МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 523–533.

УДК 517.958

© *Г. У. Уразбоев, И. И. Балтаева, О. Б. Исмоилов*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В данной работе показано, что уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка может быть решено методом обратной задачи рассеяния. Определена эволюция спектральных данных оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом, связанным с решением уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи рассеяния для решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка, данные рассеяния, обратная задача рассеяния.

DOI: 10.35634/vm230309

Введение

В 1967 г. американские ученые Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] предложили метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) для уравнения Штурма–Лиувилля как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Вскоре после этого Лакс [2] показал общий характер этого метода и нашел способ построения еще нескольких классов уравнений, которые могут быть решены (МОЗР). Согласно [3] существуют полиномы P_k (от u и производных u по x) такие, что

$$HP_k = P'_{k+1},$$

где

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u',$$

а штрих означает производную по x. Так, например, $P_0 = -\frac{1}{2}$, $P_1 = -\frac{1}{2}u$, $P_2 = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2$, $P_3 = -\frac{1}{8}u_{xxxx} + \frac{5}{4}uu_{xx} + \frac{5}{8}u_x^2 - \frac{5}{4}u^3$ и т. д. Уравнение

$$u_t = -\sum_{q=0}^{p} c_q P'_{q+1}$$

называется общим уравнением КдФ, где $c_0, c_1, \dots, c_p$ — произвольные действительные числа. В частности, при $p = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 4$ получается классическое уравнение КдФ. Результаты вышеупомянутых публикаций касались иерархии КдФ положительного порядка. Однако существует не очень много работ по иерархии КдФ отрицательного порядка.

В работе [4] построено продолжение иерархии уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) в направлении, соответствующем отрицательным степеням спектрального параметра и введено определение низших уравнений КдФ. Вероски [5] изучил симметрии и отрицательные степени оператора рекурсии, а Лоу [6] представил дополнительные симметрии, основанные на обратимом операторе рекурсии системы КдФ, и, в частности, вывел следующее уравнение КдФ отрицательного порядка:

$$u_t = 2vv_x, \quad v_{xx} + uv = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{v_{xx}}{v}\right)_t + 2vv_x = 0.$$

В работах [7–10] изучены уравнения КдФ отрицательного порядка, их гамильтоновы структуры, пары Лакса, законы сохранения и явные многосолитонные и многокинковые волновые решения методом преобразования Бэклунда. Иерархия модифицированного уравнения КдФ отрицательного порядка описана в работах [11–13]. Связь между модифицированным уравнением Кортевега–де Фриза с номером -1 в иерархии и известными интегрируемыми системами представлена в работе [14]. В работе [15] с помощью оператора рекурсии построена иерархия интегрируемых уравнений Бюргерса отрицательного порядка.

Задача Коши для уравнения КдФ отрицательного порядка методом задачи Римана–Гильберта была решена в работе [16]. Исследованию комплексных солитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка посвящена работа [17]. Несмотря на существование пары Лакса для уравнения КдФ отрицательного порядка, авторам данной работы неизвестны результаты по применению метода обратной задачи рассеяния для ее решения. Проблема нахождения решений уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций была рассмотрена в работе [18]. Различные нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованными источниками рассмотрены в работах [19–24].

Настоящая работа посвящена интегрированию уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе «быстроубывающих» функций методом обратной задачи рассеяния.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x, \\ v_{xx} = uv, \quad x \in R, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

которая включается в иерархию уравнений КдФ при

$$P_{-1} = v^2, \quad c_{-2} = -1, \quad c_q = 0, \quad q \neq -2.$$

Система уравнений (0.1) рассматривается при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R, \tag{0.2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами.

1. $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u_0(x)|\,dx < \infty$.

2. Оператор $L_0(y) \equiv -y'' + u_0(x)y = \lambda y$, $x \in R^1$, имеет равно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$.

