pmatrix} e^{\imath\varphi((k_1-k_2)+2(k_3-k_4))} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}.$$

Обратимся к тейлоровскому разложению

$$\Theta(\xi) = \Theta^{(1)}(\xi) + \Theta^{(2)}(\xi) + \Theta^{(3)}(\xi) + \ldots,$$

где $\Theta^{(1)}(\xi)$, $\Theta^{(2)}(\xi)$ и $\Theta^{(3)}(\xi)$ — линейная, квадратичная и кубическая части разложения. Слагаемое $\Theta^{(\kappa)}(\xi)$ состоит из мономов ξ^k порядка $\kappa := k_1 + k_2 + k_3 + k_4$.

Используя «правило сравнения равных полиномов» (см. (8)), получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для гладкого отображения Θ, удовлетворяющего условию круговой симметрии* (7), *имеет место следующее представление:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4 \\ \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & -c_2\mathcal{I}_1 - d_2\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2 & c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 & -c_4\mathcal{I}_1 - d_4\mathcal{I}_2 \\ 0 & 0 & c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} +$$

$$+O(|\xi|^4) = 0.$$

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, c_i, d_i$ в представлении отображения Θ, указанном в теореме, явно выражаются через «операторные коэффициенты» $f(x,\varepsilon)$. Здесь и ниже $\mathcal{I}_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |z_1|^2$, $\mathcal{I}_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2 = |z_3|^2$, $\mathcal{I}_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4$, $\mathcal{I}_4 = -(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4 + 2\xi_1\xi_2\xi_3$ — система образующих инвариантов.

§ 3. Переход к приведенному уравнению

Уравнение $\Theta(\xi) = 0$ можно заменить уравнением

$$\widetilde{\Theta}(\xi) := \Big(\widetilde{\Theta}_1(\xi), \widetilde{\Theta}_2(\xi), \widetilde{\Theta}_3(\xi), \widetilde{\Theta}_4(\xi)\Big)^\top = 0,$$

в котором компоненты $\widetilde{\Theta}_j$ представляют собой следующие скалярные произведения: $\widetilde{\Theta}_1(\xi) := (\Theta(\xi), z_1)$, $\widetilde{\Theta}_2(\xi) := (\Theta(\xi), iz_1)$, $\widetilde{\Theta}_3(\xi) := (\Theta(\xi), z_2)$, $\widetilde{\Theta}_4(\xi) := (\Theta(\xi), iz_2)$, где $z_1 := (\xi_1, \xi_2, 0, 0)^\top$, $iz_1 := (-\xi_2, \xi_1, 0, 0)^\top$, $z_2 := (0, 0, \xi_3, \xi_4)^\top$, $iz_2 := (0, 0, -\xi_4, \xi_3)^\top$. Легко проверить, что функции $\widetilde{\Theta}_k$ являются инвариантами. Более того, для них имеют место следующие представления:

$$\widetilde{\Theta}_1(\xi) = a_1\mathcal{I}_3 - b_1\mathcal{I}_4 + (\alpha_1 + c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_1 + o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_2(\xi) = b_1\mathcal{I}_3 + a_1\mathcal{I}_4 + (\beta_1 + c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_1 + o(|\xi|^4),$$
$$\widetilde{\Theta}_3(\xi) = a_2\mathcal{I}_3 - b_2\mathcal{I}_4 + (\alpha_2 + c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_2 + o(|\xi|^4),$$
$$\widetilde{\Theta}_4(\xi) = b_2\mathcal{I}_3 + a_2\mathcal{I}_4 + (\beta_2 + c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_2 + o(|\xi|^4).$$

Перейдя к комплексным переменным, получим соотношения

$$\widetilde{\Theta}_1 + i\widetilde{\Theta}_2 = u_1\,(\mathcal{I}_3 + i\mathcal{I}_4) + \mathcal{I}_1\,(\lambda_1 + v_1\mathcal{I}_1 + w_1\mathcal{I}_2) + o(|\xi|^4)$$

и

$$\widetilde{\Theta}_3 + i\widetilde{\Theta}_4 = u_2\,(\mathcal{I}_3 + i\mathcal{I}_4) + \mathcal{I}_2\,(\lambda_2 + v_2\mathcal{I}_1 + w_2\mathcal{I}_2) + o(|\xi|^4),$$

