МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 311–320.

УДК 517.927

© *Г. Э. Абдурагимов*

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НА ОДНОМ ИЗ КОНЦОВ ОТРЕЗКА

В статье изучается существование положительных решений на отрезке $[0,1]$ двухточечной краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с интегральным граничным условием на одном из концов отрезка. С помощью теоремы Го–Красносельского о неподвижной точке, с использованием некоторых свойств функции Грина соответствующего дифференциального оператора, получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, положительное решение, конус, функция Грина.

DOI: 10.35634/vm240301

Введение

Краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассматриваются вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и так далее, причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

Дифференциальные уравнения третьего порядка возникают в различных областях прикладной математики и физики, например при отклонении изогнутой балки с постоянным или переменным поперечным сечением, трехслойной балки, колебаний электромагнитных волн или гравитационных потоков и так далее. В последнее время вопросы краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка привлекли широкое внимание исследователей, однако работ, в которых рассматриваются положительные решения краевых задач, относительно немного (см., например, [1–6]). Приведем небольшой обзор работ, наиболее близких к результатам настоящей статьи.

В [7] с помощью теоремы Го–Красносельского о неподвижной точке были установлены достаточные условия существования монотонного положительного решения краевой задачи

$$\begin{aligned}
&x'''(t) + f\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0, \quad 0 < t < 1,\\
&x(0) = x'(0) = 0,\\
&x'(1) = \int_0^1 g(t)x'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

С помощью теоремы о неподвижной точке в конусе и нелокальной функции Грина в [8] было доказано существование хотя бы одного положительного решения задачи

$$
\begin{aligned}
&x'''(t) + f\bigl(t, x(t), x'(t)\bigr) = 0, \quad 0 < t < 1,\\
&x(0) = x''(0) = 0,\\
&x(1) = \int_0^1 g(t)x(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

В [9] на основе теоремы Го–Красносельского были получены критерии существования положительного решения задачи

$$
\begin{aligned}
&x'''(t) + f\bigl(x(t)\bigr) = 0, \quad 0 < t < 1,\\
&x'(0) = x'(1) = 0,\\
&x(0) = \alpha \int_0^\eta x(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

где $\alpha > 0$, $\eta \in (0, 1)$.

Большой вклад непосредственно в развитие теории функционально-дифференциальных уравнений и их приложений был внесен профессорами Н. В. Азбелевым, В. П. Максимовым, Л. Ф. Рахматуллиной, П. М. Симоновым, Е. С. Жуковским и другими представителями Пермской математической школы. Большая часть результатов по краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений нашла свое воплощение в трудах Пермского математического семинара и опубликована в сводной монографии [11]. В предлагаемой статье с помощью известной теоремы Го–Красносельского получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи с интегральным граничным условием на одном из концов отрезка исследования для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка.

§ 1. Основные обозначения и определения

В работе использованы следующие обозначения пространств: $\mathbb{C}$ — пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций и $\mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — пространство суммируемых на $[0, 1]$ со степенью $p \in (1, \infty)$ функций.

Рассмотрим краевую задачу

$$x'''(t) + f\bigl(t, (Tx)(t)\bigr) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x''(1) = \int_0^1 g(t)x''(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{L}_p$ — линейный положительный [13, с. 59] непрерывный оператор, $g(t)$ — неотрицательная суммируемая на $[0, 1]$ функция такая, что $\int_0^1 g(t)\,dt < 1$, $f(t, u)$ неотрицательна на $[0, 1] \times [0, \infty)$, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) будем подразумевать функцию $x(t)$ с абсолютно непрерывной второй производной, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2)–(1.3).

