ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 397–409.

УДК 517.977

© *Е. С. Можегова*

ПОИМКА ДВУХ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей двух убегающих, описываемая линейной системой с простой матрицей в заданной временно́й шкале. Предполагается, что убегающие используют одно и то же управление. Преследователи действуют согласно квазистратегиям на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений для каждого из участников представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат, терминальные множества — начало координат. Целью группы преследователей является поимка двух убегающих. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки убегающих.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, групповое преследование, поимка, временная шкала.

DOI: 10.35634/vm240306

Введение

Теория дифференциальных игр, основанная на работах таких ученых, как Р. Айзекс [1], Л. С. Понтрягин [2] и Н. Н. Красовский [3], предлагает множество направлений для исследований [4–9]. Значительное внимание в этих исследованиях в настоящее время уделяется дифференциальным играм преследования–уклонения. Это объясняется как сложностью используемых математических моделей, так и широким спектром приложений в различных областях, включая робототехнику, навигацию, сетевую безопасность, управление беспилотными летательными аппаратами и другие сферы, где необходимо разрабатывать стратегии для успешного перехвата или уклонения [10–12].

Одним из ключевых аспектов игр преследования является анализ условий, при которых преследователь может успешно захватить убегающего, учитывая как собственные траектории движения и стратегии управления, так и траектории и стратегии противника. В ходе исследований были предложены различные методы подобного анализа, в частности, использующий технику многозначных отображений метод разрешающих функций [13–15].

Естественным обобщением игровых задач преследования двух участников является анализ конфликтных ситуаций с участием группы преследователей и одного или группы убегающих [3, 13–15]. Как правило, изучение таких задач с непрерывным и дискретным временем проводилось по отдельности [16–18]. При этом в ходе изучения структуры решений дифференциальных и разностных уравнений были обнаружены схожие свойства данных решений. Для их исследования в настоящее время развивается теория динамических уравнений во временны́х шкалах (далее ударение проставляться не будет).

Концепция временных шкал, предложенная С. Хильгером [19, 20], была развита и углублена в исследованиях М. Бохнера и А. Петерсона [21]. Уравнения во временных шкалах позволяют рассматривать динамические системы с непрерывным и дискретным временем в единой математической модели.

Временные шкалы используются при моделировании процессов, происходящих в биотехнологии, химии, нейронных сетях [21, 22]. Неантагонистическая игра N лиц во временной шкале рассматривалась в работе [23]. Задачи конфликтного взаимодействия во временных шкалах группы преследователей с одним или несколькими убегающими в случае простого движения рассматривались в работах [24–26].

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей двух убегающих в заданной временной шкале. Убегающие жестко скоординированы, то есть используют одно и то же управление, а движение каждого из участников описывается линейной системой с простой матрицей. Целью преследователей является поимка обоих убегающих хотя бы одним преследователем. Терминальные множества — начало координат. Получены достаточные условия поимки.

§ 1. Вспомогательные определения

В этом параграфе будут рассмотрены основные факты из теории временных шкал. Более подробную информацию о временных шкалах можно найти в работах [21, 27–29].

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}} t = +\infty$, называется *временной шкалой*.

Определение 2. Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала. Функция $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ вида

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$$

называется *функцией сдвига*.

Определение 3. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-*дифференцируемой* в точке $t \in \mathbb{T}$, если существует такое число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in \mathbb{T} \cap W$.

Число γ в этом случае называется Δ-*производной* функции f в точке t и будет обозначаться как $f^{\Delta}(t)$.

Определение 4. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, называется Δ-*дифференцируемой* в точке $t \in \mathbb{T}$, если все функции $f_1, \ldots, f_n$ являются Δ-дифференцируемыми в точке t.

Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала, $E \subset \mathbb{T}$. Обозначим $R(E) = \{t \in E \mid \sigma(t) > t\}$. Тогда множество $R(E)$ не более чем счетно [27].

Определение 5. Множество $E \subset \mathbb{T}$ называется Δ-*измеримым*, если множество

$$\widetilde{E} = E \bigcup \left(\bigcup_{t\in R(E)} (t, \sigma(t)) \right)$$

измеримо по Лебегу.

