МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 359–374.

УДК 517.929, 517.957

© *А. А. Косов, Э. И. Семенов*

О МНОГОМЕРНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ ТИПА ПАНТОГРАФА С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается многомерное уравнение нелинейной диффузии типа пантографа с линейно растущим запаздыванием по времени и масштабированием по пространственным переменным в источнике (стоке). Предложено строить точные решения методом редукции с использованием двух анзацев с квадратичной зависимостью от пространственных переменных. Зависимость решения от пространственных переменных находится из системы алгебраических уравнений, а зависимость от времени находится из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с линейно растущим запаздыванием аргумента. Приводится ряд примеров точных решений, как радиально симметричных, так и анизотропных по пространственным переменным.

Ключевые слова: уравнение нелинейной диффузии типа пантографа, растущее запаздывание по времени, масштабирование по пространственным переменным, редукция, точные решения.

DOI: 10.35634/vm240304

Введение

Во многих областях естествознания встречаются системы, в которых протекающие процессы зависят не только от текущего состояния, но и от некоторого момента времени в прошлом. Такие системы называют системами с запаздыванием. Дифференциальные уравнения с частными производными (ДУЧП), описывающие процессы в таких системах, кроме искомой функции $f(\mathbf{x}, t)$ содержат также функцию $f(\mathbf{x}, t-\tau)$, где t — время, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. ДУЧП с запаздыванием широко используются при описании динамических процессов в механике деформируемого твердого тела (среды с наследственными свойствами), электродинамике (когда необходимо учитывать конечную скорость распространения взаимодействия), термодинамике (при описании необратимых процессов), в экологии (при описании размножения видов), медицине (при описании распространения инфекций), в механике (при учете запаздывания в переносе энергии и сигналов). При этом считается, что время запаздывания постоянно. Однако в некоторых случаях, о которых мы будем говорить далее, запаздывание может быть переменным и зависеть от времени [1,2], то есть $\tau = \tau(t)$, где $\tau(t) > 0$ — заданная функция. Наиболее известным примером дифференциального уравнения с переменным запаздыванием $\tau(t)$ является «*уравнение пантографа*». Такое название возникло благодаря работе [3], в которой динамика контактного токоприемника (пантографа) электровоза описывалась функционально-дифференциальным уравнением (ФДУ)

$$y'(t) = ay(t) + by\big(t - \tau(t)\big), \tag{1}$$

где запаздывание $\tau(t)$ является переменным и задается соотношением $\tau(t) = (1-k)t$, $0 < k < 1$. С учетом формулы для запаздывания $\tau(t)$, ФДУ (1) можно записать как $y'(t) = ay(t) + by(kt)$. В этом уравнении функция $y(kt)$ отличается от функции $y(t)$ растяжением вдоль оси t в $1/k$ раз. При $\tau(t) = (1-k)t$ выражение (1) является примером уравнения с линейным запаздыванием. Как указывается в [4], уравнения с линейным запаздыванием времени выделяются из класса уравнений с ограниченным переменным запаздыванием тем, что предыстория их решения неограниченно увеличивается с ростом времени. Также представляют интерес уравнения с ограниченным нелинейным запаздыванием, например нелинейные ДУЧП в теории упругих пластин [5,6]. Как отмечается в [7], уравнение пантографа (1) и более сложные родственные дифференциальные уравнения, которые содержат искомые функции с растяжением аргументов, используются для математического моделирования различных процессов в электродинамике, биологии, теории популяций, астрофизике, теории графов, теории риска и очередей. Большой теоретический и практический интерес представляют ДУЧП, в которых помимо искомой функции $V(x,t)$ содержатся также функции $V(\bar{x},\bar{t})$, где $\bar{x} = px$, $\bar{t} = qt$, то есть имеется переменное запаздывание по времени и по пространственной переменной. Здесь функция $V(\bar{x},\bar{t})$ отличается от функции $V(x,t)$ растяжением вдоль оси x в $1/p$ раз и вдоль оси времени t в $1/q$ раз. В статьях [7,8] ДУЧП с растяжением независимых переменных называются уравнениями с переменным запаздыванием типа пантографа. Отметим также, что в [7,8] и монографии [9] впервые в литературе описаны точные решения нелинейных ДУЧП с переменным запаздыванием и методы их построения.

Основное внимание в статье уделим *задаче построения многомерных точных решений* нелинейного уравнения диффузии с n пространственными переменными и переменным запаздыванием. Очевидно, что наличие переменного запаздывания, помимо нелинейности и многомерности, значительно усложняет исследование ДУЧП и задачу построения их точных многомерных решений. Поэтому поставленная задача является актуальной, так как ожидаемые результаты могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений начально-краевых задач для нелинейных ДУЧП большой размерности с переменным запаздыванием. В данной статье термин «точное решение» будем применять в случаях, когда решение выражается: (i) через элементарные функции, обращающие исследуемое уравнение в тождество; (ii) через решения ФДУ с переменным запаздыванием типа пантографа.

В качестве основного объекта исследований предлагается использовать многомерное уравнение диффузии со степенной нелинейностью и нелинейным источником, которое встречается во многих областях физики, химии, биологии и имеет огромное число приложений. Ранее авторами были построены точные многомерные решения уравнения нелинейной диффузии со степенной нелинейностью, а также родственных уравнений и нелинейных систем [10–12]. При этом естественно предполагать, что функция с переменным запаздыванием входит в источник и исследуемое уравнение имеет вид

$$V_t = \nabla \cdot (V^{\lambda} \nabla V) + \beta V^{1-\lambda} \bar{V}^{\lambda}. \tag{2}$$

