КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 449–465.

УДК 004.89, 519.157, 519.161

© *М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, О. О. Макаров*

ВЫБОР АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОАГЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА РЕШЕНИИ БЛИЗКИХ ЗАДАЧ

В работе рассматривается проблематика снижения сложности NP-трудных задач с помощью использования близких задач, для которых оптимальное или приемлемое решение уже известно. Для задач многоагентной маршрутизации применяется методика, основанная на кластеризации сети, согласованной с маршрутами коммивояжера на каждом кластере и построения маршрутов, учитывающих ограничение временных окон доставки. Приводится математическая модель, которой соответствует блок псевдобулевой условной оптимизации с ограничениями в виде дизъюнктивных нормальных форм, допускающей полиномиальную разрешимость и блок временных ограничений. Результаты по выбору метаэвристик на основе близких задач используются в программе по доставке товаров многими агентами потребителям, расположенным в вершинах инфраструктурной дорожной сети региона.

Ключевые слова: многоагентная задача коммивояжера, временные окна, метаэвристики, прикладная задача маршрутизации.

DOI: 10.35634/vm240309

Введение

Рассматриваемые в работе многоагентные задачи маршрутизации на сложных (большой размерности) сетевых структурах относятся к NP-трудным задачам дискретной оптимизации. Представляет интерес подход, основанный на решении близких задач, который опирается на систему «задача – близкая задача – алгоритм». В работе описаны этапы формирования решения оригинальной задачи TSP_j по близкой $\widetilde{TSP}_j$ (Traveling Salesman Problem, задача коммивояжера). В качестве близости задач понимается близость их математических моделей и близость участвующих в решении фрагментов сложной сети. Метод определения близости фрагментов (кластеров C_j) состоит в нахождении взвешенного метрического расстояния между векторами метаэвристических параметров соответствующих графов.

Выбор подходящей метаэвристики для решения локальной задачи TSP_j важен, поскольку эти алгоритмы позволяют эффективно решать задачи оптимизации всех маршрутов. Отдельной задачей становится выбор наилучшего алгоритма по метапараметрам для каждой конкретной задачи.

Ранее авторами был приведен детальный обзор способов решения близкой к $MTSP$ (Multiple Traveling Salesman Problem, задача многих коммивояжеров) задачи $VRPTW$ (Vehicle Routing Problem with Time Windows, задача маршрутизации транспортных средств с временными окнами), где критерием субоптимального решения считается сумма маршрутов коммивояжеров на каждом из кластеров C_j [1]. В [2] авторами предложен алгоритм иерархической кластеризации для $HMTSP$ (Hierarchical Multiple Traveling Salesman Problem, иерархическая задача многих коммивояжеров), приведены сравнительные результаты решателя Concorde и алгоритма имитации отжига для решения задач коммивояжера. Получено, что многоуровневая кластеризация для задач большой размерности, с последующим применением решателей TSP, способствует снижению сложности решения $MTSP$.

В данной работе приведен эксперимент, направленный на подтверждение гипотезы, что векторы метрических характеристик у близких задач находятся на небольшом расстоянии друг от друга. Также описаны вспомогательные эксперименты, показывающие максимальное допустимое различие между графами, при котором будем считать их близкими. Приведен эксперимент, подтверждающий гипотезу, что метаэвристический алгоритм, работающий оптимально для определенной задачи, будет оптимально работать и для близкой. В решении многоагентных задач типа коммивояжера большой размерности производится согласованная декомпозиция на локальные кластерные задачи маршрутизации. На локальном уровне выбираются подходящие алгоритмы.

Алгоритмы решения задачи многоагентной маршрутизации типа коммивояжера (многих коммивояжеров) опираются на метаэвристические алгоритмы решения TSP. Таким образом, в соответствии со схемой на рис. 1, предлагаемая модель интеллектуализированной системы (ИС) применима для $MTSP$, а также является основой для выбора алгоритмов решения $VRPTW$, описанной в [1].

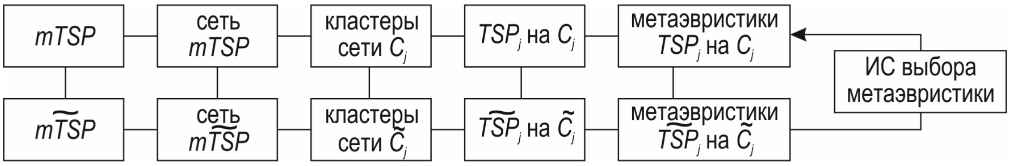


Рис. 1. Схема решения $MTSP$ по близкой задаче

Приведены результаты экспериментов по решению задач коммивояжера с использованием различных метаэвристик на данных из TSPLIB [16]. Определены эффективные алгоритмы нахождения маршрутов. Эксперимент показал, что большинство примененных метаэвристик позволяют находить приближенные или оптимальные решения. Приведен список лучших по отношению к точности алгоритмов [13], которые используются в разработке интеллектуализированной системы выбора метаэвристик, с учетом особенностей задачи (структура и сложность сети, точность, время). Следующим этапом является комбинирование метаэвристик, которое может привести к лучшим результатам.

§ 1. Специфика исследования трудноресшаемых задач

В работе [3] В. А. Лукьяненко проанализированы результаты по специфике и трудности исследования дискретных экстремальных задач, к которым относятся задачи дискретной оптимизации (ДО), комбинаторной оптимизации, псевдобулевой оптимизации или задачи выбора (некорректные задачи) и пр. Уточнение терминологии происходит на уровнях математической модели, задачи, метода, алгоритма в зависимости от специфики исходной прикладной задачи.

Ставится задача описания NP-трудных задач, близких к полиномиально разрешимым или к практически неразрешимым. Приближенное решение класса NP-трудных задач прикладной многоагентной маршрутизации ($NPMTSP$) будем связывать с процедурой сравнения класса исследуемых задач $Z \subset NPMTSP$ с близкими к ним задачами $\tilde{Z}$ из подкласса полиномиально разрешимых задач ($\tilde{Z} \in PMTSP \subset NPMTSP$) или с представителями явно полиномиально неразрешимых из $NPMTSP$.

Основной является проблема алгоритмической разрешимости NP-трудных задач; выделение полиномиально разрешимых классов задач, содержащихся в классе NP-трудных (например, полиномиально разрешимых задач коммивояжера); разработка алгоритмов приближенного решения NP-трудных задач на основе их полиномиально разрешимых подклассов. С каждым годом происходит все более тонкая классификация NP-трудных задач и пополняется список новых постановок задач, актуальных для приложений. Кроме выделения подкласса полиномиально разрешимых задач, важным является описание свойств и прецедентов заведомо трудно решаемых (неразрешимых). Распознавание NP-полных задач основывается на результатах С. Кука. Заметим, что некоторые экземпляры полиномиально разрешимых классов задач ДО требуют невообразимого времени для построения даже приближенного решения.

В задаче описания NP-трудных задач, классов, близких к полиномиально разрешимым и и выделения экземпляров практически неразрешимым, возникает проблема выбора и определения близости. Введение метрик для близких задач и для соответствующих пространств решений существенно зависит от специфики самих задач, свойств множеств ограничений, целевых функций, геометрии соответствующих множеств [4, 5].