Определение 6. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-*измеримой* на Δ-измеримом множестве E, если функция $\widetilde{f}$ вида

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)),\ t_i \in R(E) \end{cases}$$

измерима на множестве $\widetilde{E}$.

Определение 7. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^1$, $E \subset \mathbb{T}$, называется Δ-*интегрируемой* на Δ-измеримом множестве E, если функция $\widetilde{f}$ интегрируема по Лебегу на множестве $\widetilde{E}$. Если f является Δ-интегрируемой на множестве E, то определим $\displaystyle\int_E f(s)\Delta s$, полагая

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f}\, d\mu,$$

где μ — мера Лебега.

§ 2. Постановка задачи

Пусть задана некоторая временная шкала $\mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, 2)$ $n + 2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2. Законы движения каждого из преследователей P_i (с управлением u_i) и каждого из убегающих E_j (с управлением v) имеют следующий вид:

$$x_i^{\Delta} = ax_i + u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \tag{1}$$

$$y_j^{\Delta} = ay_j + v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0 \in \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^1$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k\colon \|v\| \leqslant 1\}$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I, j \in \{1, 2\}$.

Вместо систем (1), (2) перейдем к системе

$$z_{ij}^{\Delta} = az_{ij} + u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{3}$$

Δ-измеримую функцию $v\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^k$ назовем *допустимой* для убегающих E_1, E_2, если $v(t) \in V$ для всех $t \in \mathbb{T}, t \geqslant t_0$.

Предысторией функции $v_t(\cdot)$ в момент $t \in \mathbb{T}$ будем называть сужение функции $v(\cdot)$ на $[t_0, t] \cap \mathbb{T}$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление.

Будем предполагать, что начальные условия $\{x_i^0, i \in I, y_1^0, y_2^0\}$ таковы, что любые k векторов из набора $\{x_i^0 - y_1^0, i \in I, y_1^0 - y_2^0\}$ линейно независимы.

Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{Int} A, \operatorname{co} A \text{ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества } A,$$

$$c = y_1^0 - y_2^0, \quad \mu(\tau) = \sigma(\tau) - \tau,$$

$$e_a(t, s) = \exp\left\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(a)\, \Delta\tau\right\}, \quad \text{где } \xi_{\mu(\tau)}(a) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + \mu(\tau)a)}{\mu(\tau)}, & \mu(\tau) \neq 0, \\ a, & \mu(\tau) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$e_{\ominus a}(t, s) = \frac{1}{e_a(t, s)}, \quad \lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0\colon -\lambda z \in V - v\}.$$

Определение 8 ([30]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образуют *положительный базис* в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m.$$

Теорема 1 (см. [15,30]). *Пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$. Следующие утверждения равносильны:*
(1) *векторы $a_1, \ldots, a_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$;*
(2) $0 \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_m\}$;
(3) $\delta = \min\limits_{v \in V} \max\limits_{j} \lambda(a_j, v) > 0$.

Предположение 1. $a < 0$ и $1 + \mu(t)a > 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geqslant t_0$.

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geqslant t_0$,*

$$e_a(t, t_0) \leqslant e^{aK(t)},$$

где $K(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Delta s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что $\mu(t)a \in (-1; 0]$ для всех $t \in \mathbb{T}$. Поэтому для всех $t \in \mathbb{T}$ справедливо неравенство $\ln(1 + \mu(t)a) \leqslant \mu(t)a$. Следовательно, если $\mu(t) \neq 0$, то согласно (4) справедливо неравенство

$$\xi_{\mu(t)}(a) \leqslant a.$$

Если $\mu(t) = 0$, то $\xi_{\mu(t)}(a) = a$. Значит, для всех $t \in \mathbb{T}$ верно $\xi_{\mu(t)}(a) \leqslant a$. Из последнего неравенства с учетом (4) получаем

$$e_a(t, t_0) \leqslant e^{aK(t)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение 1 и векторы $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$ таковы, что*