Лемма 1.1. *Пусть* $h \in \mathbb{C}$. *Тогда линейная краевая задача*

$$x'''(t) = -h(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1.4}$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \tag{1.5}$$

$$x''(1) = \int_0^1 g(t)x''(t)\,dt, \tag{1.6}$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^1 \left[G_0(t,s) + \frac{t^2}{2(1-\mu)}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\,d\tau\right]h(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$G_0(t,s) = \frac{1}{2}\begin{cases}(2t-s)s, & 0 \leqslant s \leqslant t,\\ t^2, & t \leqslant s \leqslant 1,\end{cases} \qquad G_1(t,s) = \begin{cases}0, & 0 \leqslant s \leqslant t,\\ 1, & t \leqslant s \leqslant 1,\end{cases} \qquad \mu = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрировав последовательно (1.4), получим

$$x''(t) = -\int_0^t h(s)\,ds + C_0,$$

$$x'(t) = -\int_0^t (t-s)h(s)\,ds + C_0 t + C_1,$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 h(s)\,ds + \frac{1}{2}C_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

С учетом граничных условий (1.5) и (1.6) получим $C_1 = C_2 = 0$ и

$$C_0 = \int_0^1 h(s)\,ds + x''(1).$$

Затем

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}\int_0^1 h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}x''(1) = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}\int_0^t h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}\int_t^1 h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}x''(1) = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \left[t^2 - (t-s)^2\right]h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}\int_t^1 h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}x''(1) = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t (2t-s)sh(s)\,ds + \frac{t^2}{2}\int_t^1 h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}x''(1) = \\ &= \int_0^1 G_0(t,s)h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}x''(1). \end{aligned}$$

Итак,

$$x(t) = \int_0^1 G_0(t,s)h(s)\,ds + \frac{t^2}{2}x''(1). \tag{1.7}$$

Дважды продифференцировав (1.7), далее умножив его на $g(t)$ и проинтегрировав конечный результат на $[0,1]$, получим

$$x''(1) = \int_0^1 g(\tau)\left(\int_0^1 G_1(\tau,s)h(s)\,ds\right)d\tau + x''(1)\int_0^1 g(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда имеем

$$x''(1) = \frac{1}{1-\mu}\int_0^1 g(\tau)\left(\int_0^1 G_1(\tau,s)h(s)\,ds\right)d\tau.$$

Подстановка этого выражения в (1.7) приводит нас к искомому соотношению. □

Нетрудно видеть, что в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ имеют место следующие соотношения:

$$\frac{t^2}{2}(2-s)s \leqslant G_0(t,s) \leqslant \frac{1}{2}(2-s)s \tag{1.8}$$

и

$$0 \leqslant G_1(t,s) \leqslant 1. \tag{1.9}$$

Допустим, что при почти всех $t\in[0,1]$ и $u\geqslant 0$ функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leqslant bu^{p/q}, \tag{1.10}$$

где $b>0$, $q\in(1,\infty)$. Это неравенство обеспечивает непрерывное действие оператора Немыцкого [12, с. 20] $N\colon \mathbb{L}_p\to\mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Nu)(t)=f\big(t,u(t)\big)$ для каждого $u\in\mathbb{L}_p$.

Определим оператор A равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds,$$

где

$$G(t,s) = G_0(t,s) + \frac{t^2}{2(1-\mu)}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\,d\tau.$$

Несложно заметить, что оператор A непрерывно действует на подмножестве неотрицательных функций пространства $\mathbb{C}$, поскольку представляет собой суперпозицию непрерывных операторов

$$A = GNT,$$

где $G\colon \mathbb{L}_q\to\mathbb{C}$ — оператор Грина с непрерывным ядром $G(t,s)$.

Определим конус K

$$K = \big\{x\in\mathbb{C}\colon x(t)\geqslant\psi(t)\|x\|_{\mathbb{C}},\ t\in[0,1]\big\},$$

где $\psi(t)=t^2$.

Лемма 1.2. *Оператор $A\colon K\to K$ вполне непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, установим инвариантность конуса K относительно оператора A. Действительно, в силу (1.8), (1.9) при $x\in K$ имеем $(Ax)(t)\geqslant 0$ на $[0,1]$. Кроме того, отсюда следует, что

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1\left[(2-s)s+\frac{1}{1-\mu}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\,d\tau\right]f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds.$$

С другой стороны

$$(Ax)(t) \geqslant \frac{t^2}{2}\int_0^1\left[(2-s)s+\frac{1}{1-\mu}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\,d\tau\right]f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds \geqslant t^2\|Ax\|_{\mathbb{C}},\quad t\in[0,1].$$

Отсюда следует, что $A(K)\subset K$.