Применяемый комбинаторно-геометрический подход кроме наглядности связан с изучением комбинаторно-геометрических свойств NP-трудных задач и соответствующей интерпретацией алгоритмов решения [6, с. 355–362]. В этом подходе рассматривается система «задача – алгоритм», которая исследовалась, начиная с работ Ю. И. Журавлева [7] в направлении получения оценок сложности задач и алгоритмов. Представляет интерес исследование классов близких задач в самых разных вариантах.

Подход близких решений, основанный на решении близких задач, опирается на систему «задача – близкая задача – алгоритм». В частности, для геометрического конструктивизма в [4] приводится ссылка на работу Й. Моравека, в которой «формализуется класс алгоритмов, основанных на линейных сравнениях, и предпринимается попытка получения нижних оценок числа сравнений, необходимых для решения задачи». Здесь термины «сравнение», «близость» являются базовыми.

Для исследования труднорешаемой задачи, получения какой-либо информации о решении, может использоваться близкая простая (эталонная) задача, для которой имеется решение. Для этого исследуемую задачу включают в некоторое специальным образом построенное однопараметрическое семейство задач (гомотопирующее изучаемую задачу к эталонной), а затем это решение приближают по параметру к отыскиваемому решению исходной задачи. В работе [8] таким способом метод продолжения по параметру применен к исследованию различных классов экстремальных задач, в частности, к задачам математического программирования. Предполагается, что входящие в задачу отображения (функционалы, функции) определены в гильбертовых или банаховых пространствах и гладкие (дифференцируемые по Фреше, Гато или липшицевы).

Параметризация экстремальных задач может быть основана на необходимом условии экстремума, представленного в виде операторного уравнения $A(z) = 0$.

Пусть это операторное уравнение удалось включить в однопараметрическое семейство уравнений $A(z, \lambda) = 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, гладко зависящее от параметра λ. Причем $A(z, 0) = 0$ имеет решение z_0 и $A(z, 1) = A(z)$. Если $z(\lambda)$ продолжимо на промежуток $[0, 1]$, то $z(1)$ будет решением уравнения $A(z) = 0$. Гомотопический метод сводит решение уравнения $A(z) = 0$ к решению близкого (эталонного) уравнения $\tilde{A}(z) = A(z, 0)$. Наиболее простая связь между $\tilde{A}(z)$ и $A(z)$ определяется однопараметрическим семейством вида $\lambda A(z) + (1 - \lambda)\tilde{A}(z) = 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, где эталонное уравнение $\tilde{A}(z)$ строится на основе имеющейся информации об исследуемом уравнении $A(z)$ (более простое по структуре; обеспечивающее близость решений z и $\tilde{z}$, $\tilde{A}(\tilde{z}) = 0$; оценку погрешности). С однопараметрическим семейством задач связан подход, применяемый в работах по теории расписаний [9].

Подход, основанный на близости задач и решений, применяется для разнообразных задач. Так, для построения приближенных решений уравнений используется схема Ю. И. Черского о приближенном решении линейных уравнений [10]. Соответствующие теоремы [10] и их обобщения с успехом применялись для приближенного решения краевых задач теории аналитических функций, систем линейных алгебраических уравнений, интегральных уравнений типа свертки, в том числе первого рода, уравнений типа Урысона и экстремальных задач, соответствующих некорректным труднорешаемым задачам уравнений первого рода [11]. Следование алгоритмам схемы Ю. И. Черского обеспечивает близость решений задач, моделей, структур. Здесь метрический подход базируется на метриках соответствующих нормированных (банаховых) пространств. Позволяет выделять классы задач, близких по решениям, входным данным в операторах преобразований. Возможны оценки погрешности решения задачи через решение близкой задачи на базе выбранной метрики.

Свою специфику вносят задачи дискретной оптимизации на графах. Экстремальные задачи на графовых структурах большой размерности предполагают сравнение с прецедентами; построение вспомогательных структур, удовлетворяющих заданным свойствам и обеспечивающих полиномиальную разрешимость. В реальности возникают задачи на сложных структурах (качественных и количественных) для объектов и взаимодействующих агентов. Исследуемым реальным объектам ставятся в соответствие модели, задачи, наборы ограничений, предписаний, оценки экспертов и пр. Объекты, как правило, являются многопризнаковыми. Соответствующие признаки при формализации переносятся на модели и задачи. Тем самым, выделение требуемого класса задач связывается со сравнениями на близость по многим признакам (параметрам, векторам). Необходимая близость обеспечивается выбором соответствующих метрик. В этом случае подходящим математическим инструментом являются разработанные А. Б. Петровским [12] теоретические и практические положения мультимножеств. Существует выбор различных способов выделения метрик (псевдометрик) на σ-алгебрах измеримых множеств и мультимножеств. Для рассматриваемой проблематики применимы различные разновидности иерархического и неиерархического кластерного анализа, в частности, для задач классификации и упорядочения многопризнаковых объектов, которые могут существовать в нескольких вариантах с отличающимися значениями количественных и качественных признаков. Рассмотренные подходы могут быть перспективными для выделения классов полиномиально разрешимых задач, близких к NP-трудным; позволяют строить цепочки задач, алгоритмические процедуры приближенного решения и сложностные карты NP-трудных задач.

Для рассматриваемых многоагентных задач маршрутизации $MTSP$ близость двух задач определяется по взвешенной норме разности наборов метрических характеристик графовых структур сети, близости гистограмм распределения дуг. В каждом конкретном случае выбираются качественные и количественные показатели и метрики для сравнений [3].

Наиболее общей является модель в виде NP-полной задачи на условный экстремум (комбинаторной оптимизации, целочисленного программирования, псевдобулевой условной оптимизации), которая является формализацией некоторой экстремальной задачи на графе (сложной сети). Близкими математическими моделями будем называть такие модели, которым отвечают близкие операторы задач на условный экстремум, решения которых будут близки в некоторой метрике. Например, целевые функции совпадают, а соответствующие операторы ограничений близки по норме; ограничения совпадают, а целевые функции отличаются; для задач псевдобулевого программирования с дизъюнктивными ограничениями изменение параметров сети (добавление вершин или запрет на прохождение дуги) приводит к задачам реоптимизации и другим (см. [3]).

§ 2. Определение степени близости задач для выбора метаэвристических алгоритмов

Представим множество метрических характеристик M задач маршрутизации (TSP в частности) в виде векторов в n-мерном пространстве и будем находить метрическое расстояние между векторами, например, евклидово или косинусное расстояния. Тогда в определенных условиях две задачи и их решения тем ближе, чем меньше расстояние между их векторами метрических характеристик M. При анализе компонент вектора метрических данных M учитывается степень важности каждой компоненты (характеристики). Определенные характеристики более важны для описания структуры задачи, что задает иерархию этих данных. Это связано с тем, что характеристики конкретного графа лучше описывают структуру задачи, чем другие, имеющие локальное значение. Данный факт учитывается при нахождении степени близости задач. Приоритет каждой из компонент характеристик может изменяться в зависимости от условий, при которых происходит расчет близости. Как правило, приоритизация не всегда является автоматизированной и задается экспертом для каждого отдельного случая.