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{l} \lambda(a_l, v) > 0.$$

Тогда существует момент времени $T_0 \in \mathbb{T}$, $T_0 > t_0$, такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $p \in \{1, \ldots, m\}$, для которого

$$\int_{t_0}^{T_0} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\lambda(a_p, v(s))\, \Delta s \geqslant 1. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающих. Тогда

$$\begin{gathered}\sum_{l=1}^{m} \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\lambda(a_l, v(s))\, \Delta s \geqslant \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0) \max_{l} \lambda(a_l, v(s))\, \Delta s \geqslant \\ \geqslant \delta \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\, \Delta s.\end{gathered} \tag{6}$$

В силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\, \Delta s \geqslant \int_{t_0}^{t} e^{-aK(\sigma(s))}\, \Delta s. \tag{7}$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t} e^{-aK(\sigma(s))}\, \Delta s = \int_{t_0}^{t} e^{-a(\sigma(s)-t_0)}\, \Delta s$$

и $\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-a(\sigma(s)-t_0)}\, \Delta s \to +\infty$ при $t \to +\infty$, $t \in \mathbb{T}$, то из неравенств (6), (7) следует требуемое неравенство (5). □

Определение 9. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = \{z_{ij}^0 \mid i \in I,\ j \in \{1,2\}\}$, моменту $t \in \mathbb{T}$ и произвольной предыстории $v_t(\cdot)$ управления убегающих E_1, E_2 допустимую функцию $u_i(t)$. Кроме того, если $v^1(\cdot)$, $v^2(\cdot)$ — допустимые функции и $v^1(t) = v^2(t)$ почти всюду на $[t_0, t] \cap \mathbb{T}$, то соответствующие функции $U_i^0(t, z^0, v_t^1(\cdot)) = U_i^0(t, z^0, v_t^2(\cdot))$ почти всюду на $[t_0, t] \cap \mathbb{T}$.

Определение 10. В игре $\Gamma(n, 2)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T_0(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0] \cap \mathbb{T}$, найдутся номера $l, m \in I$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap \mathbb{T}$ такие, что $z_{l1}(\tau_1) = 0$, $z_{m2}(\tau_2) = 0$.

§ 3. Основная теорема

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение 1 и существуют множества*

$$I_1, I_2 \subset I, \quad \widehat{I}_1, \widehat{I}_2 \subset I \backslash (I_1 \cup I_2), \quad \widehat{I}_1 \cap \widehat{I}_2 = \varnothing,$$

такие, что наборы векторов

$$\{z_{i1}^0, i \in I_1, -c\}, \quad \{z_{i2}^0, i \in I_2, c\},$$
$$\{z_{l1}^0, l \in I_1 \backslash (I_1 \cap I_2), z_{s2}^0, s \in I_2 \backslash (I_1 \cap I_2), z_{\alpha 1}^0, \alpha \in \widehat{I}_1, z_{\beta 2}^0, \beta \in \widehat{I}_2\}$$

образуют положительный базис. Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающих. Рассмотрим два возможных случая.

A. $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Так как $\{z_{i1}^0, i \in I_1, -c\}, \{z_{i2}^0, i \in I_2, c\}$ образуют положительный базис, то существуют положительные числа γ_{ij} такие, что

$$\sum_{i \in I_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 - c = 0, \quad \sum_{i \in I_2} \gamma_{i2} z_{i2}^0 + c = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{i \in I_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{i \in I_2} \gamma_{i2} z_{i2}^0 = 0,$$

откуда следует, что векторы

$$\{z_{i1}^0, i \in I_1, z_{i2}^0, i \in I_2\} \tag{8}$$

образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим вспомогательную игру $\overline{\Gamma}$ с участием преследователей $\overline{P}_i, i \in I_1 \cup I_2$, и убегающего $\overline{E}$ с законами движения

$$\overline{x}_i^{\Delta} = a\overline{x}_i + \overline{u}_i, \quad i \in I_1 \cup I_2, \qquad \overline{y}^{\Delta} = a\overline{y} + v, \quad \overline{u}_i, v \in V,$$