Здесь $\lambda \neq 0$ — вещественный параметр нелинейности среды; $\beta \neq 0$ — произвольная постоянная, знак которой характеризует либо источник (процесс выделения тепла), либо сток (процесс поглощения тепла); ∇ — градиент; $V = V(\mathbf{x},t)$ — искомая функция, $t \geqslant 0$ — время, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$; $\bar{V} = V(p\mathbf{x}, qt)$ — функция, которая отличается от функции $V(\mathbf{x},t)$ растяжением вдоль оси вектора пространственных переменных $\mathbf{x}$ в $1/p$ раз и вдоль оси времени t в $1/q$ раз, где $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ — параметры свободного масштабирования. Отметим, что для простоты параметр p выбран единым для всех пространственных координат $x_1, \dots, x_n$. В общем случае мы имели бы $\bar{\mathbf{x}} = \{p_1 x_1, \dots, p_n x_n\}$, где $0 < p_i < 1$ для всех $i = \overline{1,n}$. Отметим, что (2) при $p = 1$ является частным случаем уравнения, приведенного в [9] (см. уравнение 3 на странице 424). Там приведено точное решение вида $V(\mathbf{x},t) = \psi(t)\big[\varphi(\mathbf{x})\big]^{1/(\lambda+1)}$, где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с переменным запаздыванием

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \big[\psi(t)\big]^{1-\lambda} \psi(qt),$$

а функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет n-мерному уравнению Лапласа. В данной статье мы построим другие точные многомерные решения уравнения (2). Для удобства, уравнение (2) простой заменой $V^\lambda = U$ ($\bar{V}^\lambda = \bar{U}$) преобразуем к виду

$$U_t = U\Delta U + \frac{1}{\lambda}|\nabla U|^2 + \alpha\bar{U}, \tag{3}$$

где $U = U(\mathbf{x}, t)$, $\bar{U} = U(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$, $\alpha = \lambda\beta \neq 0$. При $V > 0$ и $U > 0$ уравнения (2) и (3) эквивалентны. В случае $\alpha \equiv 0$ уравнение (3) является другой формой записи уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью. Отметим, что к (3) могут сводиться и другие уравнения. Например, уравнение в частных производных

$$V_t = K(V)\Delta V + \frac{\lambda K(V)K''(V) + K'^2(V)}{\lambda K'(V)}|\nabla V|^2 + \frac{\alpha K(\bar{V})}{K'(V)}, \tag{4}$$

где $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $K \in \mathbf{C}^2$ — произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая строго монотонная функция, заменой $U = K(V)$ сводится к уравнению (3). Так как уравнение (3) без линейного слагаемого $\bar{U}$ является уравнением теплопроводности со степенной нелинейностью, а аргументы функции $\bar{U} = U(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ задаются соотношениями $\bar{\mathbf{x}} = p\mathbf{x}$, $\bar{t} = qt$, то будем называть (3) *уравнением нелинейной диффузии (теплопроводности) типа пантографа с переменным запаздыванием*. Функция $Q(\bar{U}) = \alpha U(p\mathbf{x}, qt)$ описывает процесс тепловыделения или горения в среде, если $Q(\bar{U}) > 0$, и, обратно, — поглощение тепла, если $Q(\bar{U}) < 0$.

Как уже было отмечено, основной целью настоящей статьи является построение многомерных точных решений уравнения (2), соответственно, уравнения (3). Для решения поставленной задачи будем применять метод обобщенного разделения переменных [13, 14] и результаты авторов [10, 11] по построению многомерных точных решений нелинейных уравнений в частных производных с использованием специальной многомерной конструкции. А именно, решения уравнения (2), соответственно (3), будем отыскивать в виде

$$V(\mathbf{x}, t) = \big[U(\mathbf{x}, t)\big]^{1/\lambda}, \quad U(\mathbf{x}, t) = \psi(t)W_A(\mathbf{x}) + \phi(t), \tag{5}$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \big[U(\mathbf{x}, t)\big]^{1/\lambda}, \quad U(\mathbf{x}, t) = \varphi(t) + W(\mathbf{x}), \tag{6}$$

со следующими квадратичными функциями $W_A(\mathbf{x})$, $W(\mathbf{x})$:

$$W_A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \tag{7}$$

где функции $\psi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$, $\phi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$, $\varphi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$, ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ подлежат определению. Отметим также, что квадратичная функция $W(\mathbf{x})$ вида (7) использовалась при построении точных многомерных решений эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [15].

Основные результаты

Используя формулы (5)–(7), проведем редукцию уравнения в частных производных (3) к ФДУ с переменным запаздыванием для искомых функций $\psi(t)$, $\phi(t)$, $\varphi(t)$. После подстановки функций (5), (6) в уравнение (3) с учетом очевидных равенств $\bar{U} = \bar{\psi}\bar{W} + \bar{\phi}$, $\bar{U} = \bar{\varphi} + \bar{W}$ и элементарных преобразований приходим, соответственно, к выражениям

$$\psi' W_A + \phi' = (\psi W_A + \phi)\psi\Delta W_A + \frac{1}{\lambda}\psi^2|\nabla W_A|^2 + \alpha\bar{\psi}\bar{W}_A + \alpha\bar{\phi}, \tag{8}$$

$$\varphi' = \varphi\Delta W + W\Delta W + \frac{1}{\lambda}|\nabla W|^2 + \alpha\bar{\varphi} + \alpha\bar{W}. \tag{9}$$

Здесь и далее $\psi' = \dfrac{d\psi(t)}{dt}$, $\varphi' = \dfrac{d\varphi(t)}{dt}$, $\bar{\psi} = \psi(\bar{t}) \equiv \psi(qt)$, $\bar{\phi} = \phi(\bar{t}) \equiv \phi(qt)$, $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{t}) \equiv \varphi(qt)$. Напомним, что $\alpha = \lambda\beta$. Так как $W_A(\mathbf{x})$, $W(\mathbf{x})$ определяются формулами (7), то прямым вычислением находим

$$\begin{gathered} |\nabla W_A(\mathbf{x})|^2 = (A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}),\ \Delta W_A(\mathbf{x}) = \Delta W(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} A \text{ — след матрицы } A, \\ |\nabla W(\mathbf{x})|^2 = (A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B}, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2. \end{gathered} \tag{10}$$

Кроме того, с учетом запаздываний $\bar{\mathbf{x}} = p\mathbf{x}$, $\bar{t} = qt$, имеем

$$\bar{W}_A = W_A(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{p^2}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \bar{W} = W(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{p^2}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + p(\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C. \tag{11}$$