О. О. Макаровым в [13] приведен вычислительный эксперимент сравнительного анализа по выбору метаэвристик в близких задачах маршрутизации. Исследованы 50 метаэвристик, выделен ряд наиболее предпочтительных для класса задач маршрутизации. Одним из универсальных является алгоритм типа Балаша–Кристофидиса [14]. Представлена схема заполнения баз данных с результатами работы лучших метаэвристических алгоритмов для графов различной структуры. Эксперимент ставился на различных графах из датасетов TSPLIB [16] и SOLOMON [15]. Дано подробное описание программного комплекса автоматизации пополнения базы данных по применению различных метаэвристик для графов определенной структуры. Предложен алгоритм нахождения взвешенного расстояния между векторами из M. Задается вектор весовых параметров w, определяющий важность значения компоненты M, находящейся на определенной позиции. В данном подходе значения каждого из признаков сортируются по убыванию степени важности. В качестве весов выбирается убывающая последовательность $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_N \geqslant 0$, где $w_j \in [0,1]$. Функция близости имеет вид:

$$d(x,\tilde{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2 (\tilde{x}_i - x_i)^2 \right)^{1/2}, \tag{2.1}$$

где x, $\tilde{x}$ — векторы метрических характеристик, n — размерность вектора. Такой подход позволяет учитывать факт неравноценности метрических характеристик M графов.

Близкий граф генерируется алгоритмом 1.

Алгоритм 1. Graph disturbance

Вход: Исходный граф G (вершины графа задаются координатами векторов из $\mathbb{R}^l$), мера возмущения eps

Выход: Возмущенный граф $\tilde{G}$

1. Получить массив d векторов размерности l случайных значений в диапазоне $[-1,1]$.
2. Умножить каждое значение из d на eps.
3. Создать $\tilde{G}$ как копию графа G.
4. Сложить каждую точку из $\tilde{G}$ с соответствующей точкой вектора из d.
5. Вернуть найденный граф $\tilde{G}$.

Для проверки гипотезы о соответствии малости расстояния у двух близких задач проводится *эксперимент*:

1. Взять тестовый граф G.
2. Сгенерировать новый близкий граф $\tilde{G}$, применив Алгоритм 1 к G.
3. Вычислить метрические характеристики M графа G и $\tilde{M}$ графа $\tilde{G}$.
4. Вернуть расстояние между M и $\tilde{M}$ по формуле (2.1).

Подобным образом проверяется гипотеза об оптимальности метаэвристического алгоритма для близких задач. Для подтверждения этой гипотезы проводится эксперимент по следующей схеме:

1. Взять тестовый граф G, для которого уже известен наилучший из рассматриваемых метаэвристический алгоритм A.

2. Сгенерировать новый граф $\tilde{G}$, применив Алгоритм 1 к G.

3. Найти оптимальную метаэвристику $\tilde{A}$ для графа $\tilde{G}$.

4. Вернуть $A == \tilde{A}$.

Если эксперимент в большинстве случаев показывает, что $A \equiv \tilde{A}$, то гипотеза подтверждена. Подобный эксперимент (Алгоритм 2) ставится и для определения расстояния, когда графы перестают быть близкими. В результате работы Алгоритма 2 находится минимальное расстояние с точностью ϵ, при котором графы перестают быть близкими.

Алгоритм 2. Graph max disturbance

Вход: Исходный граф G, мера возмущения ϵ, шаг подбора возмущения $step$

Выход: Расстояние, при котором графы перестают быть близкими

1. Взять тестовый граф G, для которого уже известен метаэвристический алгоритм A.
2. Сгенерировать граф $\tilde{G}$, применив Алгоритм 1 к G с параметром ϵ.
3. Найти оптимальную метаэвристику $\tilde{A}$ для графа $\tilde{G}$.
4. Если $A == \tilde{A}$, то $\epsilon = \epsilon + step$ и перейти на шаг 2.
5. Вычислить метрические характеристики M графа G и $\tilde{M}$ графа $\tilde{G}$.
6. Вернуть расстояние между M и $\tilde{M}$ по формуле (2.1).

Проверка устойчивости решения задачи проводится с помощью Алгоритма 3.

Алгоритм 3. Graph solution stability

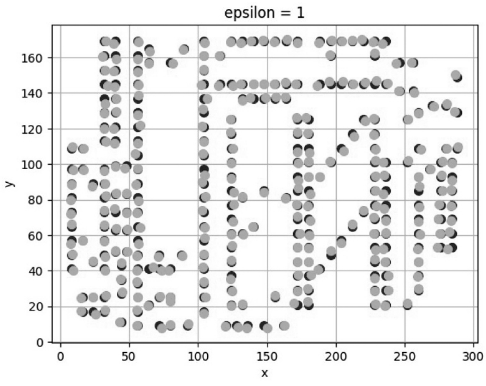
Вход: Исходный граф G, оптимальное решение S, мера возмущения ϵ, шаг подбора возмущения $step$, окрестность, при которой решение считается устойчивым, ω, количество итераций I

Выход: Устойчивое или неустойчивое решение

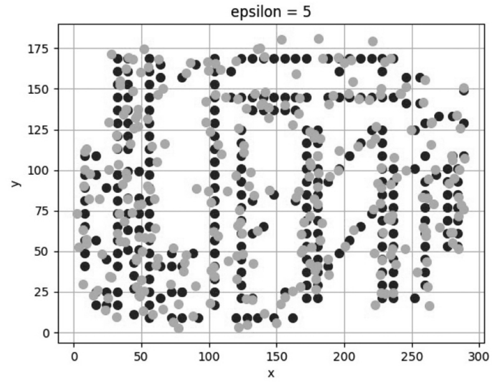
1. Инициализировать счетчик итераций $i = 0$.
2. Проверить количество итераций; если $i > I$, то перейти на шаг 7.
3. Сгенерировать граф $\tilde{G}$, применив Алгоритм 1 к G с параметром ϵ.
4. Найти оптимальное решение $\tilde{S}$ для графа $\tilde{G}$, используя оптимальное решение S как начальное решение.
5. Увеличить счетчик итераций $i = i + 1$.
6. Если различие в решениях в пределах допустимой окрестности $\|\tilde{S} - S\| < \omega$, то $\epsilon = \epsilon + step$ и перейти на шаг 2. Если нет, то вернуть $False$ и завершить процедуру.
7. Вернуть $True$.

В результате работы Алгоритма 3 определяется устойчивость полученного решения на I итерациях с точностью ω. Решение считается устойчивым, если различие в полученных решениях не превышает параметр ω.

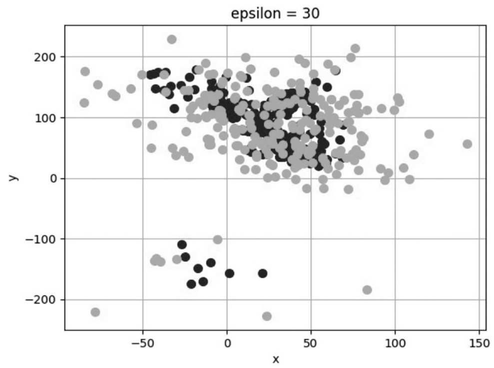
На рис. 2, *a*, *b* показано возмущение одного графа при различных значениях ϵ. Темно-серым цветом отмечен изначальный граф, светло-серым — сгенерированный. Видно, что малые возмущения влекут за собой незначительное смещение точек, граф остается почти таким же, как и был до возмущений. Но чем больше ϵ, тем сильнее новый граф отдаляется от начального.