Предполагается, что функция $u(x,t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ обладают требуемой гладкостью и удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u(x,t)|\,dx < \infty, \quad v^2(x,t) \to 1, \quad v_x(x,t) \to 0, \quad v_{xx}(x,t) \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty. \tag{0.3}$$

§ 1. Задача рассеяния

В этом параграфе приведем необходимые сведения о задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на всей оси [9]. Зависимость функции $u(x,t)$ от t будем опускать. Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.1}$$

с действительной функцией $u(x)$ (потенциалом) удовлетворяющей условию «быстроубываемости»

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u(x)|\,dx < \infty. \tag{1.2}$$

Обозначим через $f(x,k)$ и $g(x,k)$ решения Йоста уравнения (1.1) с асимптотиками

$$\lim_{x\to-\infty} g(x,k)e^{ikx} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x,k)e^{-ikx} = 1, \quad \operatorname{Im} k = 0. \tag{1.3}$$

При условии (1.2) такие решения существуют и определяются асимптотиками (1.3) однозначно.

При действительных k пары функций $\{f(x,k), f(x,-k)\}$ и $\{g(x,k), g(x,-k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (1.1), поэтому:

$$g(x,k) = -b(-k)f(x,k) + a(k)f(x,-k). \tag{1.4}$$

По переменной k решении Йоста $f(x,k)$ и $g(x,k)$ аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$.

Легко заметить, что справедливо следующее равенство:

$$a(k) = -\frac{1}{2ik} W\{f,g\}, \tag{1.5}$$

где $W\{f,g\} = fg' - f'g$, кроме того при действительных k

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2.$$

Функция $a(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$ и имеет там конечное число простых нулей $k_n = i\chi_n$, $n = 1,2,\ldots,N$, причем $\lambda_n = -\chi_n^2$ — собственное значение оператора L_0.

При $\operatorname{Im} z > 0$ функция $a(z)$ восстанавливается по своим нулям $i\chi_n$, $n = 1,2,\ldots,N$, посредством формулы

$$a(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{z - i\chi_j}{z + i\chi_j} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(1 - |r^+(k)|^2\right)}{k - z}\,dk\right\},$$

где $r^+(k) = \frac{b(-k)}{a(k)}$ — заданная на $\operatorname{Im} k = 0$ функция. Согласно (1.4), (1.5) и свойствам функции $a(k)$ имеем

$$g(x, i\chi_j) = B_j f(x, i\chi_j), \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

Для решений $f(x,k)$, $g(x,k)$ справедливы представления

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x,k)e^{ikz}\,dz, \qquad g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,k)e^{-ikz}\,dz, \tag{1.6}$$

ядра $A^+(x,z)$, $A^-(x,z)$ которых — вещественные функции — связаны с потенциалом $u(x)$ соотношениями

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}A^+(x,x), \quad u(x) = 2\frac{d}{dx}A^-(x,x).$$

Ядро $A^+(x,y)$ в представлении (1.6) является решением интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко

$$\Omega^+(x+y) + A^+(x,y) + \int_x^\infty A^+(x,z)\Omega^+(z+y)\,dz = 0, \quad (y > x),$$

где

$$\Omega^+(x) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{iB_j}{\frac{da(z)}{dz}\Big|_{z=i\chi_j}} \exp(-\chi_j x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k)\exp(ikx)\,dx,$$

а $a(z)$ — аналитическое продолжение функции $a(k)$ $(\operatorname{Im} k = 0)$ в верхнюю полуплоскость. Набор $\{r^+(k), B_1, B_2, \dots, B_N, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ называется данными рассеяния для задачи (1.1)–(1.2). Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u(x)$, а обратная — в восстановлении по данным рассеяния потенциала $u(x)$ уравнения (1.1).

Отметим, что функция

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{dk}\big(g(x,k) - B_n f(x,k)\big)\big|_{k=i\chi_n}}{\frac{da(z)}{dt}\Big|_{z=i\chi_n}} \tag{1.7}$$

является решением уравнения $Ly = -\chi_n^2 y$. Согласно (1.3), (1.5) и (1.7) имеем следующие асимптотические выражения:

$$h_n(x) \sim e^{\chi_n x} \ \text{ при } \ x \to \infty, \tag{1.8}$$

$$h_n(x) \sim -B_n e^{-\chi_n x} \ \text{ при } \ x \to -\infty. \tag{1.9}$$

Используя (1.8) и (1.9) получим

$$W\{h_n(x), f(x,i\chi_n)\} = -2\chi_n, \quad W\{h_n(x), g(x,i\chi_n)\} = -2B_n\chi_n, \quad n = 1,2,\dots,N.$$

