МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:532.546

© *И. Б. Бадриев, И. Н. Исмагилов, Л. Н. Исмагилов*

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ [1]

Работа посвящена методу решения стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом. Задача фильтрации сформулирована в виде вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов. Для решения вариационного неравенства предлагается использовать итерационный метод расщепления.

Ключевые слова: теория фильтрации, математическое моделирование, вариационные неравенства, обратно сильно монотонный оператор, итерационный метод.

Введение

Работа посвящена методу решения стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом. Задача фильтрации сформулирована в виде вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов, каждый из которых является суперпозицией выпуклого липшиц-непрерывного функционала и линейного непрерывного оператора. Для решения подобных вариационных неравенств второго рода в работах [1–3] предложены итерационные методы расщепления. Основную трудность при этом представляет решение возникающих на каждой итерации задач минимизации. Для изотропного случая эту задачу удалось решить в явном виде (см. [5]) благодаря тому, что можно эффективно вычислить субдифференциал функционала, сопряженного к минимизируемому. В случае же анизотропного закона фильтрации, когда минимизируемый функционал является суммой нескольких функционалов, вычислить сопряженный функционал не удается. В настоящей работе предложен алгоритм расщепления, позволяющий обойти указанную трудность. Каждый шаг метода сводится фактически к решению краевой задачи с линейным сильно эллиптическим оператором.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в R^m, $m \geqslant 1$, с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$, $\operatorname{mes} \Gamma_2 > 0$. Рассматривается краевая задача

$$\operatorname{div} v(x) = \widetilde{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$(v(x), \mathbf{n}) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma_2, \tag{1.2}$$

$$v_l(x) \in -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_{kl}^{(i)} g_i \left(D_i^2(u(x)) \right) \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}, \quad l = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{1.3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-01-00676, 09-01-00814).

где $D_i^2(u) = (\Upsilon_i \nabla u, \nabla u)$, $\Upsilon_i = \{\alpha_{k\,l}^{(i)}\}_{k,\,l=1}^m$, $\widetilde{f}$ — заданная функция, характеризующая плотность внешних источников, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ_1, $\xi \to g_i(\xi^2)\,\xi$ — функции, определяющие закон фильтрации.

Предполагаем, что $g_i(\xi^2)\xi = g_{i0}(\xi^2)\,\xi + g_{i1}(\xi^2)\,\xi$, где $\xi \to g_{i0}(\xi^2)\xi$ — однозначные функции, удовлетворяющие условиям

$$g_{i0}(\xi^2)\,\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi \leqslant \beta_i, \quad j = 0,1 \quad \beta_i > 0 \text{ — предельные градиенты,} \tag{1.4}$$

$$c_{1\,i}\,(\xi - \beta_i) \leqslant g_{i0}(\xi^2)\,\xi \leqslant c_{2\,i}\,\xi, \quad \xi \geqslant \beta_i, \quad c_{1\,i}, c_{2\,i} > 0, \tag{1.5}$$

$$\xi \to g_{i0}(\xi^2)\,\xi \text{ непрерывные, не убывающие функции,} \tag{1.6}$$

$$|\,g_{i0}(\xi^2)\,\xi - g_{i0}(\eta^2)\,\eta\,| \leqslant c_{3i}\,|\,\xi - \eta\,|, \tag{1.7}$$

$\xi \to g_{i1}(\xi^2)\,\xi$ — многозначные функции, имеющие вид

$$g_{i1}(\xi^2)\,\xi = \vartheta_i\,h(\xi - \beta_i), \quad h(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [\,0,1\,], & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $h(\xi)$ — субдифференциал функции μ,

$$\mu(t) = t^+ = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

в точке ξ :

$$\mu(\zeta) - \mu(\xi) \geqslant \xi^*\,(\,\zeta - \xi\,) \qquad \forall\,\zeta \in R^1,\ \forall\,\xi^* \in h(\xi). \tag{1.8}$$