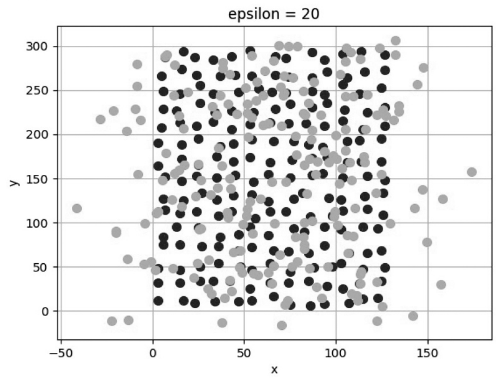
(a) Результат для a280 при $\epsilon = 1$



(b) Результат для a280 при $\epsilon = 5$



(c) Результат для gr229



(d) Результат для rat195

Рис. 2. Результаты работы Алгоритма 3 при различных значениях ϵ

На рис. 2 *c*, *d* приведены некоторые характерные случайно сгенерированные близкие графы, на которых проводился эксперимент. На данных рисунках сохранен масштаб исходных графиков, возмущение также применялось на исходном масштабе. Видно, что чем больше изначальная размерность, тем менее заметны возмущения при малых ϵ. Очевидным приемом для борьбы с таким эффектом является нормализация вершин перед возмущением. Это позволяет рассматривать все вершины в одних пределах, и, следовательно, возмущение всегда будет иметь одинаковый эффект. Но при таком подходе следует учитывать значения ϵ, так как при нормализации от -1 до 1 значение $\epsilon = 1$ уже приводит к значимым возмущениям и неустойчивости решений.

Приведенные алгоритмы используются для отбора метаэвристики в программе многоагентной маршрутизации по доставке товаров.

§ 3. Задача нахождения маршрутов доставки товаров потребителям (объекты региона Республика Крым)

В данной работе агентами являются транспортные средства, для которых построение маршрутов доставки товаров приводит к модели многоагентной маршрутизации, рассмотренной выше. Решение задачи направлено на снижение транспортных расходов по доставке товаров. Существует ряд ограничений, связанных с качеством дорожной инфраструктуры, большим количеством объектов (потребителей), разбросом расстояний между поставщиками и потребителями, наличием баз (промежуточных складов) разного уровня для хранения товаров, ограниченными возможностями транспортного парка и условиями его аренды. При этом необходимо: обеспечение своевременного исполнения заявок с учетом временных окон доставки; сокращение общих расходов по доставке; уменьшение количества транспортных средств (ТС); составление оптимального расписания графиков использования имеющихся ТС. С точки зрения прикладной многоагентной маршрутизации в таких задачах нужно найти рациональные, близкие к оптимальным, решения.

Постановка задачи. В качестве исходных данных представляются: карта автомобильных дорог с отмеченными объектами поставщиков и потребителей товаров; информация о парке автотранспортных средств разного типа; заявки потребителей по товарам; матрица расстояний, привязанная к дорожной сети региона.

Инфраструктурная сеть дорог характеризуется большим графом с большим числом узлов (перекрестков, точек обслуживания), висячих вершин, точек сочленения, мостов. То есть сети дорог ставится в соответствие ориентированный граф, вершинами которого являются узлы дорожной сети региона. Каждой дуге (ребру) соответствует расстояние между вершинами (узлами) и другие характеристики дуг и вершин. Ищется набор оптимальных маршрутов агентов (ТС), начинающихся и заканчивающихся в заданных точках с учетом сетевых, агентных, оконных ограничений, депо различного уровня иерархии и других. Приведем одну из возможных математических моделей. Обзор похожих стохастических моделей можно найти в [17].

Обозначения. $G = (V, E)$ — полный ориентированный граф, где V — множество вершин, E — множество ребер;

$V = \{0\} \cup V_0$, $\{0\}$ — депо, $V_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество узлов клиента;

$v = \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ — скорость ТС на различных типах дорог;

$E = \{(i, j) | i, j \in V\}$;

l_{ij} — расстояние между вершинами i и j $(l_{ij} = l_{ji})$;

F_{ij} — расход топлива ТС от вершины i до j, $F_{ij} \neq F_{ji}$;

c_1 — стоимость топлива;

k — ТС из множества доступных средств доставки $K = \{1, 2, \ldots, k\}$;

Q — вместимость каждого ТС;

c_2 — затраты на отправку ТС;

T_0^d — время выезда ТС из депо;

t — максимальная продолжительность маршрута;

$\widetilde{d}_i = (d_{1i}, d_{2i}, d_{3i})$ — неопределенная потребность каждого клиента, $d_{1i} \leqslant d_{2i} \leqslant d_{3i} \leqslant Q$;

$[ET_i, LT_i]$ — временное окно клиента i.

Штрафные издержки будут понесены при прибытии к клиентам раньше, чем ET_i, или позже, чем LT_i; c_3 — штрафные затраты в единицу времени для ТС, прибывших раньше; c_4 — штрафные затраты в единицу времени для ТС, прибывших позже;

T_{ik} — время прибытия k-го ТС к клиенту i;

t_{ik}^h — продолжительность обслуживания клиента i ТС k;

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если ТС } k \text{ переходит от клиента } i \text{ к клиенту } j, \\ 0, & \text{в другом случае;} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } i \text{ обслуживается ТС } k, \\ 0, & \text{в другом случае;} \end{cases}$$

$T_{ik} + t_{ik}^h$ — время, когда ТС k покидает клиента i, $T_{ik} + t_{ik}^h \in [T_\beta, T_{\beta+1}]$, коэффициент β связан с дорожными условиями.

Условия прибытия ТС к клиенту j: $l_{ij} \leqslant \displaystyle\int_{T_{ik}+t_{ik}^h}^{T_{\beta+1}} v(t)\, dt$, время прибытия должно быть в пределах $[T_{ik} + t_{ik}^h, T_{\beta+1}]$ (в противном случае ТС необходимо пересечь периоды, чтобы добраться до клиента j, то есть $t_{ij} = (T_{\beta+M-1} - T_{ik} - t_{ik}^h) + t_{ij}^{\beta+M}$, $t_{ij} \neq t_{ji}$).

M — количество периодов;

$\tilde{Q}_c = Q - \sum_{i=1}^{m} d_i$ — остаточная нагрузка ТС.

Поскольку потребительский спрос представляет собой неопределенное число, Q также является неопределенным числом.

$\tilde{Q}_m = (Q - \sum_{i=1}^{m} d_{3i}, Q - \sum_{i=1}^{m} d_{2i}, Q - \sum_{i=1}^{m} d_{1i}) = (q_{1,m}, q_{2,m}, q_{3,m}), \quad q_{1,m} \leqslant q_{2,m} \leqslant q_{3,m}$.