Далее, предположим, что $D \subset K$ — ограниченное множество. Тогда существует число $M_1 > 0$ такое, что $\|x\|_{\mathbb{C}} \leqslant M_1$ для любого $x \in D$. Докажем, что $\sup\limits_{y \in A(D)} \|y\|_{\mathbb{C}} < \infty$, где $y = Ax$. Действительно, в силу (1.8), (1.9), (1.10) и неравенства Гёльдера имеем

$$\sup_{y\in A(D)} \|y\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{b}{2}\int_0^1 \left[(2-s)s + \frac{1}{1-\mu}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\,d\tau\right](Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{b}{2}\int_0^1 \left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\right)(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leqslant \frac{b}{2(1-\mu)}\int_0^1 (Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{b}{2(1-\mu)}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \leqslant \frac{b\tau^{\frac{p}{q}}}{2(1-\mu)}\|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} \leqslant \frac{b\tau^{\frac{p}{q}}}{2(1-\mu)}M_1^{\frac{p}{q}}, \quad t\in[0,1],$$

где τ — норма оператора T.

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, что для всех $y \in A(D)$ и таких $t_1, t_2 \in [0,1]$, что $|t_2 - t_1| < \delta$ выполнено $\big|y(t_1) - y(t_2)\big| < \varepsilon$. В силу (1.4), (1.5), (1.6) имеем

$$\big|y(t_1)-y(t_2)\big| = \big|(Ax)(t_1)-(Ax)(t_2)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_0^1 \left[G_0(t_1,s)-G_0(t_2,s)+\frac{t_1^2-t_2^2}{2(1-\mu)}\int_0^1 G_1(\tau,s)g(\tau)\,d\tau\right] f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds\right| <$$
$$< \int_0^1\left(\delta+\frac{2\delta\mu}{2(1-\mu)}\right) f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds \leqslant \frac{b\delta}{1-\mu}\int_0^1 (Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leqslant \frac{b(\tau M_1)^{\frac{p}{q}}}{1-\mu}\delta.$$

Взяв для любого $\varepsilon > 0$

$$\delta = \frac{1-\mu}{b(\tau M_1)^{\frac{p}{q}}}\,\varepsilon,$$

обеспечим равностепенную непрерывность $A(D)$. Из теоремы Арцела–Асколи следует компактность оператора A. Непрерывность A была ранее указана. Следовательно, оператор $A\colon K \to K$ вполне непрерывен. $\square$

Для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3) воспользуемся следующей известной теоремой Го–Красносельского [10].

Теорема 1.1. *Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X. Предположим, что Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества в X с $0 \in \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $\mathcal{A}\colon P \to P$ — вполне непрерывный оператор такой, что*

(i) $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|\ \forall u \in P\cap\partial\Omega_1$ *и* $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|\ \forall u \in P\cap\partial\Omega_2$,

или

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|\ \forall u \in P\cap\partial\Omega_1$ *и* $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|\ \forall u \in P\cap\partial\Omega_2$.

Тогда $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку в $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$.

Положим:

$$\Omega_1 = \big\{u\in\mathbb{C}\colon \|u\|_{\mathbb{C}} < r\big\}, \qquad \Omega_2 = \big\{u\in\mathbb{C}\colon \|u\|_{\mathbb{C}} < R\big\},$$
$$\partial\Omega_1 = \big\{u\in\mathbb{C}\colon \|u\|_{\mathbb{C}} = r\big\}, \qquad \partial\Omega_2 = \big\{u\in\mathbb{C}\colon \|u\|_{\mathbb{C}} = R\big\},$$
$$\Omega = \overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1,$$

где $r, R > 0$, причем $r < R$.