и начальными условиями $\overline{x}_i(t_0) = z_{i1}^0$, $i \in I_1$, $\overline{x}_i(t_0) = z_{i2}^0$, $i \in I_2$, $\overline{y}(t_0) = 0$. Пусть убегающий $\overline{E}$ использует такое управление $v(\cdot)$, которое используют убегающие E_1, E_2 в игре $\Gamma(n, 2)$. Так как $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{i1}^0, i \in I_1, z_{i2}^0, i \in I_2\}$, то в силу [31, следствие 2] преследователи $\overline{P}_i$, $i \in I_1 \cup I_2$, осуществляют поимку убегающего $\overline{E}$. Задаем управления $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I_1 \cup I_2$, в игре $\Gamma(n, 2)$ следующим образом:

$$u_i(t) = \overline{u}_i(t), \quad i \in I_1 \cup I_2,$$

где $\overline{u}_i(\cdot)$ — управления преследователей $\overline{P}_i$ в игре $\overline{\Gamma}$, причем

$$\begin{aligned} \overline{u}_i(t) &= v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i \in I_1, \\ \overline{u}_i(t) &= v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i \in I_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Управления остальных преследователей P_i, $i \notin I_1 \cup I_2$, задаем произвольно. Тогда для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geqslant t_0$, справедливы равенства

$$z_{i1}(t) = \overline{z}_i(t), \quad i \in I_1, \qquad z_{i2}(t) = \overline{z}_i(t), \quad i \in I_2.$$

Следовательно, поимка хотя бы одного убегающего происходит и в игре $\Gamma(n, 2)$, то есть существует номер $r \in I_1 \cup I_2$ и момент τ такие, что $z_{r1}(\tau) = 0$ или $z_{r2}(\tau) = 0$. Пусть $r \in I_1$ (случай $r \in I_2$ рассматривается аналогично).

Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\lambda(z_{i2}^0, v(s))\,\Delta s,$$

тогда из системы (3), используя (9), получаем [29, теорема 3.2]

$$z_{i2}(t) = z_{i2}^0 e_a(t, t_0) - \int_{t_0}^{t} z_{i2}^0 e_a(t, \sigma(s))\lambda(z_{i2}^0, v(s))\,\Delta s = z_{i2}^0 e_a(t, t_0)h_i(t). \tag{10}$$

Если существует номер $l \in I_2$ такой, что $h_l(\tau) = 0$, то считаем, что $\lambda(z_{l2}^0, v(t)) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geqslant \tau$, поэтому $z_{l2}(\tau) = 0$. Следовательно, преследователь P_l ловит убегающего E_2, что означает поимку в игре $\Gamma(n, 2)$.

Если существует номер $l \in I_2$ такой, что $h_l(\tau) < 0$, а для всех $t \in \mathbb{T}$, $t < \tau$, выполнено $h_l(t) > 0$, то определим число

$$\tau^* = \sup\{t \in \mathbb{T} \mid h_l(t) > 0\}.$$

Тогда $\tau^* \neq \tau$ и $(\tau^*, \tau) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. Действительно, если бы существовал момент $t \in (\tau^*, \tau) \cap \mathbb{T}$, то выполнялось бы неравенство $h_l(t) > 0$, что противоречило бы определению числа τ^*. Полагаем в этом случае

$$u_l(\tau^*) = v(\tau^*) - \lambda^*(z_{l2}^0, v(\tau^*))z_{l2}^0, \quad \text{где}$$
$$\lambda^*(z_{l2}^0, v(\tau^*)) = \frac{e_a(\sigma(\tau^*), t_0)h_l(\tau^*)}{\sigma(\tau^*) - \tau^*} = \frac{e_a(\tau, t_0)h_l(\tau^*)}{\tau - \tau^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\lambda^*(z^0_{l2}, v(\tau^*)) \leqslant \lambda(z^0_{l2}, v(\tau^*))$ и поэтому $u_l(\tau^*) \in V$. Тогда

$$z_{l2}(\tau) = z^0_{l2} e_a(\tau, t_0)\left(h_l(\tau^*) - \int_{\tau^*}^{\tau} \frac{e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0) e_a(\tau, t_0) h_l(\tau^*)}{\tau - \tau^*}\,\Delta s\right).$$