Когда ТС продолжает посещать $(m+1)$-го клиента, вероятность того, что спрос клиента e меньше оставшейся вместимости ТС составляет:

$$Cr\left\{\tilde{d}_{m+1} \leqslant \tilde{Q}_m\right\} = \{(d_{1,m+1} - q_{3,m}, d_{2,m+1} - q_{2,m}, d_{3,m+1} - q_{1,m})\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & d_{1,m+1} \geqslant q_{3,m} \\ \dfrac{q_{3,m} - d_{1,m+1}}{2(q_{3,m} - d_{1,m+1} + d_{2,m+1} - q_{2,m})}, & d_{1,m+1} \leqslant q_{3,m}, \ d_{2,m+1} \geqslant q_{2,m}, \\ \dfrac{d_{3,m+1} - q_{1,m} + 2(q_{2,m} - d_{2,m+1})}{2(q_{2,m} - d_{2,m+1} + d_{3,m+1} - q_{1,m})}, & d_{2,m+1} \leqslant q_{2,m}, \ d_{3,m+1} \geqslant q_{1,m}, \\ 1, & d_{3,m+1} \leqslant q_{1,m}. \end{cases}$$

$Cr \in [0,1]$ — вероятность $\tilde{d}_{m+1} \leqslant \tilde{Q}_m$. Чем больше Cr, тем выше вероятность того, что ТС сможет удовлетворить неопределенный спрос клиентов e.

α — заранее заданная критическая величина, позволяющая ТС посетить следующего клиента, а также отражение отношения к риску лица, принимающего решения (ЛПР); $\alpha \in (0,1]$. Когда $Cr \geqslant \alpha$, ТС может осуществлять доставку следующему клиенту, в противном случае новое ТС будет переназначено для начала нового маршрута. Если $\alpha = 1$, то ЛПР крайне консервативно, и ТС разрешается посетить следующего клиента только тогда, когда оставшаяся загрузка ТС может полностью удовлетворить спрос клиента.

Если $\alpha = 0$, то ЛПР чрезвычайно радикально, и независимо от того, насколько мал Cr, ТС должны продолжать доставки.

Модель.

$$\min C = c_1 \sum_{i\in V}\sum_{j\in V}\sum_{k\in K} x_{ijk}F_{ij} + c_2 \sum_{j\in V_0}\sum_{k\in K} x_{0jk} + \\ + c_3 \sum_{i\in V}\sum_{j\in V_0}\sum_{k\in K} x_{ijk}G_{ijk} + c_4 \sum_{i\in V}\sum_{j\in V_0}\sum_{k\in K} x_{ijk}P_{ijk}, \tag{3.1}$$

$$G_{ijk} = \max\left\{(ET_j - T_{jk}), 0\right\}, \qquad P_{ijk} = \max\left\{(T_{jk} - LT_j), 0\right\},$$

$$\sum_{j\in V_0}\sum_{k\in K} x_{0jk} \leqslant |K|, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{k\in K} x_{ijk} = \sum_{i\in V}\sum_{k\in K} x_{jik} = 1, \ \forall j \in V_0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j\in V_0} x_{0jk} = \sum_{j\in V_0} x_{j0k} \leqslant 1, \ \forall k \in K, \tag{3.4}$$

$$x_{ijk} = 0, \ \forall i = j, \ \forall i,j \in V, \ \forall k \in K, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i\in V} x_{ijk} = y_{jk}, \ \forall j \in V_0, \ \forall k \in K, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j\in V} x_{ijk} = y_{ik}, \ \forall i \in V_0, \ \forall k \in K, \tag{3.7}$$

$$Cr\Big\{\sum_{i\in V}\sum_{j\in V_0} x_{ijk}\tilde{d}_j \leqslant Q\Big\} \geqslant \alpha, \forall k\in K, \tag{3.8}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} t_{ij}x_{ijk} + \sum_{i\in V_0}\sum_{j\in V} t^h_{ik}x_{ijk} \leqslant t,\ \forall k\in K, \tag{3.9}$$

$$T_{ik} + t^h_{ik} + t_{ij} - M\,(1-x_{ijk}) \leqslant T_{jk},\ \forall k\in K,\ \forall i,j\in V, \tag{3.10}$$

$$T_{ik} + t^h_{ik} + t_{ij} + M\,(1-x_{ijk}) \geqslant T_{jk},\ \forall k\in K,\ \forall i,j\in V, \tag{3.11}$$

$$x_{ijk}\in\{0,1\},\ \forall i,j\in V,\ \forall k\in K, \tag{3.12}$$

$$y_{jk}\in\{0,1\},\ \forall j\in V_0,\ \forall k\in K. \tag{3.13}$$

Выражение (3.1) — целевая функция, которая минимизирует сумму затрат на диспетчеризацию, затрат на топливо и штрафных затрат по временным окнам.

Блок маршрутов. Ограничение (3.2) показывает, что количество ТС, используемых для оптимизации маршрута, не превышает общее количество ТС. Ограничение (3.3) означает, что каждый клиент обслуживается только один раз, и это ограничение баланса. Ограничение (3.4) показывает, что каждое ТС имеет только один маршрут, и отправляется из депо, и возвращается в депо после завершения задачи распределения. Ограничение (3.5) показывает, что у одного и того же клиента нет маршрутного соединения. Ограничения (3.6) и (3.7) гарантируют, что у клиентов должен быть маршрут, по которому они могут добраться, когда их посещают ТС.

Блок рисков ЛПР. Ограничение (3.8) — это нечеткое ограничение вероятности пропускной способности, которое гарантирует, что надежность оставшейся мощности ТС, удовлетворяющей потребительский спрос, выше заданного уровня.

Блок ограничений по временным окнам. Выражение (3.9) ограничивает максимальный срок службы ТС. Ограничения (3.10) и (3.11) показывают, что когда ТС k движется из узла i в узел j, время прибытия ТС в узел j равно времени прибытия ТС в узел i плюс время обслуживания в узле i, и время прохождения по дуге (i,j), где M — бесконечное положительное число. Выражения (3.12) и (3.13) являются переменными решения.

Целевая функция (3.1) и ограничения (3.2)–(3.7), (3.12), (3.13) задают задачу псевдобулевой оптимизации, которая может быть преобразована в задачу псевдобулевой оптимизации с *ограничениями в виде дизъюнктивных нормальных форм* (ОДНФ), допускающую полиномиальную разрешимость и блок проверки временных ограничений (3.9)–(3.11) на решениях задачи с ОДНФ.

Можно ограничиться блоками маршрутов и ограничений по временным окнам без блока рисков ЛПР и без ограничений (3.9) на максимальный срок службы ТС.

Приведенная модель не учитывает иерархию вершин (депо различных уровней иерархии). Соответствующие результаты приведены в работах авторов [1,2].

Декомпозиция исходной задачи на задачу маршрутизации с ограничениями блока маршрутов и задачу согласования по временным окнам позволяет итерационно уточнять маршруты и ограничения по окнам.