где $\lambda_1 := \alpha_1 + i\beta_1$, $u_1 := a_1 + ib_1$, $v_1 := c_1 + ic_2$, $w_1 := d_1 + id_2$, $\lambda_2 := \alpha_2 + i\beta_2$, $u_2 := a_2 + ib_2$, $v_2 := c_3 + ic_4$, $w_2 := d_3 + id_4$. Из системы двух уравнений (с комплексными коэффициентами)

$$\widetilde{\Theta}_1 + i\widetilde{\Theta}_2 \;=\; \widetilde{\Theta}_3 + i\widetilde{\Theta}_4 \;=\; 0$$

получим соотношения

$$\mathcal{I}_3 + i\mathcal{I}_4 = -u_1^{-1}\mathcal{I}_1\,(\lambda_1 + v_1\mathcal{I}_1 + w_1\mathcal{I}_2) + o(|\xi|^4) \tag{9}$$

и

$$u_2\mathcal{I}_1\,(\lambda_1 + v_1\mathcal{I}_1 + w_1\mathcal{I}_2) - u_1\mathcal{I}_2\,(\lambda_2 + v_2\mathcal{I}_1 + w_2\mathcal{I}_2) + o(|\xi|^4) = 0.$$

Сгруппировав в последнем соотношении подобные слагаемые, получим *приведенное* уравнение

$$\mu_1\mathcal{I}_1 + \mu_2\mathcal{I}_2 + A\mathcal{I}_1^2 + 2B\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 + C\mathcal{I}_2^2 + o(|\xi|^4) = 0, \tag{10}$$

$$\mu_1 = u_2\lambda_1, \quad \mu_2 = -u_1\lambda_2, \quad A = u_2v_1, \quad B = -u_1w_2, \quad C = u_2w_1 - u_1v_2.$$

Замечание 2. Из уравнений (9), (10) можно находить соотношения между амплитудными, угловыми (фазовыми) переменными и параметрами (например, в теории колебаний — зависимость между амплитудой и периодом колебания), определять количество бифурцирующих решений и вычислять асимптотические представления для амплитудных переменных.

Замечание 3. Переход к приведенному уравнению не приводит (при $u_1 \neq 0$ и $u_2 \neq 0$) к потере решений и появлению новых решений. Выигрыш от перехода состоит в том, что главная часть ключевого уравнения заменяется на явную зависимость $\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4$ от $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ и систему двух скалярных уравнений относительно $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$. Причем степени полиномов в левых частях этих уравнений равны 2. На основе этой системы легко осуществить дискриминантный анализ.

§ 4. Нормализованное приведенное уравнение

В случае общего положения уравнения (10), при $u_1 \cdot u_2 \neq 0$ и при выполнении условия регулярности в нуле отображения (1), это уравнение можно представить, после овеществления и соответствующих преобразований переменных, в виде системы уравнений

$$\begin{cases} y_1^2 \pm y_2^2 \; + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 = 0, \\ y_1 y_2 \; + \delta_3 y_1 + \delta_4 y_2 = 0, \end{cases}$$

левая часть которой представляет собой нормальную форму мини-версальной деформации омбилической особенности (гиперболического или соответственно эллиптического типа — в зависимости от знака перед y_2^2 в первом уравнении) относительно контактных преобразований [15] векторных полей вида

$$\theta(y) \longrightarrow A(y)\theta(\varphi(y)), \qquad \varphi(0)) = 0$$

($A(y)$ — гладкий пучок обратимых матриц, φ — локальный диффеоморфизм). Образцы дискриминантного анализа систем уравнений такого вида имеются в [15], [4], [14].