Теорема 1.2. *Предположим, что* $1 < \frac{p}{q} < \infty$, *и вместе с* (1.10) *для всех* $u \geqslant 0$ *и п. в.* $t \in [0,1]$ *выполнено условие*

$$f(t,u) \geqslant a(t)u^{p/q}, \tag{1.11}$$

где $a(t)$ *— неотрицательная суммируемая на* $[0,1]$ *функция. Кроме того, пусть*

$$\frac{1-\mu}{\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}}(1-\mu)+\mu} < \frac{b\tau^{\frac{p}{q}}}{\int_0^1 \varphi(s)a(s)(T\psi)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds}, \tag{1.12}$$

где $\varphi(t) = 2t - t^2$, τ *— норма оператора* T, $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Покажем вначале существование числа $r > 0$ такого, что при $x \in K \cap \partial\Omega_1$

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}}. \tag{1.13}$$

Действительно, в силу (1.10) и оценок (1.8), (1.9), воспользовавшись неравенством Гёльдера, для $x \in K \cap \partial\Omega_1$ имеем

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= \int_0^1 G_0(t,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds + \frac{t^2}{2(1-\mu)}\int_0^1 g(\tau)\left[\int_0^1 G_1(\tau,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds\right]d\tau \leqslant \\ &\leqslant \frac{b}{2}\int_0^1 (2s-s^2)(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds + \frac{b\mu}{2(1-\mu)}\int_0^1 (Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leqslant \\ &\leqslant \frac{b}{2}\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} + \frac{b\mu}{2(1-\mu)}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \leqslant \left(\frac{b}{2}\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}} + \frac{b\mu}{2(1-\mu)}\right)\tau^{\frac{p}{q}}\|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} = \\ &= \left(\frac{b}{2}\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}} + \frac{b\mu}{2(1-\mu)}\right)\tau^{\frac{p}{q}}\|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}-1}\|x\|_{\mathbb{C}} = \frac{b\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}}(1-\mu)+b\mu}{2(1-\mu)}\tau^{\frac{p}{q}}r^{\frac{p}{q}-1}\|x\|_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Взяв в качестве r любое положительное число, такое что

$$r \leqslant \left(\frac{2(1-\mu)}{\big(b\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}}(1-\mu)+b\mu\big)\tau^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}},$$

легко видеть выполнение условия (1.13).

Найдем теперь такое число $R > 0$, что при $x \in K \cap \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_{\mathbb{C}} \geqslant \|x\|_{\mathbb{C}}. \tag{1.14}$$

В силу (1.11), (1.8) и (1.9) для $x \in K \cap \partial\Omega_2$ имеем

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= \int_0^1 G_0(t,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds + \frac{t^2}{2(1-\mu)}\int_0^1 g(\tau)\left[\int_0^1 G_1(\tau,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds\right]d\tau \geqslant \\ &\geqslant \frac{t^2}{2}\int_0^1 \varphi(s)a(s)(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \geqslant \frac{t^2}{2}\int_0^1 \varphi(s)a(s)(T\psi)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds\cdot\|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} = \\ &= \frac{t^2}{2}\int_0^1 \varphi(s)a(s)(T\psi)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds\cdot R^{\frac{p}{q}-1}\|x\|_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Положив $R \geqslant \left(\dfrac{2}{\displaystyle\int_0^1 \varphi(s)a(s)(T\psi)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds}\right)^{\frac{q}{p-q}}$ и пронормировав обе части приведенного выше неравенства, получим соотношение (1.14).

С учетом (1.12) условие (i) теоремы 1.1 выполнено. Следовательно, вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $K \cap \Omega$ такую, что $r \leqslant \|x\|_{\mathbb{C}} \leqslant R$. В свою очередь в силу леммы 1.1 это равносильно существованию по меньшей одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3). □

Замечание 1.1. В случае $0 < \frac{p}{q} < 1$ аналогичным образом устанавливается выполнение условия (ii) теоремы 1.1, влекущее существование по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3).

Пример 1.1. Рассмотрим краевую задачу

$$x'''(t) + t(S_h x)^2(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.15}$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

$$x''(1) = \int_0^1 t x''(t)\, dt, \tag{1.16}$$

где

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x(t-h), & t-h \in [0,1], \\ 0, & t-h \notin [0,1], \end{cases} \qquad h \in [0,1).$$

Здесь $\dfrac{p}{q} = 2$, $f(t,u) = tu^2$ и $g(t) = t$. В дальнейшем для удобства рассуждений и простоты вычислений примем $p = 4$, $q = 2$. В качестве оператора $T\colon C \to \mathbb{L}_4$ нами взят оператор суперпозиции S_h. Легко видеть, что нелинейный член f удовлетворяет условиям (1.10) и (1.11) теоремы 1.2 с b и $a(t)$, равными соответственно 1 и t.