Утверждение 1. *Задача псевдобулевой условной оптимизации* (3.1), (3.2)–(3.7), (3.12), (3.13) *представима в виде задачи псевдобулевой оптимизации с ОДНФ:*

$$\min_{\tilde{x}\in\Omega}(c,\tilde{x}), \qquad \Omega=\{\tilde{x}\in B^n, F_0(\tilde{x}=0)\}, \quad F_0(\tilde{x})=\bigvee_{j=1}^{n}F_j(\tilde{x}),$$

где $F_j(\tilde{x})$ — монотонные функции алгебры логики, соответствующие номеру ограничений (3.2)–(3.7)*; вектор $\tilde{x}$ состоит из всех элементов x_{ijk} и y_{ijk}. Решение задачи сводится* *к поиску верхних нулей соответствующей дизъюнктивной нормальной формы монотонных функций алгебры логики.*

Доказательство аналогично полученному ранее для более простой задачи коммивояжера (TSP) на выделенном кластере в работе [18].

В задаче по доставке товаров транспортными средствами от поставщиков к потребителям новые заявки, как правило, не сильно меняют задачу, то есть новая и предыдущая задача являются близкими. В отличие от первоначальной задачи процесс уточнения маршрутов может быть полиномиальным. Задачу уточнения (адаптации) можно рассматривать как маршрутно-распределительную задачу реоптимизации. В работах [19, 20] рассматривается устойчивость оптимальных решений задач комбинаторной оптимизации для случая добавления, удаления или замены одного из элементов множества исходных данных, для задачи коммивояжера численно строятся области адаптивной устойчивости. В прикладных задачах маршрутизации необходима существенная корректировка предлагаемого подхода.

Отметим, что в настоящей работе метод построения многоагентных маршрутов доставки товаров с учетом временных окон состоит в кластеризации сети, согласованной с решением задачи TSP на кластере и последующем построении маршрутов доставки. Данному подходу предшествует этап формирования базы метаэвристик по решению TSP на кластерах и выбора набора метаэвристик для близкой задачи по близкому набору метрических характеристик инфраструктурной сети (§ 2).

§ 4. Описание программы доставок грузов по Крыму

Маршрутизатор доставки товаров (МДТ) в Республике Крым — это программное решение, разработанное для оптимизации процесса доставки товаров [21]. Приложение основано на решении многоагентой задачи маршрутизации с временными окнами (§ 3), а также поддерживает иерархическую модификацию этой задачи. Важной частью является предварительная кластеризация всех вершин на основе среднего расстояния между вершинами графа, что позволяет оптимизировать процесс построения маршрутов и ускоряет вычисления. Иерархическая составляющая приложения заключается в выделении из общего числа вершин базы первого уровня и баз второго уровня. Поддержана возможность синтеза баз или ручной ввод.

Маршрут, проходящий из базы первого уровня по базам второго уровня, строится для большегрузных ТС. С учетом максимальной грузоподъемности и временных окон каждой из баз может понадобиться несколько маршрутов. Из баз второго уровня происходит доставка товаров каждому из потребителей при помощи малотоннажных ТС. Потребители сгруппированы в кластеры, каждый кластер обслуживается своей базой.

Программа написана на языке программирования Python. Для работы с картами используется «движок» OSMR (Open Source Routing Machine), а для отображения на стороне пользователя — Яндекс Карты.

Архитектурно приложение является клиент-серверным, вычисления происходят на сервере, написанном на Python; отображение реализовано с использованием JavaScript и фреймворка React. Это позволяет обеспечить быстродействие и гибкость системы при работе с различными запросами на маршрутизацию и отображение данных на картах. Взаимодействие между модулем OSMR и модулем работы с геоданными реализовано на основе http-запросов; это связано с тем, что OSMR является изолированным сервером, запущенном в Docker. Клиентская часть реализована на языке программирования JavaScript с использованием библиотеки React. Для отображения маршрутов используется API «Яндекс Карт». Клиент имеет возможность отображать и скрывать кластеры на карте. Серверная часть использует модульную архитектуру (рис. 3).

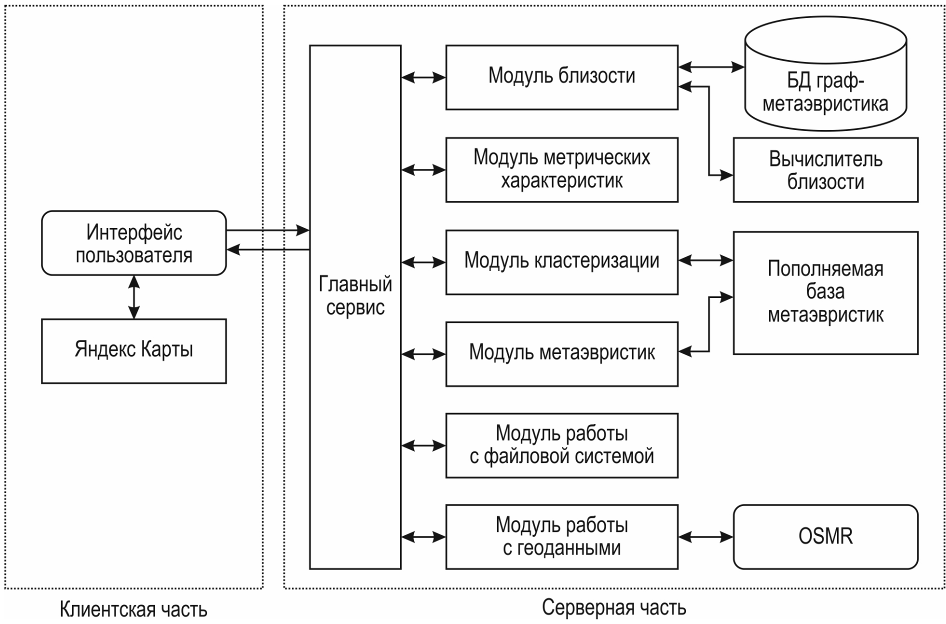


Рис. 3. Архитектура приложения МДТ

1. Главный сервис — это основная точка общения с клиентами. Представляет собой менеджер получения решения. Здесь формируется стратегия последовательного вызова каждого из сервисов для получения итогового ответа.

2. Модуль близости — это модуль, который отвечает за нахождение наиболее точного соответствия между переданным графом и сохраненными в БД. Алгоритм вычисления близости находится в «Вычислителе близости».

3. Модуль метрических характеристик вычисляет все необходимые метрические характеристики графа для дальнейшей кластеризации и вычисления близости.

4. Модуль кластеризации отвечает за получение кластеров. Возможно использование иерархической кластеризации на основе статистики (гистограмм) данных распределения длин дуг графа, полученных из модуля метрических характеристик.

5. Модуль метаэвристик — это менеджер работы с вычислительным слоем из множества различных метаэвристик. При необходимости данный модуль реализует стратегию последовательного запуска нескольких модулей метаэвристик для получения приближенного решения и его уточнения.

6. Модуль работы с файловой системой — реализованы методы чтения файлов данных и их сохранения с учетом определенной в приложении структуры.

7. Модуль работы с геоданными — это менеджер по работе с сервисами маршрутизации. В данной реализации работа осуществляется с OSMR, но данный модуль предполагает возможность расширения другими модулями.

Некоторые результаты работы программы приведены на рис. 4. Можно заметить, что в некоторых местах нет маршрута напрямую к вершине. Это связано с тем, что некоторые вершины находятся в местах, куда нет автомобильной дороги, например, пешеходные зоны.