Далее, используя соотношения (10), (11), равенства (8), (9) запишем так

$$(\psi' - \operatorname{tr} A\, \psi^2 - \alpha p^2 \bar{\psi})(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \phi' = \frac{2}{\lambda}\psi^2(A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \operatorname{tr} A\, \psi\phi + \alpha\bar{\phi}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \varphi' = \operatorname{tr} A\, \varphi + \alpha\bar{\varphi} + \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})(\operatorname{tr} A + \alpha p^2) + (\mathbf{B}, \mathbf{x})(\operatorname{tr} A + \alpha p) + \\ + C(\operatorname{tr} A + \alpha) + \frac{1}{\lambda}(A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{2}{\lambda}(A\mathbf{B}, \mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda}|\mathbf{B}|^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, после подстановки анзацев (5), (6) в уравнение (3) и последующей редукции мы пришли к соотношениям (12), (13), которые помимо искомых функций времени содержат также множители и слагаемые с пространственными переменными. Теперь, при определенных предположениях на числовую симметрическую матрицу A, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константу $C \in \mathbb{R}$, соберем и сгруппируем слагаемые так, чтобы можно было в последних равенствах выделить отдельно выражения, содержащие только функции времени и их производные. Справедливы следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Если ненулевая числовая симметрическая матрица A удовлетворяет матричному уравнению*

$$A = 2\sigma A^2, \tag{14}$$

где $\sigma \neq 0$ — константа разделения, то равенство (12) *сводится к системе* ФДУ *типа пантографа следующего вида:*

$$\psi'(t) = \left(\operatorname{tr} A + \frac{1}{\lambda\sigma}\right)\psi^2(t) + \alpha p^2 \psi(qt), \tag{15}$$

$$\phi'(t) = \operatorname{tr} A\, \psi(t)\phi(t) + \alpha\phi(qt). \tag{16}$$

Доказательство. С учетом матричного равенства (14) формулу (12) можно записать как

$$\left[\sigma(\psi' - \operatorname{tr} A\, \psi^2 - \alpha p^2\bar{\psi}) - \frac{1}{\lambda}\psi^2\right](A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \phi' - \operatorname{tr} A\, \psi\phi - \bar{\phi} = 0.$$

Так как по предположению числовая матрица A является ненулевой, то последнее равенство обращается в ноль при выполнении соотношений (15), (16). $\square$

Утверждение 2. *Если ненулевая числовая симметрическая матрица A, вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений* (САУ)

$$(\operatorname{tr} A + \alpha p^2)A + \frac{2}{\lambda}A^2 = 0, \quad (\operatorname{tr} A + \alpha p)\mathbf{B} + \frac{2}{\lambda}A\mathbf{B} = 0, \quad (\operatorname{tr} A + \alpha)C + \frac{1}{\lambda}|\mathbf{B}|^2 = 0, \tag{17}$$

то равенство (13) *сводится к линейному* ФДУ *типа пантографа следующего вида:*

$$\varphi'(t) = \operatorname{tr} A\, \varphi(t) + \alpha\varphi(qt). \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем выражение (13) как

$$\varphi' - \operatorname{tr} A\,\varphi - \alpha\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})(\operatorname{tr} A + \alpha p^2) + (\mathbf{B},\mathbf{x})(\operatorname{tr} A + \alpha p) + \\ + C(\operatorname{tr} A + \alpha) + \frac{1}{\lambda}(A^2\mathbf{x},\mathbf{x}) + \frac{2}{\lambda}(A\mathbf{B},\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda}|\mathbf{B}|^2. \tag{19}$$

Легко видеть, что с учетом соотношений (17) правая часть равенства (19) обращается в ноль, в итоге получим ФДУ (18). □

Замечание 1. Если в уравнении (2) вместо $\bar{V} = V(\bar{\mathbf{x}},\bar{t})$, где $\bar{\mathbf{x}} = p\mathbf{x}$, $\bar{t} = qt$, рассмотреть функцию с переменным запаздыванием по времени вида $\bar{V} = V\big(p\mathbf{x}, t - \tau(t)\big)$, где $\tau(t)$ — некоторая непрерывная ограниченная функция, то приведенная выше редукция и утверждения 1, 2 останутся справедливыми, только вместо равенств (15), (16), (18) получим следующие ФДУ:

$$\psi'(t) = \left(\operatorname{tr} A + \frac{1}{\lambda\sigma}\right)\psi^2(t) + \alpha p^2\psi\big(t-\tau(t)\big), \quad \phi'(t) = \operatorname{tr} A\,\psi(t)\phi(t) + \alpha\phi\big(t-\tau(t)\big),$$
$$\varphi'(t) = \operatorname{tr} A\,\varphi(t) + \alpha\varphi\big(t-\tau(\tau)\big).$$

Таким образом, построение точных многомерных решений уравнения (3) с помощью анзацев (5), (6) свелось к интегрированию ФДУ с запаздыванием типа пантографа (15), (16), (18), разрешимости матричного уравнения (14) и САУ (17). Отметим, что ранее матричное уравнение (14) уже изучалось авторами в [10, 11] при исследовании и построении точных многомерных решений нелинейной системы уравнений реакции–диффузии с использованием конструкции (7). Решением этого уравнения является матрица

$$A = \frac{1}{2\sigma}\,SE_mS^T, \tag{20}$$

где E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. При этом след матрицы (20) задается соотношением

$$\operatorname{tr} A = \frac{m}{2\sigma}, \quad m \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь разрешимость матричного уравнения (17). Отметим, что оно всегда имеет тривиальное решение $A = 0$. Поэтому далее будем рассматривать только нетривиальные решения этого уравнения, в предположении что $\operatorname{tr} A + \alpha p^2 \neq 0$. В противном случае, получим матричное уравнение $A^2 = 0$, которое в классе симметричных матриц имеет решением только вещественную матрицу $A = 0$.