Относительно коэффициентов $\alpha_{k\,l}^{(i)}$ предполагаем, что для всех $i, k, l = 1, 2, \ldots, m$

$$\alpha_{kl}^{(i)} = \alpha_{lk}^{(i)}, \quad \sum_{k,\,l=1}^m \alpha_{kl}^{(i)}\,\xi_k\,\xi_l \geqslant c_{4i} \sum_{k=1}^m \xi_k^2,\ c_{4\,i} > 0, \quad \alpha_{k\,l}^{(i)} \leqslant c_{5i}\,. \tag{1.9}$$

Обозначим

$$(\xi,\zeta)_i = (\Upsilon_i \xi, \zeta) = \sum_{k,\,l=1}^m \alpha_{kl}^{(i)}\,\xi_k\,\zeta_l. \tag{1.10}$$

В силу условий (1.9) соотношение (1.10) порождает скалярное произведение в R^m. Поэтому для любых функций u, η имеют место неравенства

$$(\Upsilon_i \nabla u, \nabla\eta) \leqslant D_i(u)\,D_i(\eta), \qquad D_i^2(u) \leqslant c_{6i}\,|\nabla u|^2,\ c_{6i} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

§ 2. Вариационная постановка задачи

Перейдем теперь к построению вариационной формулировки задачи (1.1)–(1.3). Пусть u и v — решение этой задачи. Соотношение (1.3) означает, что для $l = 1, 2 \ldots, m$

$$v_l(x) = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_{kl}^{(i)} \left[\, g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))}\,\right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,, \tag{2.1}$$

где $\chi_{iu}(x) \in \vartheta_i\, h(\, D_i(u(x)) - \beta_i\,)$, $x \in \Omega$. Обозначим через $C^{\infty}_{\Gamma_2}(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, равных нулю в окрестности Γ_2. Учитывая (1.2) и (2.1), имеем, что

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, \eta(x)\, dx = -\int_\Omega (v(x), \nabla\eta(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\int_\Omega \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_{kl}^{(i)} \left[g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\, \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega \left[g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \right] \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_{kl}^{(i)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\, \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega \left[g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \right] \big(\nabla u(x),\, \nabla\eta(x)\big)_i\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) \big(\nabla u(x),\, \nabla\eta(x)\big)_i\, dx +$$

$$+ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \big(\nabla u(x),\, \nabla(\eta(x)+u(x))\big)_i\, dx -$$

$$- \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega \chi_{iu}(x)\, D_i(u(x))\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) \big(\nabla u(x),\, \nabla\eta(x)\big)_i\, dx +$$

$$+ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega \chi_{iu}(x) \Big[D_i(u(x)+\eta(x)) - D_i(u(x)) \Big]\, dx \qquad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_2}(\Omega).$$

Так как $\chi_{iu}(x) \in \vartheta_i\, h(|\nabla u(x)| - \beta_i\,)$, то в силу (1.8) получаем

$$\chi_{iu}(x) \Big[D_i(u(x)+\eta(x)) - D_i(u(x)) \Big] =$$

$$= \chi_{iu}(x) \Big[(D_i(u(x)+\eta(x)) - \beta_i) - (D_i(u(x)) - \beta_i)\, D_i(u(x)) \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \vartheta_i \Big[\mu\,(D_i(u(x)+\eta(x)) - \beta_i) - \mu\,(D_i(u(x)) - \beta_i) \Big], \quad x \in \Omega,$$

следовательно,

$$\int_\Omega \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx = \int_\Omega (v(x), \nabla\eta(x))\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \int_\Omega g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right) \big(\nabla u(x),\, \nabla\eta(x)\big)_i\, dx +$$

$$+ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \vartheta_i \int_\Omega \mu\,(D_i(u(x)+\eta(x)) - \beta_i)\; dx -$$

$$- \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \vartheta_i \int_\Omega \mu\,(D_i(u(x)) - \beta_i)\; dx \qquad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_2}(\Omega). \tag{2.2}$$

Итак, мы установили, что если функции u, v удовлетворяют соотношениям (1.1)–(1.3), то функция u удовлетворяет неравенству (2.2).