Заключение

В работе представлен подход к решению NP-трудных задач многоагентной маршрутизации. Данный подход основан на решении близких по метаинформации задач. Близость задач определяется близостью их математических моделей и близостью участвующих в решении фрагментов сложной сети. В решении многоагентных задач типа коммивояжера ($MTSP$,

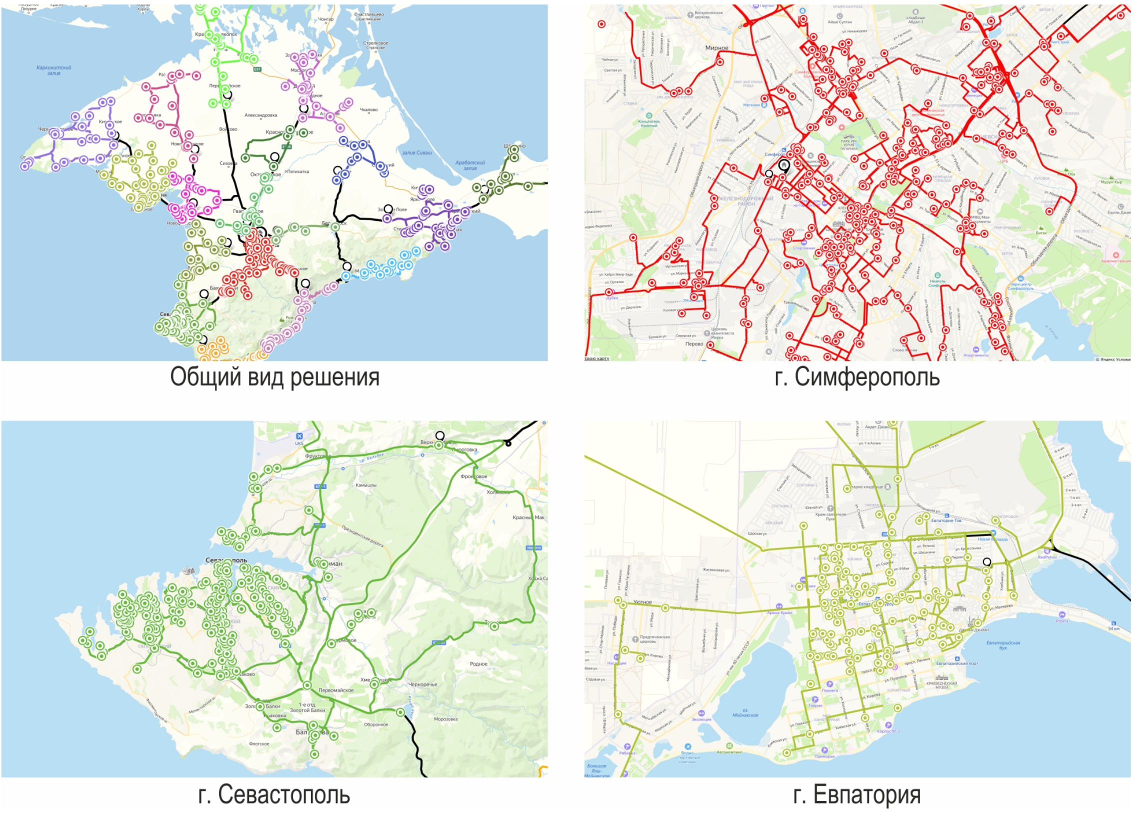


Рис. 4. Результаты работы МДТ

$MTSP$ с временными окнами, иерархическими задачами) большой размерности производится согласованная декомпозиция на локальные кластерные задачи маршрутизации. На выделенном кластере производится выбор метаэвристик. Из множества метаэвристик выделены эффективные для наборов кластеров из библиотеки TSPLIB. Набор эффективных метаэвристик получен в результате численного эксперимента и наполняет базу данных системы выбора метаэвристик алгоритмов решения многоагентной задачи по доставке товаров с помощью транспортных средств на большой инфраструктурной сети региона. Приводятся тестовые результаты для реальной базы потребителей, расположенных в узлах инфраструктурной сети Крыма.

Результаты работы докладывались на 21-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов» (г. Москва, 2023 г.).

Авторы благодарят рецензента за рекомендации и замечания, что позволило улучшить содержание статьи.

Финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1431.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kozlova M. G., Lemtyuzhnikova D. V., Luk'yanenko V. A., Makarov O. O. Models and algorithms for multiagent hierarchical routing with time windows // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2023. Vol. 62. Issue 5. P. 862–883. https://doi.org/10.1134/S106423072305009X
2. Козлова М. Г., Лукьяненко В. А., Макаров О. О. Построение многоагентных маршрутов в сети с иерархией вершин // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2023. № 3. С. 32–50. https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2023/3/32-50

3. Лемтюжникова Д. В., Лукьяненко В. А. Проблематика исследования труднорешаемых задач // Интеллектуализация обработки информации: Тезисы докладов 14-й Международной конференции, г. Москва, 2022 г. М.: Российская академия наук, 2022. С. 437–442. http://www.machinelearning.ru/wiki/images/f/ff/Idp22.pdf
4. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001.
6. Гейл Д. Соседние вершины на выпуклом многограннике // Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб. статей. М.: ИЛ, 1959. С. 355–362.
7. Журавлев Ю. И. Избранные научные труды. М.: Магистр, 1998.
8. Емельянов С. В., Коровин С. К., Бобылев Н. А., Булатов А. В. Гомотопии экстремальных задач. М.: Наука, 2001.
9. Lazarev A. A., Lemtyuzhnikova D. V., Werner F. A metric approach for scheduling problems with minimizing the maximum penalty // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 89. Part 2. P. 1163–1176. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.048
10. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
11. Belozub V., Kozlova M., Lukianenko V. Approximated solution algorithms for Urysohn-type equations // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1902. Issue 1. 01251. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1902/1/012051
12. Петровский А. Б. Пространства множеств и мультимножеств. М.: Едиториал УРСС, 2003.
13. Макаров О. О. Метаэвристики в близких задачах маршрутизации типа многих коммивояжеров // Таврический вестник информатики и математики. 2022. № 3 (56). С. 80–102. https://tvim.su/node/1134
14. Бурховецкий В. В. Оптимизация и распараллеливание упрощенного алгоритма Балаша–Кристофидеса для задачи коммивояжера // Программные системы: теория и приложения. 2020. Т. 11. № 4 (47). С. 3–16. https://doi.org/10.25209/2079-3316-2020-11-4-3-16
15. Solomon benchmark. https://www.sintef.no/projectweb/top/vrptw/solomon-benchmark
16. TSPLIB. http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95
17. Fan Hao, Ren Xiaoxue, Zhang Yueguang, Zhen Zimo, Fan Houming. A chaotic genetic algorithm with variable neighborhood search for solving time-dependent Green VRPTW with fuzzy demand // Symmetry. 2022. Vol. 14. Issue 10. 2115. https://doi.org/10.3390/sym14102115
18. Germanchuk M. S. Solvability of pseudobulous conditional optimization problems of the type of many salesmen // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics. 2021. No. 4 (49). P. 30–55. https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-4-30-55
19. Иванко Е. Е. Устойчивость и неустойчивость в дискретных задачах. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013.
20. Иванко Е. Е. Адаптивная устойчивость в задачах комбинаторной оптимизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 100–108.
21. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2024615891 РФ «Программа построения иерархических маршрутов в задачах маршрутизации на сложных сетях»: № 2024614604: заявл. 05.03.2024: опубл. 13.03.2024 / М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, О. О. Макаров; заявитель ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского».