Получаем, что и в данном случае преследователь P_l ловит убегающего E_2, а это означает, что в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Пусть теперь для всех $j \in I_2$ выполнено $h_j(\tau) > 0$, тогда из равенства (10) следует, что

$$z^0_{j2} = \frac{z_{j2}(\tau)}{e_a(\tau, t_0) h_j(\tau)}, \quad j \in I_2.$$

Кроме того,

$$z_{r2}(\tau) = x_r(\tau) - y_2(\tau) = x_r(\tau) - y_1(\tau) + y_1(\tau) - y_2(\tau) = e_a(\tau, t_0)c.$$

Поскольку $h_j(\tau) \in (0, 1]$ для всех $j \in I_2$ и $e_a(\tau, t_0) > 0$, а по условию теоремы векторы $\{z^0_{i2}, i \in I_2, c\}$ образуют положительный базис, то положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{j2}(\tau),\ j \in I_2,\ z_{r2}(\tau)\}.$$

Следовательно, преследователи $\{P_j,\ j \in I_2,\ P_r\}$ ловят убегающего E_2, что и означает поимку в игре $\Gamma(n, 2)$.

B. $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$. Пусть $I_{12} = I_1 \cap I_2$. Определим функции

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\lambda(z^0_{i1}, v(s))\,\Delta s, \quad i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12}),$$
$$h_{i2}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0)\lambda(z^0_{i2}, v(s))\,\Delta s, \quad i \in \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12}).$$

Управления преследователей задаем следующим образом. Если в момент $t \in \mathbb{T}$ выполняется неравенство $h_{ij}(t) \geqslant 0$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z^0_{i1}, v(t)) z^0_{i1}, \quad i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12}),$$
$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z^0_{i2}, v(t)) z^0_{i2}, \quad i \in \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12}),$$
$$u_i(t) = v(t), \quad i \in I_{12}.$$

Управления остальных преследователей задаем произвольно. Тогда из системы (3) получаем

$$z_{i1}(t) = z^0_{i1} e_a(t, t_0) h_{i1}(t), \quad i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12}),$$
$$z_{i2}(t) = z^0_{i2} e_a(t, t_0) h_{i2}(t), \quad i \in \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12}),$$
$$z_{i1}(t) = z^0_{i1} e_a(t, t_0), \quad z_{i2}(t) = z^0_{i2} e_a(t, t_0), \quad i \in I_{12}.$$

Если $\tau_i \in \mathbb{T}$, $i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12}) \cup \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12})$, — первый момент времени, для которого $h_{ij}(\tau_i) = 0$ при некотором $j \in \{1, 2\}$, то считаем, что $\lambda(z^0_{ij}, v(t)) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geqslant \tau_i$; поэтому $z_{i1}(\tau_i) = 0$, если $i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12})$, или $z_{i2}(\tau_i) = 0$, если $i \in \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12})$.

Пусть $\tau_i \in \mathbb{T}$, $i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12}) \cup \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12})$, — первый момент времени, для которого $h_{ij}(\tau_i) < 0$ при некотором $j \in \{1, 2\}$, а для всех $t \in \mathbb{T}$, $t < \tau_i$, выполняется неравенство $h_{ij}(t) > 0$. Корректируя функцию $\lambda(z^0_{ij}, v(t))$ в момент времени, равный

$\sup\{t \in \mathbb{T} \mid h_{ij}(t) > 0\}$, в соответствии с подходом, описанным выше, добьемся того, что будет выполнено равенство $z_{ij}(\tau_i) = 0$. Тогда, если $i \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12})$, то $z_{i1}(\tau_i) = 0$, а если $i \in \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12})$, то $z_{i2}(\tau_i) = 0$.