Рассмотрим теперь условие (1.12). Путем несложных вычислений получаем:

$$\mu = \int_0^1 g(s)\, ds = \frac{1}{2}, \qquad \|\varphi\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\int_0^1 \varphi^2(s)\, ds} = \sqrt{\frac{8}{15}},$$

$$\int_0^1 \varphi(s) a(s) (S_h \psi)^{\frac{p}{q}}(s)\, ds = \int_h^1 (2s - s^2) s (s-h)^2\, ds = \frac{h^6 - 4h^5 + 25h^2 - 36h + 14}{60}.$$

С учетом того, что $\tau = \sqrt[4]{1-h}$, для рассматриваемой задачи неравенство (1.12) примет соответственно вид

$$\frac{1}{60\left(1 + \sqrt{\frac{8}{15}}\right)} < \frac{\sqrt{1-h}}{h^6 - 4h^5 + 25h^2 - 36h + 14}.$$

Несложный анализ показывает, что это неравенство выполняется для всех $h \in [0,1)$. Следовательно, все условия теоремы 1.2 выполнены. Таким образом, теорема 1.2 гарантирует, что задача (1.15)–(1.16) имеет хотя бы одно положительное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yao Qingliu, Feng Yuqiang. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem // Applied Mathematics Letters. 2002. Vol. 15. Issue 2. P. 227–232. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(01)00122-7
2. Liu Zeqing, Ume Jeong Sheok, Kang Shin Min. Positive solutions of a singular nonlinear third order two-point boundary value problem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 326. Issue 1. P. 589–601. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.030

3. El-Shahed M. Positive solutions for nonlinear singular third order boundary value problem // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. Vol. 14. Issue 2. P. 424–429. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2007.10.008
4. Qu Haidong. Positive solutions of boundary value problems of nonlinear third-order differential equations // International Journal of Mathematical Analysis. 2010. Vol. 4. No. 17. P. 855–860. https://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2010/ijma-17-20-2010/quhaidongIJMA17-20-2010.pdf
5. Almuthaybiri S. S., Tisdell C. C. Sharper existence and uniqueness results for solutions to third-order boundary value problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2020. Vol. 25. No. 3. P. 409–420. https://doi.org/10.3846/mma.2020.11043
6. Yang Chen. Existence and uniqueness of solutions for a third-order three-point boundary value problem via measure of noncompactness // Journal of Mathematics. 2022. Vol. 2022. Issue 1. Article ID: 1157154. https://doi.org/10.1155/2022/1157154
7. Sun Jian-Ping, Li Hai-Bao. Monotone positive solution of nonlinear third-order BVP with integral boundary conditions // Boundary Value Problems. 2010. Vol. 2010. Issue 1. Article number: 874959. https://doi.org/10.1155/2010/874959
8. Guo Yanping, Yang Fei. Positive solutions for third-order boundary-value problems with the integral boundary conditions and dependence on the first-order derivatives // Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 2013. Article ID: 721909. https://doi.org/10.1155/2013/721909
9. Djourdem H., Benaicha S. Positive solutions of nonlinear third-order boundary value problem with integral boundary conditions // Malaya Journal of Matematik. 2019. Vol. 7. No. 2. P. 269–275. https://doi.org/10.26637/MJM0702/0019
10. Zhou Wen-Xue, Zhang Jian-Gang, Li Jie-Mei. Existence of multiple positive solutions for singular boundary value problems of nonlinear fractional differential equations // Advances in Difference Equations. 2014. Vol. 2014. Issue 1. Article number: 97. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-97
11. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
12. Корпусов М. О., Панин А. А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Часть III. Нелинейный анализ. М.: Физический факультет МГУ, 2015.
13. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. М.: Физматлит, 1962.

Поступила в редакцию 10.05.2024
Принята к публикации 23.08.2024

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Дагестанский государственный университет, 367008, Россия, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
E-mail: gusen_e@mail.ru

Цитирование: Г. Э. Абдурагимов. О существовании положительного решения краевой задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с интегральным граничным условием на одном из концов отрезка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 311–320.