Пусть $V = \{\eta \in W_2^1(\Omega) : \eta = 0, x \in \Gamma_2\}$ — пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u,\eta)_V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega \big(\Upsilon_i \nabla u, \nabla \eta\big)\, dx = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega \big(\nabla u, \nabla \eta\big)_i\, dx\,.$$

Обозначим

$$a_i(u,\eta) = \int_\Omega g_{i0}\left(D_i^2(u(x))\right)\big(\nabla u(x),\, \nabla \eta(x)\big)_i\, dx\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Из (1.4), (1.5) следует, что формы $a_i(\cdot,\cdot)$ ограничены по второму аргументу, а значит, порождают операторы $A_i : V \to V$ по формулам

$$(A_i u, \eta)_V = a_i(u,\eta) = \int_\Omega g_{i\,0}\left(D_i^2(u)\right)\big(\Upsilon_i \nabla u, \nabla \eta\big)\, dx, \quad u, \eta \in V.$$

Определим теперь оператор $A_0 : V \to V$ следующим образом:

$$(A_0 u, \eta)_V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (A_i u, \eta)_V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega g_{i\,0}\left(D_i^2(u)\right)\big(\Upsilon_i \nabla u, \nabla \eta\big)\, dx. \tag{2.3}$$

Далее, обозначив $\Omega_{iu} = \{x \in \Omega : D_i(u(x)) > \beta_i\}$, имеем

$$\Big| \int_\Omega \mu\left(D_i(u(x)) - \beta_i\right) dx \Big| = \int_{\Omega_{iu}} \left(D_i(u(x)) - \beta_i\right) dx \leqslant [\,\mathrm{mes}\,\Omega\,]^{1/2}\, \|u\|_V,$$

то есть на V определены функционалы F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, по формулам

$$F_i(u) = \frac{1}{m}\, \vartheta_i \int_\Omega \mu\left(D_i(u(x)) - \beta_i\right) dx = \frac{1}{2\,m} \int_\Omega \int_0^{D_i^2(u)} g_{i\,1}(\xi)\, d\xi\, dx.$$

Таким образом, в соответствии с (2.2) под решением стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации, будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$(A_0 u - f, \eta - u)_V + \sum_{i=1}^{m} F_i(\eta) - \sum_{i=1}^{m} F_i(u) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V, \tag{2.4}$$

где элемент $f \in V$ определяется по формуле $(f,\eta)_V = \displaystyle\int_\Omega \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx.$

Вариационное неравенство (2.4) может быть записано в виде:

$$(A_0 u - f, \eta - u)_V + \sum_{i=1}^{m} G_i\big(B_i \eta\big) - \sum_{i=1}^{m} G_i\big(B_i u\big) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V, \tag{2.5}$$

где $F_i = G_i \circ B_i$, функционалы G_i определены на $H = \big[L_2(\Omega)\big]^m$ по формулам

$$G_i(z) = \frac{1}{2\,m} \int_\Omega \int_0^{|\,z\,|^2} g_{i\,1}(\xi) d\xi\, dx = \frac{1}{m} \int_\Omega \int_0^{|\,z\,|} g_{i\,1}(\xi^2)\, \xi\, d\xi\, dx,$$

являются выпуклыми, липшиц-непрерывными, $B_i = \Upsilon_i^{1/2}\, \nabla : V \to H$ — линейные, непрерывные операторы.

Лемма 1. *Пусть* $A_i : V \to V$ *— обратно сильно монотонные операторы* (см. [7]) *с постоянными* σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *то есть*

$$(A_i u - A_i \eta, u - \eta)_V \geqslant \sigma_i\, \|A_i u - A_i \eta\,\|_V^2, \quad \sigma_i > 0 \qquad \forall\, u, \eta \in V. \tag{2.6}$$

Тогда оператор $A_0 : V \to V$, $A_0 = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} A_i$, *также является обратно сильно монотонным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку операторы A_i, $i=1,2,\dots,m$, являются обратно сильно монотонными, то для любых $u,\eta\in V$

$$(A_iu-A_i\eta,u-\eta)_V\geqslant\min_{i=1,2,\dots,m}\{\sigma_i\}\,\|\,A_iu-A_i\eta\,\|_V^2. \tag{2.7}$$