Поскольку по условию теоремы набор векторов

$$\{z_{l1}^0,\ l \in I_1 \backslash (I_1 \cap I_2); z_{s2}^0,\ s \in I_2 \backslash (I_1 \cap I_2); z_{\alpha 1}^0,\ \alpha \in \widehat{I}_1; z_{\beta 2}^0,\ \beta \in \widehat{I}_2\}$$

образует положительный базис, то в силу теоремы 1 и леммы 2 для каждой допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau \in \mathbb{T}$ и номер $r \in \widehat{I}_1 \cup (I_1 \backslash I_{12}) \cup \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12})$, для которых $h_{r1}(\tau) \leqslant 0$ или $h_{r2}(\tau) \leqslant 0$.

Пусть $h_{r1}(\tau) \leqslant 0$, $h_{i2}(\tau) > 0$ для всех $i \in I_2$. Тогда из доказанного выше получаем, что $z_{r1}(\tau) = 0$; следовательно, в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка убегающего E_1 преследователем P_r. Так как

$$z_{i2}^0 = \frac{z_{i2}(\tau)}{e_a(\tau, t_0) h_{i2}(\tau)}, \quad i \in \widehat{I}_2 \cup (I_2 \backslash I_{12}), \qquad z_{i2}(\tau) = z_{i2}^0 e_a(\tau, t_0), \quad i \in I_{12},$$

и по условию векторы $\{z_{i2}^0,\ i \in I_2, c\}$ составляют положительный базис, то положительный базис составляют и векторы $\{z_{i2}(\tau),\ i \in I_2, c\}$. Учитывая, что

$$z_{r2}(\tau) = x_r(\tau) - y_2(\tau) = z_{r1}(\tau) + y_1(\tau) - y_2(\tau) = e_a(\tau, t_0)c,$$

получаем, что положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i2}(\tau),\ i \in I_2,\ z_{r2}(\tau)\}.$$

Следовательно, в силу [31, следствие 2] преследователи $\{P_i,\ i \in I_2,\ P_r\}$ ловят убегающего E_2, что означает поимку в игре $\Gamma(n, 2)$. Теорема доказана. □

Пример 1. Пусть в системах (1), (2) $k = 3$, $n = 5$. Начальные условия игры $\Gamma(5, 2)$ имеют вид $x_1^0 = (3, -2, 0)$, $x_2^0 = (-3, 0, 0)$, $x_3^0 = (4, 1, -1)$, $x_4^0 = (0, -4, 1)$, $x_5^0 = (-2, 6, 6)$, $y_1^0 = (0, 0, 1)$, $y_2^0 = (0, 0, 2)$. Взяв в качестве I_1, I_2 множества

$$I_1 = \{1, 2, 3\}, \quad I_2 = \{3, 4, 5\},$$

получаем, что наборы

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{31}^0, -c\}, \quad \{z_{32}^0, z_{42}^0, z_{52}^0, c\}$$

образуют положительный базис. Кроме того, векторы

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{42}^0, z_{52}^0\}$$

также образуют положительный базис в $\mathbb{R}^3$. Следовательно, согласно теореме 2, в данной игре $\Gamma(5, 2)$ происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Blaquière A., Gérard F., Leitmann G. Quantitative and qualitative differential games. New York: Academic Press, 1969.