§ 2. Эволюция данных рассеяния

Лемма 2.1. *Пусть $u(x,t)$, $v(x,t)$ — решения уравнения* (0.1) (t — *параметр*). *Тогда, если $y(x,t)$ — решение уравнения Штурма–Лиувилля $y'' - uy + k^2 y = 0$ с потенциалом $u(x,t)$, то функция $\phi = y_t + \frac{1}{2k^2}(v^2 y' - vv'y)$ удовлетворяет тому же уравнению: $\phi'' - u\phi + k^2\phi = 0$.*

Эта лемма доказывается непосредственной проверкой. Полагая в лемме $y = g(x,k,t)$ и переходя к пределу при $x \to -\infty$, получим

$$\phi(x,k,t) = -\frac{i}{2k} g(x,k,t).$$

Таким образом,

$$g_t = -\frac{1}{2k^2}(v^2 g_x - vv_x g) - \frac{i}{2k} g, \tag{2.1}$$

где $g(x,k,t)$ — решения Йоста уравнения $-g_{xx} + (u-k^2)g = 0$ с асимптотикой (1.3). Переходя в равенстве (2.1) к пределу при $x \to +\infty$, в силу (0.3), (1.3), (1.4) получим

$$\frac{db(-k,t)}{dt} = -\frac{i}{2k} b(-k,t), \qquad \frac{da(k,t)}{dt} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = -\frac{i}{k} r^+(k,t), \qquad \operatorname{Im} k = 0. \tag{2.2}$$

В общем случае собственные значения оператора $L(t)y = -y'' + u(x,t)y$ могут зависеть от времени, поэтому, дифференцируя равенства $g(x,k_n,t) = B_n(t)f(x,k_n,t)$, $n = 1,2,\ldots,N$, по t, имеем

$$\frac{\partial g(x,k_n,t)}{\partial k} + \frac{\partial g}{\partial k}\Big|_{k=k_n}\frac{dk_n}{dt} = \frac{dB_n}{dt}f(x,k_n,t) + B_n\frac{\partial f(x,k_n,t)}{\partial t} + B_n\frac{\partial f}{\partial k}\Big|_{k=k_n}\frac{dk_n}{dt},$$

т. е. согласно (1.7)

$$\frac{\partial g(x,i\chi_n,t)}{\partial t} = \frac{dB_n}{dt}f(x,i\chi_n,t) + B_n\frac{\partial f(x,i\chi_n,t)}{\partial t} - i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{a}(i\chi_n)h_n(x,t). \tag{2.3}$$

Аналогично непрерывному спектру, в случае дискретного спектра будем искать систему совместности в виде:

$$-g_{xx}(x,i\chi_n,t) + u(x,t)g(x,i\chi_n,t) = -\chi_n^2 g(x,i\chi_n,t),$$
$$\frac{\partial g(x,i\chi_n,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\chi_n^2}\left(v^2\frac{\partial g(x,i\chi_n,t)}{\partial x} - vv_x g(x,i\chi_n,t)\right) - \frac{1}{2\chi_n}g(x,i\chi_n,t).$$

В силу (2.3) вторая система совместности имеет вид:

$$\frac{dB_n}{dt}f(x,i\chi_n,t) + B_n\frac{\partial f(x,i\chi_n,t)}{\partial t} - i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{a}(i\chi_n)h_n(x,t) =$$
$$= \frac{B_n}{2\chi_n^2}\left(v^2\frac{\partial f(x,i\chi_n,t)}{\partial x} - vv_x f(x,i\chi_n,t)\right) - \frac{1}{2\chi_n}B_n f(x,i\chi_n,t).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to \infty$ и используя асимптотики для $f(x,i\chi_n,t)$, $h_n(x,t)$, $v(x,t)$, получим:

$$\frac{dB_n}{dt}e^{-\chi_n t} - i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{a}(i\chi_n)e^{\chi_n x} = \frac{1}{2\chi_n^2}B_n(-\chi_n)e^{-\chi_n x} - \frac{1}{2\chi_n}B_n e^{-\chi_n x},$$

следовательно,

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = -\frac{B_n(t)}{\chi_n(t)}, \tag{2.4}$$

$$i\frac{d\chi_n}{dt}\dot{a}(i\chi_n) = 0, \quad n = 1,2,\ldots,N. \tag{2.5}$$

Таким образом, равенства (2.2), (2.4) и (2.5) можно объединить в следующую теорему.