Суммируя неравенства (2.7) по $i=1,2,\dots,m$, получаем

$$\big(A_0u-A_0\eta,u-\eta\big)_V=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\Big(A_iu-A_i\eta,u-\eta\Big)_V\geqslant\frac{1}{m}\min_{i=1,2,\dots,m}\{\sigma_i\}\sum_{i=1}^m\|A_iu-A_i\eta\|_V^2\,.$$

Отсюда в силу очевидного неравенства $\|\,u_1\,\|_V^2+\|\,u_2\,\|_V^2+\dots+\|\,u_m\,\|_V^2\geqslant\|\,u_1+u_2+\dots+u_m\,\|_V^2/m$, справедливого для любых $u_1,u_2,\dots,u_m$, имеем

$$\big(A_0u-A_0\eta,u-\eta\big)_V\geqslant\frac{1}{m^2}\min_{i=1,2,\dots,m}\{\sigma_i\}\,\Big\|\sum_{i=1}^mA_iu-\sum_{i=1}^mA_i\eta\Big\|_V^2=$$

$$=\min_{i=1,2,\dots,m}\{\sigma_i\}\,\Big\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^mA_iu-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^mA_i\eta\Big\|_V^2\quad\forall\,u,\eta\in V,$$

то есть оператор A_0 является обратно сильно монотонным с константой $\sigma_0=\min\limits_{i=1,2,\dots,m}\{\sigma_i\}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.4)–(1.7). *Тогда вариационное неравенство* (2.5) *имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений.*

Если u — решение вариационного неравенства (2.5), *то существует функция $v\in H$ такая, что почти всюду на Ω выполнены включения* (1.3), *и имеет место уравнение неразрывности*

$$\int_\Omega(v(x),\nabla\eta(x))\,dx=\int_\Omega\widetilde{f}(x)\,\eta(x)\,dx\qquad\forall\,\eta\in C^\infty_{\Gamma_2}(\Omega). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [6] установлено, что при выполнении условий (1.4)–(1.7) операторы A_i являются обратно сильно монотонными и коэрцитивными. Из леммы 1 вытекает, что определенный в (2.3) оператор A_0 — обратно сильно монотонный, то есть

$$(A_0u-A_0\eta,u-\eta)_V\geqslant\sigma_0\,\|A_0u-A_0\eta\|_V^2\,,\quad\sigma_0>0\quad\forall\,u,\eta\in V, \tag{2.9}$$

поэтому он является монотонным, а также липшиц-непрерывным с константой $1/\sigma_0$. Из коэрцитивности A_i следует, что оператор A_0 также коэрцитивен. В [6] доказано также, что F_i — выпуклые, липшиц-непрерывные функционалы. Перечисленные свойства оператора A_0 и функционалов F_i обеспечивают непустоту, выпуклость и замкнутость множества решений вариационного неравенства (2.4) (см. [9, 10]).

Пусть теперь u — решение вариационного неравенства (2.5), которое согласно определению субдифференциала эквивалентно включению

$$f-A_0u\in\partial\Big(\sum_{i=1}^mF_i(u)\Big). \tag{2.10}$$

Поскольку функционалы F_i выпуклы и непрерывны, то (см. [10])

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^mF_i(u)\Big)=\sum_{i=1}^m\partial F_i(u).$$

Проводя рассуждения, подобные содержащимся в [8], имеем, что в точке u субдифференциал функционала F_i есть множество линейных непрерывных на V функционалов l_i вида

$$(l_i u, \eta)_V = \frac{1}{m} \int_\Omega \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \, (\nabla u(x), \nabla \eta(x))_i \, dx \qquad \eta \in V,$$