Утверждение 3. *Пусть $\lambda \neq -\dfrac{2}{m}$, E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n-m$ нулей. Тогда матрица*

$$A = \nu SE_mS^T, \quad \nu = -\frac{\alpha\lambda p^2}{\lambda m + 2}, \tag{22}$$

где S — произвольная ортогональная матрица, является решением матричного уравнения (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о. След матрицы A определяемой по формуле (22) имеет вид $\operatorname{tr} A = m\nu \equiv -\dfrac{\alpha\lambda p^2 m}{\lambda m + 2}$. С учетом этого соотношения матричное уравнение (17) перепишется как $\nu A = A^2$. Легко проверить, что решением этого матричного уравнения является $A = \nu P$, где P — произвольная идемпотентная матрица, то есть матрица, удовлетворяющая равенству $P^2 = P$. Известно [16, с. 196], что любую идемпотентную матрицу P можно записать как $P = ME_mM^{-1}$, где M — некоторая невырожденная матрица порядка n, E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей; E_m также является идемпотентной: $E_m^2 = E_m$. Поскольку нас интересуют только симметрические матрицы A, то идемпотентные матрицы P мы должны взять также симметрическими, то есть $P = SE_mS^T$, где S — произвольная ортогональная матрица. Отсюда получим окончательный вид матрицы A, определяемой формулой (22). Утверждение доказано. □

Векторное уравнение (17) представляет собой систему n линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент $b_1, \ldots, b_n$ искомого вектора $\mathbf{B}$. Для каждой фиксированной матрицы A вида (22) с $\operatorname{rank} A = m < n$, в предположении $\operatorname{tr} A + \alpha p \neq 0$, всегда существует нетривиальное решение линейной однородной системы. В случае когда $\operatorname{rank} A = m = n$, то есть при $E_m \equiv E$, линейная однородная система уравнений имеет решение — произвольный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$. После того как последовательно найдены решения матричного и векторного уравнений, постоянная C определяется из скалярного уравнения (17) единственным образом.

Таким образом, мы пришли к справедливости следующих результатов.

Теорема 1. *Если матрица A задается формулой* (20)*, а функции $\psi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$, $\phi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$ удовлетворяют системе* ФДУ (15), (16)*, то функция*

$$V(\mathbf{x}, t) = \big[\psi(t)W_A(\mathbf{x}) + \phi(t)\big]^{1/\lambda}, \tag{23}$$

где квадратичная функция $W_A(\mathbf{x})$ определяется формулой (7)*, является точным многомерным решением уравнения* (2).

Теорема 2. *Если матрица A задается формулой* (22)*, вектор $\mathbf{B}$ и константа C определяются из* САУ (17)*, а функция $\varphi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$ удовлетворяет линейному* ФДУ (18)*, то функция*

$$V(\mathbf{x}, t) = \big[\varphi(t) + W(\mathbf{x})\big]^{1/\lambda}, \tag{24}$$

где квадратичная функция $W(\mathbf{x})$ определяется формулой (7)*, является точным многомерным решением уравнения* (2).

Справедливость этих теорем следует из проведенной в начале этого раздела редукции и утверждений 1, 2. Отметим, что пространственная структура решений (23), (24) с многомерной конструкцией (7) определяется рангом матрицы A. Если $\operatorname{rank} A = m = 1$, то имеем «псевдомногомерные» точные решения, то есть решения с линейной комбинацией пространственных переменных. Если $1 < \operatorname{rank} A = m < n$, то получим анизотропные по пространственным переменным точные решения уравнения (3). Наконец, если $\operatorname{rank} A = m = n$, то имеем радиально-симметричные по пространственным переменным точные решения.

Пример 1. Применяя теорему 2, построим точные анизотропные по пространственным переменным и радиально-симметричные решения уравнения (2) в трехмерном координатном пространстве $n = 3$. Для этого нам понадобится решение ФДУ (18), которое, как нетрудно убедиться, определяется степенным рядом

$$\varphi(t) = t_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!}\, t^k, \tag{25}$$

где $t_0 \neq 0$ — произвольная постоянная, а константы T_k задаются соотношениями

$$T_k = \prod_{j=0}^{k-1} (\operatorname{tr} A + \alpha q^j), \quad \operatorname{tr} A + \alpha q^j \neq 0.$$

Если для некоторого фиксированного конечного k потребовать выполнение равенства

$$\operatorname{tr} A + \alpha q^k = 0, \tag{26}$$

то из формулы (25) получим решение ФДУ (18) в виде многочлена по переменной t степени k

$$\varphi_k(t) = t_0 \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\, t^i \prod_{j=0}^{i-1} (\operatorname{tr} A + \alpha q^j). \tag{27}$$

С учетом соотношения (26) из утверждения 3 следует, что решение матричного уравнения (17), определяемое формулой (22), имеет место при

$$q^k = \frac{\lambda p^2 m}{\lambda m + 2}, \quad \lambda \neq -\frac{2}{m}, \quad m \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{28}$$

Далее, в этом примере, чтобы избежать громоздкости в записи формул точных решений, положим $k = 1$. В этом частном случае равенства (26) и (28) запишутся как

$$\operatorname{tr} A + \alpha q = 0, \quad q = \frac{\lambda p^2 m}{\lambda m + 2}, \tag{29}$$

а из формулы (27) получим частное точное решение ФДУ (18) вида

$$\varphi_1(t) = \big(\alpha(1 - q)t + 1\big) t_0, \tag{30}$$

где $t_0 \neq 0$ — произвольная постоянная. В случае $n = 3$ ортогональную матрицу S выберем в виде

$$S = \begin{pmatrix} \frac{43}{60} & -\frac{\sqrt{70}}{60} & -\frac{41}{60} \\ -\frac{1}{60} & \frac{7\sqrt{70}}{60} & -\frac{13}{60} \\ \frac{\sqrt{70}}{12} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{70}}{12} \end{pmatrix}.$$

Матрицы E_m возьмем трех возможных рангов: $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$. Тогда решениями матричного уравнения (17) по формуле (22) будут следующие матрицы

$$A_1 = \frac{\beta \lambda^2 p^2}{\lambda + 2} \begin{pmatrix} -\frac{1849}{3600} & \frac{43}{3600} & -\frac{43\sqrt{70}}{720} \\ \frac{43}{3600} & -\frac{1}{3600} & \frac{70}{720} \\ -\frac{43\sqrt{70}}{720} & \frac{70}{720} & -\frac{35}{720} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq -2,$$

$$A_2 = -\frac{\beta\lambda^2 p^2}{\lambda+1}\begin{pmatrix} \frac{353}{720} & \frac{49}{720} & \frac{\sqrt{70}}{720} \\ \frac{49}{720} & \frac{17}{720} & -\frac{7\sqrt{70}}{720} \\ \frac{\sqrt{70}}{720} & -\frac{7\sqrt{70}}{720} & \frac{35}{72} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq -1,$$

$$A_3 = -\frac{\beta\lambda^2 p^2}{3\lambda+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1, \quad \lambda \neq -2/3.$$