В гиперболическом случае дискриминантное множество Σ допускает параметризацию

$$\delta_1 = r\cos(\psi), \qquad \delta_2 = r\sin(\psi),$$
$$\delta_3 = \frac{r}{1-\cos(\varphi-\psi)}\Big(\sin(\psi)(1+\sin(\varphi)\sin(\psi)-\cos(2\varphi)) - \frac{3}{4}\sin(\varphi) + \frac{1}{4}\sin(3\varphi)\Big),$$
$$\delta_4 = \frac{r}{1-\cos(\varphi-\psi)}\Big(\cos(\psi)(1-\cos(\varphi)\cos(\psi)+\cos(2\varphi)) - \frac{3}{4}\cos(\varphi) - \frac{1}{4}\cos(3\varphi)\Big).$$

Дополнение $\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$ является объединением четырех открытых попарно непересекающихся подмножеств

$$\Omega = \Omega_2^{-1} \cup \Omega_2^1 \cup \Omega_4^{-1} \cup \Omega_4^1$$

таких, что при $\delta \in \Omega_2^{-1}$ имеется два (регулярных) решения (их топологические индексы противоположны по знаку) и при этом топологический индекс нулевого решения равен -1, при $\delta \in \Omega_2^1$ система приведенных уравнений имеет лишь одно ненулевое решение и топологический индекс нуля равен 1, при $\delta \in \Omega_4^{-1}$ имеется четыре решения: два из них индекса -1 (включая нулевое) и два — индекса 1, а при $\delta \in \Omega_4^1$ имеется четыре решения, из которых два индекса 1 (включая нулевое) и два — индекса -1.

Аналогичное разбиение пространства параметров имеет место и в эллиптическом случае, с учетом что сумма топологических индексов всех решений равна 2.

§ 5. Случай резонансов $p:q, \quad |p|+|q| \geqslant 4$

Случаю $|p|+|q|=4$ соответствует (единственный) резонанс — 1:3. Пусть отображение Θ эквивариантно относительно действия ($SO(2)$) на $\mathbb{R}^4$)

$$\mathcal{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i\varphi)z_1, \exp(3i\varphi)z_2)^\top \tag{11}$$

(при соответствующем отождествлении вектора $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z=(z_1,z_2)^\top \in \mathbb{C}^2$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$, $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят в данном случае к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для отображения* Θ, *эквивариантного относительно действия* (11), *имеет место следующее представление*:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4 \\ (\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_4 - 2\xi_1\xi_2\xi_3 \\ (\xi_1^2-3\xi_2^2)\xi_1 \\ (3\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & -c_2\mathcal{I}_1 - d_2\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2 & c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 & -c_4\mathcal{I}_1 - d_4\mathcal{I}_2 \\ 0 & 0 & c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} +$$
$$+O(|\xi|^4) = 0.$$

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, c_i, d_i$ в представлении отображения Θ, указанном в теореме, явно выражаются через «операторные коэффициенты» $f(x, \varepsilon)$.

Уравнение $\Theta(\xi) = 0$ можно заменить уравнением

$$\widetilde{\Theta}(\xi) := \Big(\widetilde{\Theta}_1(\xi), \widetilde{\Theta}_2(\xi), \widetilde{\Theta}_3(\xi), \widetilde{\Theta}_4(\xi)\Big)^\top = 0,$$

где $\widetilde{\Theta}_1(\xi) := (\Theta(\xi), z_1)$, $\widetilde{\Theta}_2(\xi) := (\Theta(\xi), iz_1)$, $\widetilde{\Theta}_3(\xi) := (\Theta(\xi), z_2)$, $\widetilde{\Theta}_4(\xi) := (\Theta(\xi), iz_2)$, $z_1 := (\xi_1, \xi_2, 0, 0)^\top$, $iz_1 := (-\xi_2, \xi_1, 0, 0)^\top$, $z_2 := (0, 0, \xi_3, \xi_4)^\top$, $iz_2 := (0, 0, -\xi_4, \xi_3)^\top$. Функции $\widetilde{\Theta}_k$ являются инвариантами относительно действия (11) и для них имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Theta}_1(\xi) &= a_1\mathcal{I}_3 - b_1\mathcal{I}_4 + (\alpha_1 + c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_1 + o(|\xi|^4),\\
\widetilde{\Theta}_2(\xi) &= b_1\mathcal{I}_3 + a_1\mathcal{I}_4 + (\beta_1 + c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_1 + o(|\xi|^4),\\
\widetilde{\Theta}_3(\xi) &= a_2\mathcal{I}_3 - b_2\mathcal{I}_4 + (\alpha_2 + c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_2 + o(|\xi|^4),\\
\widetilde{\Theta}_4(\xi) &= b_2\mathcal{I}_3 + a_2\mathcal{I}_4 + (\beta_2 + c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2)\,\mathcal{I}_2 + o(|\xi|^4).
\end{aligned}$$