где $\chi_{iu} \in L_\infty(\Omega)$,

$$\chi_{iu}(x) \in \vartheta_i \, h(\, D_i(u(x)) - \beta_i \,). \tag{2.11}$$

Поэтому соотношение (2.10) означает, что выполнено равенство

$$\int_\Omega \widetilde{f}(x) \, \eta(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_\Omega \left[g_{i0} \left(D_i^2(u(x)) \right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \right] \big(\nabla u(x), \, \nabla \eta(x)\big)_i \, dx =$$

$$= \frac{1}{m} \int_\Omega \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_{kl}^{(i)} \left[g_{i0} \left(D_i^2(u(x)) \right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \, \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_l} \, dx =$$

$$= \int_\Omega (v(x), \nabla \eta(x)) \, dx,$$

где

$$v_l(x) = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_{kl}^{(i)} \left[g_{i0} \left(D_i^2(u(x)) \right) + \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))} \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \, , \; l = 1, 2 \ldots, m \, ,$$

причем $v \in H$ при выполнении условий (1.4)–(1.7).

Таким образом, вектор-функция v удовлетворяет уравнению неразрывности (2.8), а в силу (2.11) — соотношениям (1.3). Теорема доказана.

§ 3. Итерационный метод

Для решения вариационного неравенства (2.5) рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)} \in V$, $y_i^{(0)} \in H$, $\lambda_i^{(0)} \in H$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y_i^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$ как

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau \big[A_0 u^{(k)} - f + r \sum_{i=1}^m B_i^* B_i u^{(k)} + \sum_{i=1}^m B_i^* \big(\lambda_i^{(k)} - r y_i^{(k)} \big) \big]. \tag{3.1}$$

Затем находим $y_i^{(k+1)}$, решая задачи минимизации

$$r \left(y_i^{(k+1)}, \, z_i - y_i^{(k+1)} \right)_H + G_i(z_i) - G_i \big(y_i^{(k+1)} \big) \geqslant$$

$$\geqslant \left(r \, B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}, \, z_i - y_i^{(k+1)} \right)_H \quad \forall \, z_i \in H, \quad i = 1, 2, \ldots, m \, . \tag{3.2}$$

Наконец, вычисляем $\lambda_i^{(k+1)}$ по формуле

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r \big[\, B_i u^{(k+1)} - y_i^{(k+1)} \, \big] \, , \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.3}$$

Здесь $\tau > 0$ и $r > 0$ — итерационные параметры, $B_i^* : H \to V$ — сопряженные к B_i операторы:

$$(B_i^* y_i, \eta)_V = (y_i, B_i \eta)_H \quad \forall \, \eta \in V, \; y_i \in H.$$

Кроме того, будем предполагать, что выполняется равенство

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(B_i u, B_i \eta)_H = (u,\eta)_V \qquad \forall\, u,\eta \in V\,.$$

Из результатов работы [4] вытекает, что справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.4)–(1.7), $0 < \tau < \dfrac{2\,\sigma_0}{2m\sigma_0\, r+1}$, *итерационная последовательность* $\left\{u^{(k)}, y_1^{(k)},\ldots,y_m^{(k)},\lambda_1^{(k)},\ldots,\lambda_m^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ *построена согласно* (3.1)–(3.3). *Тогда* $u^{(k)}$ *сходится слабо в* V *к* u^* *при* $k\to+\infty$, *где* u^* — *решение вариационного неравенства* (2.5), $y_i^{(k)}$ *сходятся слабо в к* $B_i\, u^*$ *при* $k\to+\infty$, *и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty}\left\| y_i^{(k)} - B_i\, u^{(k)}\right\|_H = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

§ 4. Реализация итерационного метода для задач анизотропной фильтрации

Рассмотрим особенности применения итерационного метода (3.1)–(3.3) для решения рассматриваемых задач анизотропной фильтрации.

Для определения $u^{(k+1)}$ необходимо сначала решить краевую задачу

$$\left\{\begin{array}{c} Rs = f - A_0 u^{(k)} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_i^*(\lambda_i^{(k)} - r p_i^{(k)}) + mr\, Ru^{(k)}, \quad x\in\Omega, \\ (s(x),\mathbf{n}) = 0, \quad x\in\Gamma_1\,, \quad s(x)=0, \quad x\in\Gamma_2\,, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

где $R = -\mathrm{div}\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\Upsilon_{\mathrm{i}}\nabla$, а затем положить $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau\, s$. Отметим, что в нашем случае $B_i^* = -\mathrm{div}\circ\Upsilon_{\mathrm{i}}^{1/2}$.