Теорема 2.1. *Если потенциал оператора $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$ является решением задачи (0.1)–(0.2) в классе функций удовлетворяющих условиям (0.3), то данные рассеяния оператора $L(t)$ меняются по t следующим образом:*

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = -\frac{i}{k}r^+(k,t), \quad \operatorname{Im} k = 0, \qquad \frac{dB_n(t)}{dt} = -\frac{B_n(t)}{\chi_n(t)},$$
$$\frac{d\chi_n(t)}{dt} = 0, \quad n = 1,2,\ldots,N.$$

Отметим, что для классического уравнения КдФ этот результат был получен в работе [1]. Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи решения задачи (0.1)–(0.3).

1. Решается прямая задача для оператора $L(0)$, а именно, находятся данные рассеяния $\{r^+(k,0), \chi_1(0), \chi_2(0), \ldots, \chi_N(0), B_1(0), B_2(0), \ldots, B_N(0)\}$ для оператора $L(0) = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$.

2. С помощью применения теоремы 2.1 по начальным данным рассеяния восстанавливаются данные рассеяния в момент времени t, т. е. определяются $\{r^+(k,t), \chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_N(t), B_1(t), B_2(t), \ldots, B_N(t)\}$.

3. С помощью решения обратной задачи для оператора $L(t)$ по данным рассеяния $\{r^+(k,t), \chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_N(t), B_1(t), B_2(t), \ldots, B_N(t)\}$ восстанавливается потенциал $u(x,t)$.

4. Из первого равенства (0.1) и условий (0.3) определяется $v(x,t)$.

Пример 2.1. Пусть

$$u(x,0) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Решая прямую задачу для уравнения

$$-y'' - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} y = k^2 y,$$

находим решения Йоста

$$f(x,k) = \frac{ik - \operatorname{th} x}{ik - 1} e^{ikx}, \qquad g(x,k) = \frac{ik + \operatorname{th} x}{ik - 1} e^{-ikx}.$$

Согласно равенствам (1.6) и (1.7), получим

$$a(k) = -\frac{1}{2ik} W\{f(x,k) g(x,k)\} = \frac{k-i}{k+i}, \qquad b(k) = 0.$$

Так как функция $a(k)$ имеет единственный ноль $k = i$, то $\chi_1 = 1$. Поэтому

$$B_1 = \frac{g(x,i)}{f(x,i)} = 1.$$

Таким образом,

$$N = 1, \qquad r^+(k,0) = \frac{b(-k,0)}{a(k,0)} = 0, \qquad B_1(0) = 1, \qquad \chi_1(0) = 1.$$

Применяя теорема 2.1, получим

$$r^+(k,t) = 0, \qquad B_n(t) = e^{-t}, \qquad \chi_n = 1.$$

Решая обратную задачу, находим

$$u(x,t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2\left(x + \frac{t}{2}\right)}.$$

Следовательно, из равенств (0.1) найдем $v(x,t)$:

$$v(x,t) = \operatorname{th}\left(x + \frac{t}{2}\right).$$

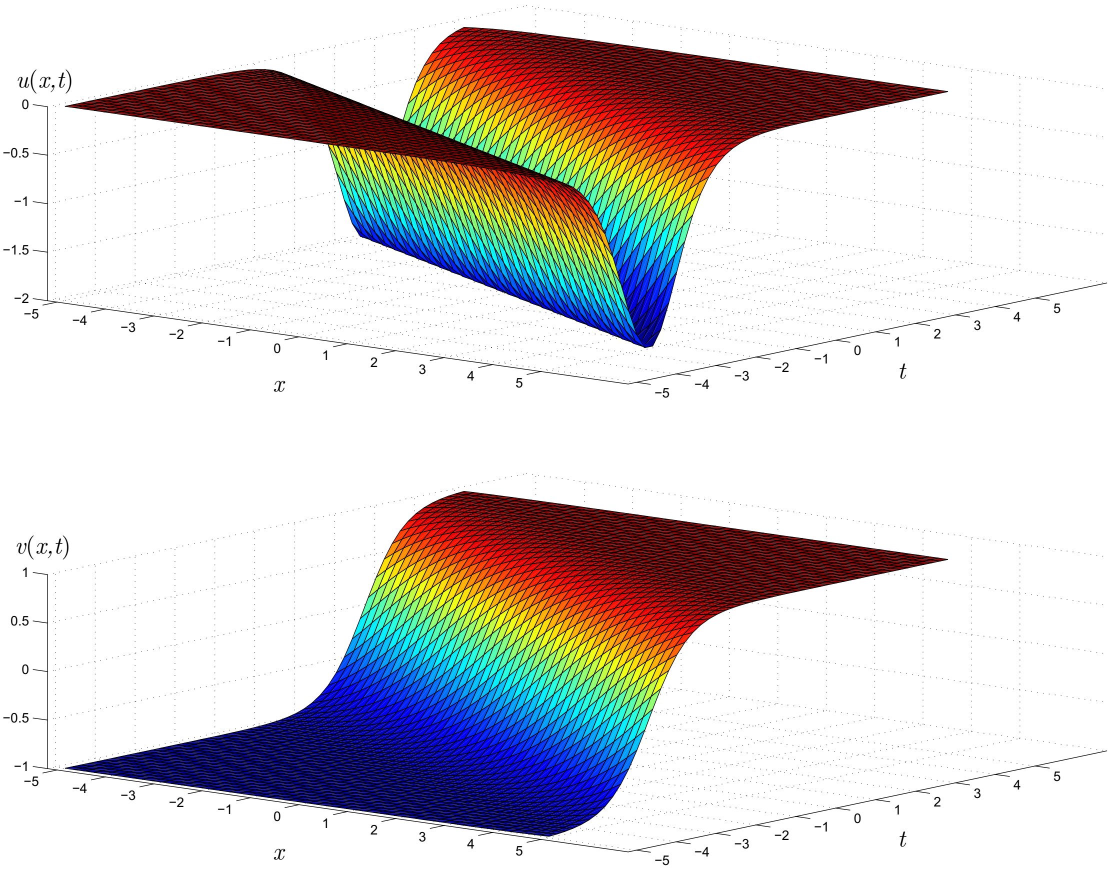

Рис. 1. Графики функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$

Отметим, что решение классического уравнения КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

при начальном условии $u_0(x) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}$ имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}^2(x-4t)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. Issue 19. P. 1095–1097. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
2. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. Vol. 21. Issue 5. P. 467–490. https://doi.org/10.1002/cpa.3160210503
3. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
4. Андреев В. А., Бурова М. В. Низшие уравнения Кортевега–де Фриза и суперсимметричная структура уравнений синус-Гордон и Лиувилля // Теоретическая и математическая физика. 1990. Т. 85. № 3. С. 376–387. https://www.mathnet.ru/rus/tmf5956
5. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators // Journal of Mathematical Physics. 1991. Vol. 32. Issue 7. P. 1733–1736. https://doi.org/10.1063/1.529234