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 3. Pp. 311–320.

G. E. Abduragimov

On the existence of a positive solution to a boundary value problem for a third-order nonlinear functional differential equation with an integral boundary condition at one of the ends of the segment

Keywords: functional differential equation, boundary value problem, positive solution, cone, Green's function

MSC2020: 34K10

DOI: 10.35634/vm240301

The article studies the existence of positive solutions on the segment $[0,1]$ of a two-point boundary value problem for one nonlinear third-order functional differential equation with an integral boundary condition at one of the ends of the segment. Using the Go–Krasnoselsky fixed point theorem and some properties of the Green's function of the corresponding differential operator, sufficient conditions for the existence of at least one positive solution to the problem under consideration are obtained. An example is given to illustrate the results obtained.

REFERENCES

1. Yao Qingliu, Feng Yuqiang. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem, *Applied Mathematics Letters*, 2002, vol. 15, issue 2, pp. 227–232. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(01)00122-7
2. Liu Zeqing, Ume Jeong Sheok, Kang Shin Min. Positive solutions of a singular nonlinear third order two-point boundary value problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 326, issue 1, pp. 589–601. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.030
3. El-Shahed M. Positive solutions for nonlinear singular third order boundary value problem, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, vol. 14, issue 2, pp. 424–429. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2007.10.008
4. Qu Haidong. Positive solutions of boundary value problems of nonlinear third-order differential equations, *International Journal of Mathematical Analysis*, 2010, vol. 4, no. 17, pp. 855–860. https://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2010/ijma-17-20-2010/quhaidongIJMA17-20-2010.pdf
5. Almuthaybiri S. S., Tisdell C. C. Sharper existence and uniqueness results for solutions to third-order boundary value problems, *Mathematical Modelling and Analysis*, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 409–420. https://doi.org/10.3846/mma.2020.11043
6. Yang Chen. Existence and uniqueness of solutions for a third-order three-point boundary value problem via measure of noncompactness, *Journal of Mathematics*, 2022, vol. 2022, issue 1, article ID: 1157154. https://doi.org/10.1155/2022/1157154
7. Sun Jian-Ping, Li Hai-Bao. Monotone positive solution of nonlinear third-order BVP with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems*, 2010, vol. 2010, issue 1, article number: 874959. https://doi.org/10.1155/2010/874959
8. Guo Yanping, Yang Fei. Positive solutions for third-order boundary-value problems with the integral boundary conditions and dependence on the first-order derivatives, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 2013, article ID: 721909. https://doi.org/10.1155/2013/721909
9. Djourdem H., Benaicha S. Positive solutions of nonlinear third-order boundary value problem with integral boundary conditions, *Malaya Journal of Matematik*, 2019, vol. 7, no. 2, pp. 269–275. https://doi.org/10.26637/MJM0702/0019
10. Zhou Wen-Xue, Zhang Jian-Gang, Li Jie-Mei. Existence of multiple positive solutions for singular boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, *Advances in Difference Equations*, 2014, vol. 2014, issue 1, article nimber: 97. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-97
11. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of functional differential equations), Moscow: Nauka, 1991.

12. Korpusov M. O.,Panin A. A. *Lektsii po lineinomu i nelineinomu funktsional'nomu analizu. Chast' III. Nelineinyi analiz* (Lectures on linear and nonlinear functional analysis. Part III. Nonlinear analysis), Moscow: Faculty of Physics, Moscow State University, 2015.
13. Krasnosel'skii M. A. *Positive solutions of operator equations*, Gronigen: P. Noordhoff, 1964.

Received 10.05.2024
Accepted 23.08.2024

Gusen El'derkhanovich Abduragimov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Dagestan State University, ul. M. Gadzhieva, 43 a, Makhachkala, 367008, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
E-mail: gusen_e@mail.ru

Citation: G. E. Abduragimov. On the existence of a positive solution to a boundary value problem for a third-order nonlinear functional differential equation with an integral boundary condition at one of the ends of the segment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 3, pp. 311–320.