При численной реализации итерационного метода основную трудность представляет решение задач минимизации (3.2). Запишем их в виде:

$$(r\, B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}, z_i - y_i^{(k+1)})_H \leqslant$$

$$\leqslant G_i(z) + \frac{r}{2}\,\|z\|_H^2 - G_i(y_i^{(k+1)}) + \frac{r}{2}\left\|y_i^{(k+1)}\right\|_H^2 \quad \forall\, z_i\in H \tag{4.2}$$

или

$$(r\, B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}, z_i - y_i^{(k+1)})_H \leqslant G_{i\,r}(z_i) - G_{i\,r}(y_i^{(k+1)}) \quad \forall\, z_i\in H, \tag{4.3}$$

где $G_{i\,r}(z_i) = G_i(z_i) + \dfrac{r}{2}\,\|z_i\|_H^2$. Используя определение субдифференциала $\partial\, G_{i\,r}$, запишем (4.3) в виде:

$$r\, B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)} \in \partial\, G_{i\,r}(y_i^{(k+1)}). \tag{4.4}$$

Известно, что $q\in\partial\, G_r(z)$ тогда и только тогда, когда $z\in\partial\, G_r^*\,(q)$, где G_r^* — сопряженный к G_r функционал. Поэтому включение (4.4) эквивалентно следующему:

$$y_i^{(k+1)} \in \partial\, G_{i\,r}^*(r\, B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}).$$

Функционал $G_{i\,r}^*$ является выпуклым и дифференцируемым по Гато, субдифференциал этого функционала состоит из единственного элемента, совпадающего с его градиентом, $((G_{i\,r}^*)'z, y)_H = g_{i\,r}^*(|z|^2)z$, где

$$g_{i\,r}^*(\xi^2)\xi = \left\{\begin{array}{cl} \xi/r, & \xi\leqslant r\,\beta_i, \\ \beta_i, & r\,\beta_i < \xi \leqslant r\,\beta_i + \vartheta_i/m, \\ (\xi-\vartheta_i/m)/r, & \xi > r\,\beta_i + \vartheta_i/m. \end{array}\right.$$

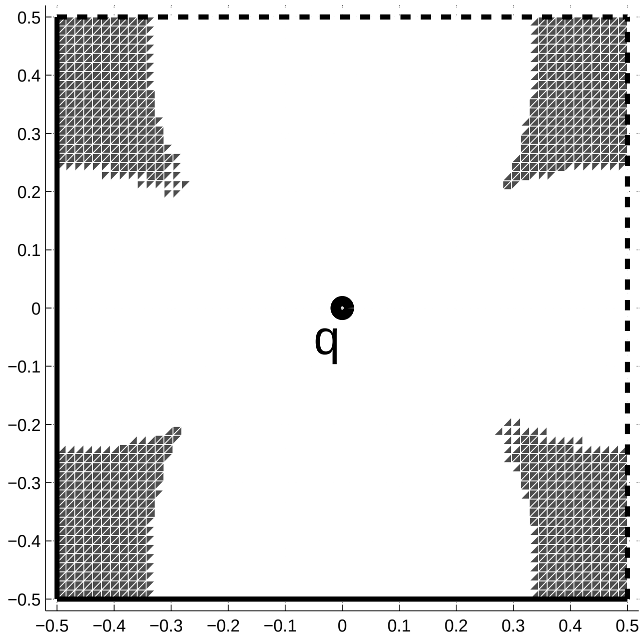

Рис. 1. Области, где скорость фильтрации равна нулю

Поэтому решения задачи (3.2) имеют вид $y_i^{(k+1)} = g_{i\,r}^{*}(\,|q|^2\,)\,q$, где $q = r\,B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, m$.

Таким образом, каждый шаг рассматриваемого итерационного метода сводится фактически к решению краевой задачи (4.1) с линейным сильно эллиптическим оператором.