6. Lou Sen-yue. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 35. Issue 5. P. 2390–2396. https://doi.org/10.1063/1.530509
7. Qiao Zhijun, Li Jibin. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // EPL (Europhysics Letters). 2011. Vol. 94. No. 5. 50003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003
8. Qiao Zhijun, Fan Engui. Negative-order Korteweg–de Vries equations // Physical Review E. 2012. Vol. 86. Issue 1. 016601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601
9. Rodriguez M., Li Jing, Qiao Zhijun. Negative order KdV equation with no solitary traveling waves // Mathematics. 2022. Vol. 10. Issue 1. 48. https://doi.org/10.3390/math10010048
10. Hu Heng-Chun, Liu Fei-Yan. Nonlocal symmetries and similarity reductions for Korteweg–de Vries–negative-order Korteweg–de Vries equation // Chinese Physics B. 2020. Vol. 29. No. 4. 040201. https://doi.org/10.1088/1674-1056/ab6dca
11. Qiao Zhijun, Strampp W. Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002. Vol. 313. Issues 3–4. P. 365–380. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00995-0
12. Wazwaz Abdul-Majid, Xu Gui-Qiong. Negative-order modified KdV equations: multiple soliton and multiple singular soliton solutions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. Vol. 39. Issue 4. P. 661–667. https://doi.org/10.1002/mma.3507
13. Wazwaz Abdul-Majid. Negative-order integrable modified KdV equations of higher orders // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 93. Issue 3. P. 1371–1376. https://doi.org/10.1007/s11071-018-4265-3
14. Beals R., Novikov R. G. New differential equations in the mKdV hierarchy // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série I. 1992. Vol. 314. No. 13. P. 991–996. https://zbmath.org/0754.35133
15. Wazwaz Abdul-Majid. Construction of a hierarchy of negative-order integrable Burgers equations of higher orders // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019. Vol. 42. Issue 5. P. 1553–1560. https://doi.org/10.1002/mma.5453
16. Yuan Shengyang, Xu Jian. On a Riemann–Hilbert problem for the negative-order KdV equation // Applied Mathematics Letters. 2022. Vol. 132. 108106. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108106
17. Wazwaz Abdul-Majid. Multiple complex soliton solutions for integrable negative-order KdV and integrable negative-order modified KdV equations // Applied Mathematics Letters. 2019. Vol. 88. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.08.004
18. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239. https://doi.org/10.35634/vm220205
19. Хасанов А. Б., Уразбоев Г. У. Об интегрировании уравнения sine-Гордон с самосогласованным источником интегрального типа в случае кратных собственных значений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. № 3. С. 55–66. https://www.mathnet.ru/rus/ivm1267
20. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И. Интегрирование уравнения Камассы–Холма с самосогласованным источником интегрального типа // Уфимский математический журнал. 2022. Т. 14. Вып. 1. С. 84–94. https://www.mathnet.ru/rus/ufa604
21. Яхшимуратов А. Б., Матёкубов М. М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 2. С. 87–92. https://www.mathnet.ru/rus/ivm9085
22. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Zhuaspayev T. A. Integration of the periodic Harry Dym equation with a source // Wave Motion. 2022. Vol. 113. 102970. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2022.102970
23. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Saparbaeva D. R. Integration of the Harry Dym equation with an integral type source // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 285–295. https://doi.org/10.35634/vm210209
24. Urazboev G. U., Reyimberganov A. A., Babadjanova A. K. Integration of the matrix nonlinear Schrödinger equation with a source // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 37. С. 63–76. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.63

Поступила в редакцию 19.05.2023

Принята к публикации 22.08.2023

Уразбоев Гайрат Уразалиевич, д. ф.-м. н., профессор, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджан, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7420-2516
E-mail: gayrat71@mail.ru

Балтаева Ирода Исмаиловна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджан, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5624-7529
E-mail: iroda-b@mail.ru

Исмоилов Охунжон Бахрам угли, младший научный сотрудник, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Хорезмский филиал, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджан, 14.
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-2742-9974
E-mail: bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Цитирование: Г. У. Уразбоев, И. И. Балтаева, О. Б. Исмоилов. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 523–533.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 3. Pp. 523–533.

G. U. Urazboev, I. I. Baltaeva, O. B. Ismoilov

Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method

Keywords: Sturm–Liouville operator, negative order Korteweg–de Vries equation, scattering data, inverse scattering problem.

MSC2020: 34L25, 35C08, 35P25, 35Q51, 35Q53

DOI: 10.35634/vm230309

In this paper, we consider the integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method. The evolution of the spectral data of the Sturm–Liouville operator with a potential associated with the solution of the negative order Korteweg–de Vries equation is determined. The obtained results make it possible to apply the method of inverse scattering problem to solve the negative order Korteweg–de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions.