Здесь I_3, I_4 — вторая пара «образующих» инвариантов действия (11): $\mathcal{I}_3 = (\xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2)\xi_3 + (3\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3)\xi_4$, $\mathcal{I}_4 = (\xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2)\xi_4 - (3\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3)\xi_3$ (первая пара инвариантов прежняя).

Перейдя к комплексным переменным, получим соотношения вида (9), (10), из которых также можно находить соотношения между амплитудами, угловыми (фазовыми) переменными и параметрами, определять количество бифурцирующих решений и вычислять асимптотические представления для амплитудных переменных.

В случае *слабого резонанса* $p : q$ ($|p| + |q| \geqslant 5$) вычисления существенно упрощаются, так как вторая пара образующих инвариантов I_3, I_4 приобретает порядок выше четвертого и, следовательно, не оказывает влияния на формирование главной части приведенного уравнения.

§ 6. Резонанс 1 : 1

Случай резонанса $1 : 1$, строго говоря, не укладывается в описанную выше схему и требует модификации. Опуская подробности, заметим, что, потребовав, как и ранее, выполнение условия 4-мерности вырождения, получим ключевое отображение в следующей (комплексной) форме:

$$\Theta(\xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{4} c_{1,k}\mathcal{I}_k & \sum\limits_{k=1}^{4} d_{1,k}\mathcal{I}_k \\ \sum\limits_{k=1}^{4} c_{2,k}\mathcal{I}_k & \sum\limits_{k=1}^{4} d_{2,k}\mathcal{I}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + o(|\xi|^4).$$

Отображение Θ эквивариантно относительно действия ($SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$)

$$\mathcal{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto \exp(i\varphi)z. \qquad (12)$$

Здесь I_3, I_4 — образующие инварианты действия (12):

$$\mathcal{I}_3 = \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4, \qquad \mathcal{I}_4 = -\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3.$$

Уравнение $\Theta(\xi) = 0$ можно заменить уравнением $\widetilde{\Theta}(\xi) = 0$,

$$\widetilde{\Theta}(\xi) = \Big(\widetilde{\Theta}_1(\xi), \widetilde{\Theta}_2(\xi), \widetilde{\Theta}_3(\xi), \widetilde{\Theta}_4(\xi)\Big)^\top,$$

$$\widetilde{\Theta}_1(\xi) := (\Theta(\xi), z_1)\,, \quad \widetilde{\Theta}_2(\xi) := (\Theta(\xi), iz_1)\,,$$
$$\widetilde{\Theta}_3(\xi) := (\Theta(\xi), z_2)\,, \quad \widetilde{\Theta}_4(\xi) := (\Theta(\xi), iz_2)\,.$$

Функции $\widetilde{\Theta}_k$ инвариантны относительно действия (12), и для них имеют место представления (с вещественными коэффициентами) вида

$$\widetilde{\Theta}_j(\xi)=\sum_{k,l=1}^{4} u_{j,k,l}\mathcal{I}_k\mathcal{I}_l+o(|\xi|^4)$$

при условии $u_{1,2,2}=u_{2,2,2}=u_{3,1,1}=u_{4,1,1}=0.$

После введения в уравнение $\widetilde{\Theta}(\xi)=0$ полярных координат $z_1=r_1\exp(i\varphi_1)$, $z_2=r_2\exp(i\varphi_2)$ и отбрасывания общих множителей получается система уравнений в форме, достаточно удобной для проведения дискриминантного анализа.

Замечание 4. Некоторые бифуркационные эффекты в случае резонанса $1:1$ изучены В. В. Стрыгиным и его учениками методами теории усреднений в задаче синхронизации пары динамических систем (см., например, [17]).