Заметим, что в случае $p = q$ первое равенство (29) запишется как $\operatorname{tr} A + \alpha p = 0$ и, следовательно, векторное уравнение (17) имеет только тривиальное решение. Если к тому же $p \neq 1$, то скалярное уравнение (17) также будет иметь только тривиальное решение $C = 0$. Поэтому далее, в этом примере, будем считать выполненным неравенство $p \neq q$. Для матрицы A_1 решения векторного уравнения (17), соответственно скалярного уравнения (17), будут различными в зависимости от следующих случаев: p — любое из интервала $(0; 1)$ и $p = (\lambda+2)/\lambda$, $\lambda \in (-\infty; -2)$. В итоге, для матрицы A_1 ранга $m = 1$ получим следующие точные решения уравнения (2) для показателя степени $\lambda \neq -2$ и параметра запаздывания $q = \lambda p^2/(\lambda+2)$:

$$V_{11}(x,y,z,t) = \left[\left(\beta\lambda\left(1 - \frac{\lambda p^2}{\lambda+2}\right)t + 1\right)t_0 + \frac{\lambda^2 p^2}{(\lambda+2)}\,\Phi_1\right]^{1/\lambda}, \quad 0 < p < 1,$$

$$V_{12}(x,y,z,t) = \big[(1 - 2\beta t)t_0 + (\lambda+2)\Phi_1 + \Phi_2\big]^{1/\lambda}, \quad p = \frac{\lambda+2}{\lambda}, \quad \lambda \in (-\infty; -2),$$

где введены обозначения

$$\Phi_1(x,y,z) = -\frac{\beta}{7200}(43x - y + 5\sqrt{70}z)^2,$$

$$\Phi_2(x,y,z) = \left(\frac{b_1}{43} - \frac{5\sqrt{70}\,b_2}{43}\right)x + b_1 y + b_2 z + \frac{1850\,b_1^2 - 10\sqrt{70}\,b_1 b_2 + 3599\,b_2^2}{3698\,\beta\lambda}.$$

Здесь $\beta \neq 0$, $t_0 \neq 0$, b_1, b_2 — произвольные постоянные. Точные решения $V_{11}(x,y,z,t)$, $V_{12}(x,y,z,t)$ являются «псевдомногомерными», так как зависят от линейных комбинаций независимых переменных. Для матрицы A_2 решения векторного уравнения (17), соответственно скалярного уравнения (17), будут различными в зависимости от следующих случаев: p — любое из интервала $(0; 1)$ и $p = (\lambda+1)/\lambda$, $\lambda \in (-\infty; -1)$. В итоге, для матрицы A_2 ранга $m = 2$ получим следующие точные анизотропные по пространственным переменным решения уравнения (2) для показателя степени $\lambda \neq -1$ и параметра запаздывания $q = \lambda p^2/(\lambda+1)$:

$$V_{21}(x,y,z,t) = \left[\beta\lambda\left(1 - \frac{\lambda p^2}{\lambda+1}\right)t_0 t + t_0 + \frac{\lambda^2 p^2}{(\lambda+1)}\,F_1\right]^{1/\lambda}, \quad 0 < p < 1,$$

$$V_{22}(x,y,z,t) = \big[(1 - \beta t)t_0 + (\lambda+1)F_1 + F_2\big]^{1/\lambda}, \quad p = \frac{\lambda+1}{\lambda}, \quad \lambda \in (-\infty; -1),$$

где введены обозначения

$$F_1(x,y,z) = -\frac{\beta}{1440}(353x^2 + 17y^2 + 350z^2 + 98xy + 2\sqrt{70}\,xz - 14\sqrt{70}\,yz),$$

$$F_2(x,y,z) = -\left(\frac{\sqrt{70}}{10}\,x - \frac{7\sqrt{70}}{10}\,y - z\right)b_1 + \frac{36\,b_1^2}{\beta\lambda}.$$

Здесь $\beta \neq 0$, $t_0 \neq 0$, b_1, b_2 — произвольные постоянные. Для матрицы A_3 ранга $m = 3$ получим точное радиально-симметричное решение уравнения (2) для показателя степени $\lambda \neq -2/3$ и параметра запаздывания $q = 3\lambda p^2/(3\lambda + 2)$ следующего вида

$$V_3(x, y, z, t) = \left[\beta\lambda\left(1 - \frac{3\lambda p^2}{3\lambda + 2}\right)t_0 t + t_0 - \frac{\beta\lambda^2 p^2}{2(3\lambda + 2)}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^{1/\lambda}, \quad 0 < p < 1,$$

где $\beta \neq 0$, $t_0 \neq 0$ — произвольные постоянные.

В следующих двух примерах нам понадобятся точные решения ФДУ (15), которое с учетом формулы для следа матрицы A запишется как

$$\psi'(t) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{\lambda}\right)\psi^2(t) + \alpha p^2 \psi(qt). \tag{31}$$

При отыскании точных решений ФДУ (31) мы должны рассмотреть два случая: $\lambda = -2/m$ и $\lambda \neq -2/m$. Напомним также, что параметры α и β связаны равенством $\alpha = \lambda\beta$.