REFERENCES

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation, *Physical Review Letters*, 1967, vol. 19, issue 19, pp. 1095–1097. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
2. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1968, vol. 21, issue 5, pp. 467–490. https://doi.org/10.1002/cpa.3160210503
3. Levitan B. M. *Inverse Sturm–Liouville problems*, Utrecht: VNU Science Press, 1987.
4. Andreev V. A., Burova M. V. Lower Korteweg–de Vries equations and supersymmetric structure of the sine-Gordon and Liouville equations, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1990, vol. 85, issue 3, pp. 1275–1283. https://doi.org/10.1007/BF01018404
5. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators, *Journal of Mathematical Physics*, 1991, vol. 32, issue 7, pp. 1733–1736. https://doi.org/10.1063/1.529234
6. Lou Sen-yue. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations, *Journal of Mathematical Physics*, 1994, vol. 35, issue 5, pp. 2390–2396. https://doi.org/10.1063/1.530509
7. Qiao Zhijun, Li Jibin. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions, *EPL (Europhysics Letters)*, 2011, vol. 94, no. 5, 50003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003
8. Qiao Zhijun, Fan Engui. Negative-order Korteweg–de Vries equations, *Physical Review E*, 2012, vol. 86, issue 1, 016601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601
9. Rodriguez M., Li Jing, Qiao Zhijun. Negative order KdV equation with no solitary traveling waves, *Mathematics*, 2022, vol. 10, issue 1, 48. https://doi.org/10.3390/math10010048
10. Hu Heng-Chun, Liu Fei-Yan. Nonlocal symmetries and similarity reductions for Korteweg–de Vries–negative-order Korteweg–de Vries equation, *Chinese Physics B*, 2020, vol. 29, no. 4, 040201. https://doi.org/10.1088/1674-1056/ab6dca
11. Qiao Zhijun, Strampp W. Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2002, vol. 313, issues 3–4, pp. 365–380. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00995-0
12. Wazwaz Abdul-Majid, Xu Gui-Qiong. Negative-order modified KdV equations: multiple soliton and multiple singular soliton solutions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, vol. 39, issue 4, pp. 661–667. https://doi.org/10.1002/mma.3507
13. Wazwaz Abdul-Majid. Negative-order integrable modified KdV equations of higher orders, *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 93, issue 3, pp. 1371–1376. https://doi.org/10.1007/s11071-018-4265-3
14. Beals R., Novikov R. G. New differential equations in the mKdV hierarchy, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I*, 1992, vol. 314, no. 13, pp. 991–996. https://zbmath.org/0754.35133

15. Wazwaz Abdul-Majid. Construction of a hierarchy of negative-order integrable Burgers equations of higher orders, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, vol. 42, issue 5, pp. 1553–1560. https://doi.org/10.1002/mma.5453
16. Yuan Shengyang, Xu Jian. On a Riemann–Hilbert problem for the negative-order KdV equation, *Applied Mathematics Letters*, 2022, vol. 132, 108106. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108106
17. Wazwaz Abdul-Majid. Multiple complex soliton solutions for integrable negative-order KdV and integrable negative-order modified KdV equations, *Applied Mathematics Letters*, 2019, vol. 88, pp. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.08.004
18. Urazboev G. U., Hasanov M. M. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 228–239 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220205
19. Khasanov A. B., Urazboev G. U. Integration of the sine-Gordon equation with a self-consistent source of the integral type in the case of multiple eigenvalues, *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, issue 3, pp. 45–55. https://doi.org/10.3103/S1066369X09030037
20. Urazboev G. U., Baltaeva I. I. Integration of Camassa–Holm equation with a self-consistent source of integral type, *Ufa Mathematical Journal*, 2022, vol. 14, issue 1, pp. 77–86. https://www.mathnet.ru/eng/ufa604
21. Yakhshimuratov A. B., Matyokubov M. M. Integration of a loaded Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, issue 2, pp. 72–76. https://doi.org/10.3103/S1066369X16020110
22. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Zhuaspayev T. A. Integration of the periodic Harry Dym equation with a source, *Wave Motion*, 2022, vol. 113, 102970. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2022.102970
23. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Saparbaeva D. R. Integration of the Harry Dym equation with an integral type source, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 285–295. https://doi.org/10.35634/vm210209
24. Urazboev G. U., Reyimberganov A. A., Babadjanova A. K. Integration of the matrix nonlinear Schrödinger equation with a source, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 63–76. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.63

Received 19.05.2023

Accepted 22.08.2023

Gayrat Urazalievich Urazboev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Urgench State University, ul. H. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7420-2516
E-mail: gayrat71@mail.ru

Iroda Ismailovna Baltaeva, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Urgench State University, ul. H. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5624-7529
E-mail: iroda-b@mail.ru

Oxunjon Bakhram ugli Ismoilov, Junior Researcher, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Khorezm Branch, ul. H. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-2742-9974
E-mail: bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Citation: G. U. Urazboev, I. I. Baltaeva, O. B. Ismoilov. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 523–533.