§ 7. Примеры дифференциальных уравнений

7.1. Двухмодовые бифуркации периодических волновых решений уравнения 4-го порядка. Рассмотрим простейшее нелинейное скалярное уравнение из класса уравнений соболевского типа [16]

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\frac{\partial u}{\partial x}+du+u^3=0. \tag{13}$$

Поиск периодических волновых решений в виде

$$u=w(kx-\omega t),\qquad u=u(y) \tag{14}$$

($v=\frac{\omega}{k}$ — скорость распространения волны) приводит, после подстановки (14) в (13) и подходящих масштабирующих преобразований, к уравнению вида

$$\kappa_3\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\kappa_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\delta\frac{\partial w}{\partial y}+\kappa_1 w+w^3=0 \tag{15}$$

(параметр δ будем считать малым). В итоге получаем задачу построения периодического решения уравнения (15).

Если рассмотреть бифурцирующие волновые решения, допускающие представление

$$w=r_1\sin(py+\varphi_1)+r_2\sin(qy+\varphi_2)+o(r_1,r_2),$$

$y=k\ x-\omega\ t$, $p,q\in\mathbf{Z}$, НОД $(p,q)=1$, то получим совокупность решений, в пределах которой реализуется значительное разнообразие профилей и «скоростных» свойств изучаемых волн. Далее полагаем $T=2\pi$. Отображение $f:E\longrightarrow F$, где

$$f(w):=\kappa_3\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\kappa_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\delta\frac{\partial w}{\partial y}+\kappa_1 w+w^3,$$

$E=\Pi^4_{2\pi}$ — пространство 2π-периодических функций класса C^4, F — пространство непрерывных 2π-периодических функций (H — пространство 2π-периодических функций класса L_2), является гладким фредгольмовым нулевого индекса. Изучение решений (вблизи нуля) уравнения $f(w)=0$, при локализации параметров

$$\kappa_2=5+\varepsilon_1,\quad \kappa_1=4+\varepsilon_2,\quad \delta=\varepsilon_3,\quad \kappa_3=1+\varepsilon_4$$

(см. [6]), можно осуществить через редукцию Ляпунова–Шмидта в пространство ключевых координат $\xi_k=\langle w,e_k\rangle$, где $\{e_k\}$ — набор мод бифуркации, $k\leqslant 4$, $e_1=\sqrt{2}\cos(x)$, $e_2=$

$\sqrt{2}\sin(x)$, $e_3 = \sqrt{2}\cos(2x)$, $e_4 = \sqrt{2}\sin(2x)$. Здесь $m = 4$, условие регулярности выполняется автоматически.

Гомоморфизм $\mathcal{T} : G \longrightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H, заданный соотношением

$$\mathcal{T}_g(w)(x) = w(x + \varphi)$$

(φ — каноническая координата элемента $g \in SO(2)$, $g = (g_{ij})$, $g_{11} = g_{22} = \cos(\varphi)$, $g_{21} = -g_{12} = \sin(\varphi)$), определяет слабо гладкое ортогональное действие

$$G \times H \longrightarrow H, \ (g, w) \longmapsto y = \mathcal{T}_g(w) \qquad \forall (g, w) \in G \times H.$$

Очевидно, что пространства E, F инвариантны относительно данного действия. Очевидна также эквивариантность ключевого отображения относительно индуцированного полусвободного действия $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров $\mathbb{R}^4$. Следовательно, к нему применимы все утверждения и выводы первых двух параграфов.

7.2. Циклы, бифурцирующие из сложного фокуса с резонансом 1 : 2. Обратимся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + B(x, x, \varepsilon) + C(x, x, x, \varepsilon) + o(|x|^3), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^3, \tag{16}$$

при условии, что две пары комплексно-сопряженных точек спектра матрицы $A(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ трансверсально пересекают мнимую ось с резонансом $1 : 2$, а остальная часть спектра находится (при всех ε) внутри левой комплексной полуплоскости [2]. Здесь $B(x, x, \varepsilon)$ и $C(x, x, x, \varepsilon)$ — квадратичное и кубическое отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, гладко зависящие от ε ($B(x, y, \varepsilon)$ и $C(x, y, z, \varepsilon)$ — симметричные билинейная и 3-линейная формы с векторными коэффициентами, гладко зависящими от ε).