5. Friedman A. Differential games. New York: Wiley-Interscience, 1971. https://zbmath.org/0229.90060
6. Hájek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. https://zbmath.org/0361.90084
7. Leitmann G. Cooperative and non-cooperative many players differential games. Vienna: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2914-2
8. Nahin P. J. Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion. Princeton: Princeton University Press, 2007.
9. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977.
10. Bakolas E. Optimal guidance of the isotropic rocket in the presence of wind // Journal of Optimization Theory and Applications. 2014. Vol. 162. Issue 3. P. 954–974. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0504-4
11. Sinha A., Kumar S. R., Mukherjee D. Three-agent time-constrained cooperative pursuit–evasion // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2022. Vol. 104. Issue 2. Article number: 28. https://doi.org/10.1007/s10846-022-01570-y
12. Lozano E., Becerra I., Ruiz U., Bravo L., Murrieta-Cid R. A visibility-based pursuit–evasion game between two nonholonomic robots in environments with obstacles // Autonomous Robots. 2022. Vol. 46. Issue 2. P. 349–371. https://doi.org/10.1007/s10514-021-10026-5
13. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
14. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
15. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
16. Bopardikar S. D., Bullo F., Hespanha J. P. On discrete-time pursuit–evasion games with sensing limitations // IEEE Transactions on Robotics. 2008. Vol. 24. Issue 6. P. 1429–1439. https://doi.org/10.1109/TRO.2008.2006721
17. Casini M., Garulli A. A new class of pursuer strategies for the discrete-time lion and man problem // Automatica. 2019. Vol. 100. P. 162–170. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.11.015
18. Kazimirova R., Ibragimov G., Pansera B. A., Ibragimov A. Multi-pursuer and one-evader evasion differential game with integral constraints for an infinite system of binary differential equations // Mathematics. 2024. Vol. 12. Issue 8. 1183. https://doi.org/10.3390/math12081183
19. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems: Contributions to the International Seminar ISAM-90, held in Gaussing (GDR), March 19–23, 1990. Berlin, Boston: De Gruyter, 1990. P. 9–20. https://doi.org/10.1515/9783112581445-002
20. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Results in Mathematics. 1990. Vol. 18. Issue 1. P. 18–56. https://doi.org/10.1007/BF03323153
21. Bohner M., Peterson A. Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8230-9
22. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive differential equations and inclusions. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
23. Martins N., Torres D. F. M. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. Vol. 31. No. 1. P. 23–37. https://doi.org/10.7151/dmdico.1126
24. Mozhegova E. S., Petrov N. N. The differential game “Cossacks–robbers” on time scales // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Vol. 62. P. 56–70. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-05
25. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales // Dynamic Games and Applications. 2022. Vol. 12. Issue 2. P. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
26. Petrov N. N., Mozhegova E. S. Simple pursuit problem with phase constraints of two coordinated evaders on time scales // Doklady Mathematics. 2023. Vol. 108. Suppl. 1. P. S86–S91. https://doi.org/10.1134/S1064562423600720

27. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives // Mathematical and Computer Modelling. 2006. Vol. 43. Issues 1–2. P. 194–207. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.028
28. Guseinov G. Sh. Integration on time scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 285. Issue 1. P. 107–127. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5
29. Zhan Zaidong, Wei W. Necessary conditions for a class of optimal control problems on time scales // Abstract and Applied Analysis. 2009. Vol. 2009. No. 1. 974394. https://doi.org/10.1155/2009/974394
30. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. https://www.mathnet.ru/rus/de328
31. Можегова Е. С. Об одной задаче группового преследования во временных шкалах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 130–140. https://doi.org/10.35634/vm230109

Поступила в редакцию 05.08.2024
Принята к публикации 02.09.2024

Можегова Елена Сергеевна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-6833-6968
E-mail: mozhegovalena@yandex.ru

Цитирование: Е. С. Можегова. Поимка двух скоординированных убегающих в линейной задаче преследования во временных шкалах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 397–409.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 3. Pp. 397–409.

E. S. Mozhegova

Capture of two coordinated evaders in a linear pursuit problem on time scales

Keywords: differential game, pursuer, evader, group pursuit, capture, time scale.