Пример 2. Пусть $\lambda = -2/m$, $m \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, тогда уравнение (2) примет вид

$$V_t = \nabla \cdot (V^{-\frac{2}{m}} \nabla V) + \beta V^{\frac{m+2}{m}} \bar{V}^{-\frac{2}{m}}, \quad V = V(\mathbf{x}, t), \quad \bar{V} = V(p\mathbf{x}, qt), \tag{32}$$

Точные решения этого уравнения будем отыскивать в виде

$$V(\mathbf{x}, t) = \big[\psi(t) W_A(\mathbf{x})\big]^{-m/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

где функция $\psi(t) \in C^1\big([0, +\infty)\big)$ удовлетворяет следующему линейному ФДУ с переменным запаздыванием

$$\psi'(t) + \frac{2\beta p^2}{m}\psi(qt) = 0, \tag{34}$$

а функция $W_A(\mathbf{x})$ определяется выражением (7), в которой матрица A имеет вид (20), а ее след $\operatorname{tr} A$ задается соотношением (21). Уравнение (34) получается из ФДУ (31) при $\lambda = -2/m$ и $\alpha = \lambda\beta$. Нетрудно убедиться, что решение ФДУ (34) задается формулой

$$\psi(t) = t_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k\right), \quad c_k = \frac{2^k(-\beta)^k p^{2k}}{m^k k!}\, q^{T_{k-1}}, \tag{35}$$

где $t_0 \neq 0$ — произвольная постоянная, а $T_{k-1} = (k-1)k/2$ — так называемые треугольные числа [17], которые образуют бесконечную возрастающую последовательность вида

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, \ldots.$$

Приведем анизотропное по пространственным переменным ($m = 2$) и радиально-симметричное ($m = 3$), точные решения уравнения (32) в трехмерном координатном пространстве. Пусть $m = 3$, тогда уравнение (32) с $\lambda = -2/3$ вида

$$V_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(V^{-2/3}\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V^{-2/3}\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(V^{-2/3}\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \beta V^{5/3}\bar{V}^{-2/3},$$

имеет точное радиально-симметричное решение

$$V(x, y, z, t) = \left[\frac{t_0}{4\sigma}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(-\beta)^k p^{2k}}{3^k k!}\, q^{T_{k-1}} t^k\right)(x^2 + y^2 + z^2)\right]^{-3/2}. \tag{36}$$

Пусть теперь $m = 2$, тогда $\lambda = -1$ и уравнение (32) можно записать как

$$V_t = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot\right)\ln V + \beta V^2 \bar{V}^{-1}.$$

Это уравнение имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$V(x,y,z,t) = \left[\frac{t_0}{14400\,\sigma}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k p^{2k}}{k!}\, q^{T_{k-1}} t^k\right) W(x,y,z)\right]^{-1}, \tag{37}$$

где

$$W(x,y,z) = 1919\,x^2 + 3431\,y^2 + 1850\,z^2 - 1066\,xy + 410\sqrt{70}\,xz + 130\sqrt{70}\,yz.$$

В формулах точных решений (36), (37) $t_0 \neq 0$, $\sigma \neq 0$ — произвольные постоянные.

Пример 3. Пусть $\lambda \neq -2/m$, тогда решение ФДУ (31), исходя из его структуры, будем отыскивать в виде

$$\psi(t) = \frac{a}{t} + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k, \tag{38}$$

где a, b_j, $j = 0, 1, \ldots,$ — константы, подлежащие определению. После подстановки (38) в уравнение (31), полагая

$$a = -\frac{2\lambda\sigma}{\lambda m + 2}, \quad b_0 = -\frac{\lambda\sigma}{\lambda m + 2}\frac{\alpha p^2}{q},$$

легко выписать формулы для коэффициентов ряда b_j, $j = 1, 2, \ldots,$

$$b_1 = (1-2q)\frac{\alpha^2 p^4 \lambda\sigma}{6q^2(\lambda m + 2)}, \quad b_2 = (1-2q)\frac{\alpha^3 p^6 \lambda\sigma}{24q^3(\lambda m + 2)}(q^2 - 1),$$
$$b_3 = -(1-2q)\frac{\alpha^4 p^8 \lambda\sigma}{360q^4(\lambda m + 2)}\left(4 - 2q - 3q^2 - 3q^3 + 3q^5\right), \ldots.$$

Заметим, что все коэффициенты b_j, $j = 1, 2, \ldots,$ содержат множитель $1 - 2q$, при равенстве нулю которого получим $\psi(t) = b_0 + a/t$. Итак, пусть $q = 1/2$, тогда функция

$$\psi_1(t) = -\frac{2\lambda\sigma}{(\lambda m + 2)}\left(\frac{1}{t} + \alpha p^2\right) \tag{39}$$

является частным точным решением уравнения (31). С учетом функции $\psi_1(t)$ точное решение линейного ФДУ (16) будем отыскивать в виде следующего ряда

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k t^k. \tag{40}$$

После подстановки (40) в ФДУ (16) и элементарных преобразований придем к следующему равенству

$$\frac{2(\lambda m + 1)}{\lambda m + 2} T_1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\alpha\left(\frac{\lambda m p^2}{\lambda m + 2} - \frac{1}{2^j}\right) T_j + \frac{(j+2)\lambda m + 2(j+1)}{\lambda m + 2} T_{j+1}\right] t^j = 0. \tag{41}$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы первое слагаемое обращалось в ноль. При этом возможны два варианта: $\lambda m + 1 = 0$ или $T_1 = 0$. Пусть $\lambda = -1/m$ и $T_1 \neq 0$, тогда для определения коэффициентов получим следующую рекуррентную формулу

$$T_{j+1} = \frac{\alpha}{j}\left(p^2 + \frac{1}{2^j}\right)T_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

или

$$T_k = \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} T_1 \prod_{j=1}^{k-1}\left(p^2 + \frac{1}{2^j}\right), \quad k = 2, 3, \ldots.$$

В этом случае решение ФДУ (16) по формуле (40) имеет вид

$$\phi_1(t) = T_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} t^k \prod_{j=1}^{k-1}\left(p^2 + \frac{1}{2^j}\right).$$

Пусть теперь $T_1 = 0$ и $\lambda \neq -1/m$, тогда равенство (41) сократится и запишется как

$$\frac{3\lambda m + 4}{\lambda m + 2} T_2 t + \sum_{j=2}^{\infty}\left[\alpha\left(\frac{\lambda m p^2}{\lambda m + 2} - \frac{1}{2^j}\right)T_j + \frac{(j+2)\lambda m + 2(j+1)}{\lambda m + 2} T_{j+1}\right]t^j = 0.$$