§ 5. Численные эксперименты

Предложенный в работе метод был реализован численно. Рассматривалось течение в двумерной области $\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$, в центре которой находится скважина с дебитом $q = 2$, $\Gamma = \Gamma_2$. Матрицы Υ_i выбирались равными

$$\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $\xi \to g_{i0}(\,\xi^2\,)\,\xi$ задавались соотношениями

$$g_{i0}(\,\xi^2\,)\xi = \begin{cases} 0 & \xi \leqslant \beta_i\,, \\ \xi - \beta_i & \xi \geqslant \beta_i\,, \end{cases} \quad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0.7.$$

Кроме того, полагалось $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0.7$. Предварительно строилась конечно-элементная аппроксимация с помощью кусочно-линейных функций на треугольных элементах, построенных разбиением сторон квадрата на равные части и проведением диагоналей, параллельных биссектрисе первого и третьего координатных углов. Число разбиений составило 64×64. На рис. 1 темным цветом закрашены конечные элементы, на которых скорость фильтрации равна нулю. Наименьшее количество итераций равнялось 57 при $\tau = 0.6$, $r = 0.5$. В отличие от изотропного случая, для рассматриваемой анизотропной задачи наблюдается асимметричный характер течения.

Предложенный численный метод может быть применен при решении конкретных стационарных задач фильтрации — задач фильтрации несжимаемых жидкостей, следующих нелинейному многозначному анизотропному закону фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Изв. ВУЗов. Матем. — 2003. — №1. — С. 20–28.
2. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами //Дифф. уравн. — 2003. — Т. 39, № 7. — С. 888–895.
3. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств //Дифф. уравн. — 2006. — Т. 48, № 7. — С. 1115–1122.
4. Исмагилов И. Н., Бадриев И. Б. О сходимости итерационного метода решения вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором // Ученые записки Казанского гос. ун-та. Физ.-мат. науки. — 2007. — Т. 149. — Кн. 4. — С. 90–100.
5. Бадриев И. Б., Задворнов О. А., Исмагилов Л. Н. Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Иссл. по прикладной математике и информатике. — Казань: Казанский гос. ун-т. — 2003. — Вып. 24. — С. 12–24.
6. Бадриев И. Б., Исмагилов И. Н. Итерационные методы решения стационарных задач анизотропной фильтрации // Труды Средневолжского матем. об-ва. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 150–159.
7. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
8. Карчевский М. М., Бадриев И. Б. Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами // Числ. методы механики спл. среды. — Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР. — 1979. — Т. 10, № 5. — С. 63–78.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979. — 400 с.

Поступила в редакцию 15.07.08

I. B. Badriev, I. N. Ismagilov, L. N. Ismagilov

On the method of solving of nonlinear stationary anisotropic filtration problems

The paper is devoted to a method of solving of stationary filtration problems of non-compressible fluid which follows the nonlinear multi-valued anisotropic law of filtration with limiting gradient. This problem mathematically is formulated in the form of variational inequality of the second kind in Hilbert space with inversely strongly monotone operator. The functional occurring in this variational inequality is a sum of several lower semi-continuous convex proper functionals. For solving the considered variational inequality the splitting method is offered.

Keywords: theory of filtration, mathematical modeling, variational inequalities, inversely strongly monotone operator, iterative method.

Mathematical Subject Classifications: 65N12, 65N30, 76S05

Бадриев Ильдар Бурханович, д. ф.-м. н., профессор, Казанский государственный ун-т, 420008, Россия, Казань, ул. Кремлевская, 18, E-mail: Ildar.Badriev@ksu.ru

Исмагилов Ирек Наилевич, аспирант, Казанский государственный ун-т, 420008, Россия, Казань, ул. Кремлевская, 18, E-mail: Irek.Ismagilov@mail.ru

Исмагилов Линар Наилевич, к. ф.-м. н., ст. преп. Казанский государственный ун-т, 420008, Россия, Казань, ул. Кремлевская, 18, E-mail: Linar.Ismagilov@mail.ru