MSC2020: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/vm240306

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider the problem of pursuit of two evaders by a group of pursuers, described by a linear system with a simple matrix on a given time scale. It is assumed that the evaders use the same control. The pursuers employ quasistrategies based on information about the initial positions and control history of the evaders. The set of admissible controls for each participant is a ball of unit radius centered at the origin, and the terminal sets are the origin. The goal of the group of pursuers is to capture the two evaders. In the study, we use the method of resolving functions as a base one, which allows us to obtain sufficient conditions for the solvability of the approach problem in a certain guaranteed time. In terms of the initial positions and parameters of the game, a sufficient condition for capturing the evaders is obtained.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
2. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974.
4. Blaquière A., Gérard F., Leitmann G. *Quantitative and qualitative differential games*, New York: Academic Press, 1969.
5. Friedman A. *Differential games*, New York: Wiley-Interscience, 1971. https://zbmath.org/0229.90060
6. Hájek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975. https://zbmath.org/0361.90084
7. Leitmann G. *Cooperative and non-cooperative many players differential games*, Vienna: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2914-2
8. Nahin P. J. *Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion*, Princeton: Princeton University Press, 2007.
9. Petrosyan L. A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Pursuit differential games), Leningrad: Leningrad State University, 1977.
10. Bakolas E. Optimal guidance of the isotropic rocket in the presence of wind, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 162, issue 3, pp. 954–974. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0504-4
11. Sinha A., Kumar S. R., Mukherjee D. Three-agent time-constrained cooperative pursuit–evasion, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2022, vol. 104, issue 2, article number: 28. https://doi.org/10.1007/s10846-022-01570-y
12. Lozano E., Becerra I., Ruiz U., Bravo L., Murrieta-Cid R. A visibility-based pursuit–evasion game between two nonholonomic robots in environments with obstacles, *Autonomous Robots*, 2022, vol. 46, issue 2, pp. 349–371. https://doi.org/10.1007/s10514-021-10026-5
13. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
14. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods for controlling of several dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
15. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of managed objects groups), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.

16. Bopardikar S. D., Bullo F., Hespanha J. P. On discrete-time pursuit–evasion games with sensing limitations, *IEEE Transactions on Robotics*, 2008, vol. 24, issue 6, pp. 1429–1439. https://doi.org/10.1109/TRO.2008.2006721
17. Casini M., Garulli A. A new class of pursuer strategies for the discrete-time lion and man problem, *Automatica*, 2019, vol. 100, pp. 162–170. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.11.015
18. Kazimirova R., Ibragimov G., Pansera B. A., Ibragimov A. Multi-pursuer and one-evader evasion differential game with integral constraints for an infinite system of binary differential equations, *Mathematics*, 2024, vol. 12, issue 8, 1183. https://doi.org/10.3390/math12081183
19. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems: Contributions to the International Seminar ISAM-90, held in Gaussing (GDR), March 19–23, 1990*, Berlin, Boston: De Gruyter, 1990, pp. 9–20. https://doi.org/10.1515/9783112581445-002
20. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics*, 1990, vol. 18, issue 1, pp. 18–56. https://doi.org/10.1007/BF03323153
21. Bohner M., Peterson A. *Advances in dynamic equations on time scales*, Boston: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8230-9
22. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. *Impulsive differential equations and inclusions*, New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
23. Martins N., Torres D. F. M. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales, *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 23–37. https://doi.org/10.7151/dmdico.1126
24. Mozhegova E. S., Petrov N. N. The differential game “Cossacks–robbers” on time scales, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 56–70. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-05
25. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales, *Dynamic Games and Applications*, 2022, vol. 12, issue 2, pp. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
26. Petrov N. N., Mozhegova E. S. Simple pursuit problem with phase constraints of two coordinated evaders on time scales, *Doklady Mathematics*, 2023, vol. 108, suppl. 1, pp. S86–S91. https://doi.org/10.1134/S1064562423600720
27. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives, *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, vol. 43, issues 1–2, pp. 194–207. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.028
28. Guseinov G. Sh. Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 285, issue 1, pp. 107–127. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5
29. Zhan Zaidong, Wei W. Necessary conditions for a class of optimal control problems on time scales, *Abstract and Applied Analysis*, 2009, vol. 2009, no. 1, 974394. https://doi.org/10.1155/2009/974394
30. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de328
31. Mozhegova E. S. On a group pursuit problem on time scales, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 130–140 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230109

Received 05.08.2024
Accepted 02.09.2024

Elena Sergeevna Mozhegova, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-6833-6968
E-mail: mozhegovalena@yandex.ru

Citation: E. S. Mozhegova. Capture of two coordinated evaders in a linear pursuit problem on time scales, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 3, pp. 397–409.