Здесь также возможны два варианта: $3\lambda m + 4$ или $T_2 = 0$. Пусть $\lambda = -4/(3m)$ и $T_2 \neq 0$, тогда для определения оставшихся коэффициентов получим следующую рекуррентную формулу

$$T_{j+1} = \frac{\alpha}{j-1}\left(2p^2 + \frac{1}{2^j}\right)T_j, \quad j = 2, 3, \ldots,$$

или

$$T_k = \frac{\alpha^{k-2}}{(k-2)!} T_2 \prod_{j=2}^{k-1}\left(2p^2 + \frac{1}{2^j}\right), \quad k = 3, 4, \ldots.$$

При этом формула (40) запишется как

$$\phi_2(t) = T_2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^{k-2}}{(k-2)!} t^k \prod_{j=2}^{k-1}\left(2p^2 + \frac{1}{2^j}\right).$$

Здесь, для сходимости этого ряда достаточно потребовать условие $p < 1/\sqrt{2}$. Продолжая аналогичные рассуждения, на i-м шаге для $\lambda = -2i/((i+1)m)$ получим рекуррентную формулу

$$T_{j+1} = \frac{\alpha}{j-i+1}\left(ip^2 + \frac{1}{2^j}\right)T_j,$$

или

$$T_k = \frac{\alpha^{k-i}}{\prod\limits_{j=i}^{k-1}(j-i+1)} T_i \prod_{j=i}^{k-1}\left(ip^2 + \frac{1}{2^j}\right), \quad k = i+1, i+2, \ldots.$$

причем $T_1 = T_2 = \ldots = T_{i-1} = 0$, а $T_i \neq 0$. В этом случае при $p < 1/\sqrt{i}$ решение линейного ФДУ (16) в виде сходящегося степенного ряда задается формулой

$$\phi_i(t) = T_i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\alpha^{k-i} t^k}{\prod\limits_{j=i}^{k-1}(j-i+1)} \prod_{j=i}^{k-1}\left(ip^2 + \frac{1}{2^j}\right). \tag{42}$$

Таким образом, по теореме 1 на каждом i-м шаге мы получим решения соответствующего (i,m)-параметрического семейства нелинейных ДУЧП вида (2) с показателями степени $\lambda = -2i/((i+1)m)$, $m \in \{1,2,\ldots,n\}$. Так для $\phi_i(t)$, заданных формулами (42), по теореме 1 функции вида

$$V_i(\mathbf{x},t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{t} - \frac{\beta p^2}{m}\right)(SE_mS^T\mathbf{x},\mathbf{x}) + \phi_i(t)\right]^{-\frac{(i+1)m}{2i}},$$

являются точными решениями, соответственно, следующих уравнений

$$V_t = \nabla\cdot(V^{-\frac{2i}{(i+1)m}}\nabla V) + \beta V^{1+\frac{2i}{(i+1)m}}\bar{V}_i^{-\frac{(i+1)m}{2i}}, \quad (i,m)\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\bar{V}_i = \bar{V}_i\left(p_i\mathbf{x}, \dfrac{1}{2}\,t\right)$, $p_i < 1/\sqrt{i}$. Как видно, решения в виде степенных рядов (40) линейного ФДУ (16) с заданной функцией $\psi_1(t)$ вида (39) имеют место только для отрицательных показателей степени λ, которые задаются формулой

$$\lambda = -\frac{2i}{(i+1)m}, \quad (i,m)\in\mathbb{N}.$$

При этом функция $\psi_1(t)$ найдена для любого $\lambda \neq -2/m$. Поэтому в случае $\phi(t)\equiv 0$ мы получим точные решения ДУЧП (2) в том числе и для положительных λ. Например, нетрудно убедиться, что в трехмерном координатном пространстве нелинейное ДУЧП вида

$$V_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(V^\lambda\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V^\lambda\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(V^\lambda\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \beta\, V^{1-\lambda}\bar{V}^\lambda,$$
$$V = V(x,y,z,t), \quad \bar{V} = \bar{V}\left(px,py,pz,\frac{1}{2}\,t\right),$$

по теореме 1 имеет частные точные решения

$$V_1(x,y,z,t) = \left[-\frac{\lambda}{7200(\lambda+2)}\left(\frac{1}{t}+\lambda\beta p^2\right)(43x - y + 5\sqrt{70}z)^2\right]^{1/\lambda}, \quad \lambda\neq -2,$$
$$V_2(x,y,z,t) = \left[\frac{\lambda}{14400(\lambda+1)}\left(\frac{1}{t}+\lambda\beta p^2\right)W(x,y,z)\right]^{1/\lambda}, \quad \lambda \neq -1,$$
$$V_3(x,y,z,t) = \left[-\frac{\lambda}{2(3\lambda+2)}\left(\frac{1}{t}+\lambda\beta p^2\right)(x^2+y^2+z^2)\right]^{1/\lambda}, \quad \lambda\neq -\frac{2}{3},$$

где функция $W(x,y,z)$ задается формулой

$$W(x,y,z) = 1751\,x^2 + 3599\,y^2 + 1850\,z^2 + 86\,xy - 430\sqrt{70}\,xz + 10\sqrt{70}\,yz.$$

Решение V_1 получено для случая $m=1$ и является «псевдомногомерным», так как содержит линейную комбинацию пространственных переменных. Решение V_2 получено для случая $m=2$ и является анизотропным по пространственным переменным. Решение V_3 получено для случая $m=3$ и является радиально-симметричным.

Заключение

В статье построены многомерные точные решения нелинейного уравнения в частных производных типа пантографа с переменным запаздыванием, которое помимо искомой функции $V(\mathbf{x}, t)$, содержат также функцию с растяжением независимых переменных $V(p\mathbf{x}, qt)$. Полученные результаты могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных (2), (3) большой размерности.