Поступила в редакцию 16.07.2024
Принята к публикации 10.08.2024

Козлова Маргарита Геннадьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики, Физико-технический институт, ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», 295007, РФ, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7467-8389
E-mail: art-inf@mail.ru

Лукьяненко Владимир Андреевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Физико-технический институт, ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», 295007, РФ, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5271-031X
E-mail: art-inf@yandex.ru

Макаров Олег Олегович, ассистент, кафедра информатики, Физико-технический институт, ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», 295007, РФ, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0502-631X
E-mail: fantom2.00@mail.ru

Цитирование: М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, О. О. Макаров. Выбор алгоритмов решения задачи многоагентной маршрутизации, основанный на решении близких задач // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 449–465.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
COMPUTER SCIENCE 2024. Vol. 34. Issue 3. Pp. 449–465.

M. G. Kozlova, V. A. Lukianenko, O. O. Makarov

The choice of algorithms for solving a multi-agent routing problem based on solving related problems

Keywords: multi-agent traveling salesman problem, time windows, metaheuristics, applied routing problem.

MSC2020: 90C27

DOI: 10.35634/vm240309

The paper considers the problem of reducing the complexity of NP-hard problems by using related problems for which an optimal or acceptable solution is already known. For multi-agent routing tasks, a technique is used based on network clustering consistent with traveling salesman routes on each cluster and constructing routes that take into account the limitation of delivery time windows. A mathematical model is presented that corresponds to a block of pseudo-Boolean conditional optimization with constraints in the form of disjunctive normal forms that allows polynomial solvability and a block of time constraints. The results of choosing metaheuristics based on related problems are used in a program for the delivery of goods by many agents to consumers located at the vertices of the regional infrastructure road network.

Funding. This research was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no. 075-02-2024-1431.

REFERENCES

1. Kozlova M. G., Lemtyuzhnikova D. V., Luk'yanenko V. A., Makarov O. O. Models and algorithms for multiagent hierarchical routing with time windows, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2023, vol. 62, issue 5, pp. 862–883. https://doi.org/10.1134/S106423072305009X
2. Kozlova M. G., Lukianenko V. A., Makarov O. O. Multi-agent route planning in hierarchical networks, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2023, no. 3, pp. 32–50 (in Russian). https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2023/3/32-50
3. Lemtyuzhnikova D. V., Luk'yanenko V. A. Problems of studying difficult problems, *Intellektualizatsiya obrabotki informatsii: Tezisy dokladov 14 Mezhdunarodnoi konferentsii, Moscow 2022*, Moscow: Russian Academy of Sciences, pp. 437–442 (in Russian). http://www.machinelearning.ru/wiki/images/f/ff/Idp22.pdf
4. Bondarenko V. A., Maksimenko A. N. *Geometricheskie konstruktsii i slozhnost' v kombinatornoi optimizatsii* (Geometric constructions and complexity in combinatorial optimization), Moscow: LKI, 2008.
5. Deza M. M., Laurent M. *Geometry of cuts and metrics*, Berlin: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-3-642-04295-9
6. Gale D. Neighboring vertices on a convex polyhedron, *Linear inequalities and related systems*, Princeton: Princeton University Press, 1956, pp. 255–263. https://doi.org/10.1515/9781400881987-016
7. Zhuravlev Yu. I. *Izbrannye nauchnye trudy* (Selected scientific works), Moscow: Magistr, 1998.
8. Emel'yanov S. V., Korovin S. K., Bobylev N. A., Bulatov A. V. *Gomotopii eksremal'nykh zadach* (Homotopies of extremal problems), Moscow: Nauka, 2001.
9. Lazarev A. A., Lemtyuzhnikova D. V., Werner F. A metric approach for scheduling problems with minimizing the maximum penalty, *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 89, part 2, pp. 1163–1176. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.048
10. Gakhov F. D., Cherskii Yu. I. *Uravneniya tipa svertki* (Convolution type equations), Moscow: Nauka, 1978.

11. Belozub V., Kozlova M., Lukianenko V. Approximated solution algorithms for Urysohn-type equations, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1902, issue 1, 01251. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1902/1/012051
12. Petrovskii A. B. *Prostranstva mnozhestv i multimnozhestv* (Spaces of sets and multisets), Moscow: Editorial URSS, 2003.
13. Makarov O. O. Metaheuristics in related routing problems such as many traveling salesmen, *Tavricheskii Vestnik Informatiki i Matematiki*, 2022, no. 3 (56), pp. 80–102 (in Russian). https://tvim.su/node/1134
14. Burkhovetskii V. V. Optimization and parallelization of simplified Balas' and Christofides' algorithm for the Traveling Salesman Problem, *Program Systems: Theory and Applications*, 2020, vol. 11, no. 4 (47), pp. 3–16 (in Russian). https://doi.org/10.25209/2079-3316-2020-11-4-3-16
15. *Solomon benchmark*. https://www.sintef.no/projectweb/top/vrptw/solomon-benchmark
16. *TSPLIB*. http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95
17. Fan Hao, Ren Xiaoxue, Zhang Yueguang, Zhen Zimo, Fan Houming. A chaotic genetic algorithm with variable neighborhood search for solving time-dependent Green VRPTW with fuzzy demand, *Symmetry*, 2022, vol. 14, issue 10, 2115. https://doi.org/10.3390/sym14102115
18. Germanchuk M. S. Solvability of pseudobulous conditional optimization problems of the type of many salesmen, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2021, no. 4 (49), pp. 30–55. https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-4-30-55
19. Ivanko E. E. *Ustoichivost' i neustoichivost' v diskretnykh zadachakh* (Stability and instability in discrete problems), Yekaterinburg: Russian Academy of Sciences, Ural Branch, 2013.
20. Ivanko E. E. Adaptive stability in combinatorial optimization problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 79–87. https://doi.org/10.1134/S0081543815020091
21. Certificate of state registration of the computer program No. 2024615891 Russian Federation. Computer program "Program for building hierarchical routes in routing tasks on complex networks": No. 2024614604: application 05.03.2024: publ. 13.03.2024 / M. G. Kozlova, V. A. Lukianenko, O. O. Makarov; applicant V. I. Vernadsky Crimean Federal University.

Received 16.07.2024
Accepted 10.08.2024

Margarita Gennadievna Kozlova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computer Science, Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, prospekt Akademika Vernadskogo, 4, Simferopol, 295007, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7467-8389
E-mail: art-inf@mail.ru

Vladimir Andreevich Lukianenko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, prospekt Akademika Vernadskogo, 4, Simferopol, 295007, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5271-031X
E-mail: art-inf@yandex.ru

Oleg Olegovich Makarov, Assistant Lecturer, Department of Computer Science, Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, prospekt Akademika Vernadskogo, 4, Simferopol, 295007, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0502-631X
E-mail: fantom2.00@mail.ru

Citation: M. G. Kozlova, V. A. Lukianenko, O. O. Makarov. The choice of algorithms for solving a multiagent routing problem based on solving related problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 3, pp. 449–465.