Запишем уравнение (16) в виде операторного уравнения

$$f(x, \varepsilon) = 0, \tag{17}$$

в котором x — функция $x(t)$, принадлежащая банахову пространству Π^1_T (T-периодических непрерывно дифференцируемых функций со значениями в $\mathbb{R}^n$), а f — фредгольмово отображение с квадратичной нелинейностью, действующее из пространства Π^1_T в банахово пространство Π^0_T (непрерывных T-периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^n$), заданное соответствием

$$f(\cdot, \varepsilon) : \ x(t) \ \longrightarrow \ y(t) \ := \ \dot{x}(t) - \nu(A(\varepsilon)x + B(x, x, \varepsilon) + C(x, x, x, \varepsilon)) + \ \dots \ .$$

H — пространство периодических функций класса L_2 (со значениями в $\mathbb{R}^n$), $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T (x(t), y(t))dt$. Параметр

$$\nu = 1 + \varepsilon_4$$

введен для «нормировки» периода, в дальнейшем можно положить $T = 2\pi$. [3]

К уравнению (17) можно применить схему конечномерной редукции Ляпунова–Шмидта, сводящую исследование данного уравнения к исследованию уравнения в 4-мерном пространстве.

[3] Если расширить трехмерный векторный параметр ε до четырехмерного, потребовав выполнение условия трансверсальности пересечения мнимой оси точками спектра матрицы Якоби левой части, то вариации по параметру ν «будут поглощаться» вариациями векторного параметра ε. Следовательно, не потеряв остальные циклы, можно рассматривать лишь циклы фиксированного периода 2π (циклы другого периода превращаются в циклы периода 2π изменением значений параметра ε).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
2. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
3. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. — Ленинград: Изд. ЛГУ, 1991. — 144 с.
4. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Мир, 1983. — 302 с.
5. Сапронов Ю. И., Смольянов В. А. Обобщенная редукция Каччиополи и бифуркация решений уравнений при разрушении непрерывных симметрий // Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2001. — С. 125–139.
6. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений // Современная математика и ее приложения. — Тбилиси, 2003. — Т. 7. — С. 72–86.
7. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975. — 512 с.
8. Marsden J. On the geometry of the Liapunov-Schmidt procedure // Lect. Notes in Math. —1979. — Vol. 755. — P.77–82.
9. Костин Д. В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабонеоднородной упругой балки // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 418, № 4. — С. 295–299.
10. Зайцев В. Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. — Л.: ЛГПИ, 1989. — 80 с.
11. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
12. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.
13. Треногин В. А., Сидоров Н. А., Логинов Б. В. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия // ДАН СССР. — 1989. — Т. 309, № 2. — С. 286–289.
14. Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. — Воронеж: ВГУ, 2002. — 185 с.
15. Особенности дифференцируемых отображений / Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. — М.: МЦНМО, 2004. — 672 с.
16. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. Линейные уравнения соболевского типа. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003. — 179 с.
17. Стрыгин В. В., Северин Г. Ю. Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами // Вестник ВГУ. Сер.: физика, математика. — 2006. — № 2 — С. 36–45.

Поступила в редакцию 10.09.08

A. P. Karpova, Yu. I. Sapronov

Approximate calculation of amplitudes of cycles bifurcating in the presence of resonances

The procedure of approximate calculation of amplitudes for periodic solutions bifurcating from rest points in the presence of resonance is studied for a class of dynamical systems. This class includes equations of spring beam oscillations located on elastic foundations, autonomous systems of ordinary differential equations, hydrodynamical systems etc. The methodological basis of the procedure is the Lyapunov–Schmidt method considered in the context of general theory of smooth $SO(2)-$ equivariant Fredholm equations (in infinite dimensional Banach spaces). The topic of the paper develops and extends the earlier research of B. M Darinsky, Y. I. Sapronov, and V. A. Smolyanov.

Keywords: cycle, resonance, bifurcation, Lyapunov–Schmidt method, circle symmetry.

Mathematical Subject Classifications: 34A30,70G40

Карпова Антонина Петровна, ассистент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, 394006, Университетская пл., 1, E-mail: karpovaantonina@mail.ru

Сапронов Юрий Иванович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, 394006, Университетская пл., 1, E-mail: yusapr@mail.ru