Финансирование. Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (Рег. № НИОКТР: 121041300058-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. https://zbmath.org/0043.30904
2. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
3. Ockendon J. R., Tayler A. B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1971. Vol. 322. No. 1551. P. 447–468. https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078
4. Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 105–115. https://www.mathnet.ru/rus/vspui260
5. Benaissa Abbes, Benaissa Abdelkader, Messaoudi Salim A. Global existence and energy decay of solutions for the wave equation with a time varying delay term in the weakly nonlinear internal feedbacks // Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 53. Issue 12. 123514. https://doi.org/10.1063/1.4765046
6. Зеннир Х. Стабилизация решений уравнения теории пластин с переменным по времени запаздыванием и слабой вязкоупругостью в пространстве $\mathbb{R}^n$ // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. № 9. С. 25–38. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-9-25-38
7. Полянин А. Д., Сорокин В. Г. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2020. Т. 9. № 4. С. 315–328. https://elibrary.ru/item.asp?id=44262640
8. Polyanin A. D., Sorokin V. G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: exact solutions and the principle of analogy // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 5. 511. https://doi.org/10.3390/math9050511
9. Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журов А. И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием. Свойства, методы, решения и модели. М.: Изд-во «ИПМех РАН», 2022.
10. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных многомерных решениях системы уравнений реакции–диффузии со степенными нелинейностями // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 4. С. 796–812. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.408
11. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 108–122. https://doi.org/10.1134/S0374064118010090
12. Косов А. А., Семенов Э. И. Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63. № 6. С. 1290–1307. https://www.mathnet.ru/rus/smj7732
13. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

14. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Изд-во «ИПМех РАН», 2020.
15. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 12. С. 1619–1640. https://doi.org/10.31857/S037406412312004X
16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
17. Деза Е. И. Специальные числа натурального ряда. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

Поступила в редакцию 27.05.2024
Принята к публикации 01.08.2024

Косов Александр Аркадьевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Семенов Эдуард Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945
E-mail: edwseiz@gmail.com

Цитирование: А. А. Косов, Э. И. Семенов. О многомерных точных решениях уравнения нелинейной диффузии типа пантографа с переменным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 359–374.

A. A. Kosov, E. I. Semenov

On multidimensional exact solutions of the nonlinear diffusion equation of the pantograph type with variable delay

Keywords: nonlinear diffusion equation of pantograph type, increasing time delay, scaling in spatial variables, reduction, exact solutions.

MSC2020: 35K59, 35C05

DOI: 10.35634/vm240304

We consider a multidimensional pantograph-type nonlinear diffusion equation with a linearly increasing time delay and scaling with respect to spatial variables in the source (sink). It is proposed to construct exact solutions by the reduction method using two ansatzes with a quadratic dependence on spatial variables. The dependence of the solution on spatial variables is found from a system of algebraic equations, and the dependence on time is found from a system of ordinary differential equations with a linearly increasing delay of the argument. A number of examples of exact solutions are given, both radially symmetric and anisotropic with respect to spatial variables.

Funding. The work was carried out with a subsidy from the Russian Ministry of Education and Science as part of the project "Analytical and numerical methods of mathematical physics in problems of tomography, quantum field theory, and fluid and gas mechanics", no. of state registration: 121041300058-1.

REFERENCES

1. Myshkis A. D. *Lineinye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* (Linear differential equations with retarded argument), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1951. https://zbmath.org/0043.30904
2. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii s otklonyayushchimsya argumentom* (Introduction to the theory of differential equations with deviating argument), Moscow: Nauka, 1971.
3. Ockendon J. R., Tayler A. B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1971, vol. 322, no. 1551, pp. 447–468. https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078
4. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Stability analysis of homogeneous differential-difference equation with linear delay, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya*, 2015, issue 3, pp. 105–115. https://www.mathnet.ru/eng/vspui260
5. Benaissa Abbes, Benaissa Abdelkader, Messaoudi Salim A. Global existence and energy decay of solutions for the wave equation with a time varying delay term in the weakly nonlinear internal feedbacks, *Journal of Mathematical Physics*, 2012, vol. 53, issue 12, 123514. https://doi.org/10.1063/1.4765046
6. Zennir H. Stabilization for solutions of plate equation with time-varying delay and weak-viscoelasticity in $\mathbb{R}^n$, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, issue 9, pp. 21–33. https://doi.org/10.3103/S1066369X20090030
7. Polyanin A. D., Sorokin V. G. Exact solutions of nonlinear partial differential equations with pantograph type variable delay, *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 315–328. https://elibrary.ru/item.asp?id=44262640
8. Polyanin A. D., Sorokin V. G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: exact solutions and the principle of analogy, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 5, 511. https://doi.org/10.3390/math9050511
9. Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I. *Differentsial'nye uravneniya s zapazdyvaniem. Svoistva, metody, resheniya i modeli* (Differential equations with delay. Properties, methods, solutions and models), Moscow: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 2022.

10. Kosov A. A., Semenov E. I. Multidimensional exact solutions to the reaction-diffusion system with power-law nonlinear terms, *Siberian Matematical Journal*, 2017, vol. 58, issue 4, pp. 619–632. https://doi.org/10.1134/S0037446617040085
11. Kosov A. A., Semenov E. I. On exact multidimensional solutions of a nonlinear system of reaction–diffusion equations, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 1, pp. 106–120. https://doi.org/10.1134/S0012266118010093
12. Kosov A. A., Semenov E. I. New exact solutions of the diffusion equation with power nonlinearity, *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, issue 6, pp. 1102–1116. https://doi.org/10.1134/S0037446622060106
13. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* (Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics), Moscow: Fizmatlit, 2005.
14. Polyanin A. D., Zhurov A. I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki* (Methods of separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics), Moscow: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 2020.
15. Kosov A. A., Semenov E. I. On exact solutions of a multidimensional system of elliptic equations with power-law nonlinearitiess, *Differential Equations*, 2023, vol. 59, issue 12, pp. 1627–1649. https://doi.org/10.1134/s0012266123120054
16. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* (The theory of matrices), Moscow: Nauka, 1988.
17. Deza E. I. *Spetsial'nye chisla natural'nogo ryada* (Special numbers of the natural series), Moscow: Librokom, 2011.

Received 27.05.2024
Accepted 01.08.2024

Aleksandr Arkad'evich Kosov, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Eduard Ivanovich Semenov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945
E-mail: edwseiz@gmail.com

Citation: A. A. Kosov, E. I. Semenov. On multidimensional exact solutions of the nonlinear diffusion equation of the pantograph type with variable delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 3, pp. 359–374.