ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 497–522.

УДК 515.122.4, 515.16.2, 512.546.8, 512.548.7

© *С. В. Людковский*

# ФАКТОРНЫЕ И ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ КВАЗИГРУПП

Данная статья посвящена изучению структуры топологических левых (или правых) квазигрупп, которые играют большую роль в некоммутативной геометрии. Факторные и трансверсальные отображения важны в теории дифференцируемых многообразий, а также топологических многообразий. Исследуются факторные и трансверсальные отображения для топологических квазигрупп, выясняются необходимые и достаточные условия их непрерывности. Приводятся примеры топологических левых квазигрупп и луп. Изучаются однородные пространства, ассоциированные с квазигруппами и их подквазигруппами. С этой целью исследуется произведения топологических левых (или правых) квазигрупп специального вида, которые называются сокрушающими. С их помощью описывается обширное семейство топологических недискретных левых (или правых) квазигрупп, для которых трансверсальное отображение непрерывно.

*Ключевые слова*: некоммутативная геометрия, квазигруппа, топология, отображение, отображение факторное, отображение трансверсальное, непрерывность, однородное пространство, произведение.

DOI: 10.35634/vm230308

## Введение

Факторные и трансверсальные отображения важны в теории дифференцируемых многообразий, топологических многообразий, а также однородных пространств [1–6]. Они также применяются при исследовании дифференциальных уравнений с частными производными, динамических систем, топологических групп и их приложений [5–8]. С другой стороны, в 20-м веке было доказано, что некоммутативная геометрия существует в том и только в том случае, когда существует соответствующая квазигруппа [9–11]. Топологические группы довольно хорошо изучены, тогда как топологические квазигруппы еще остаются малоизученными (см. [12–15] и ссылки в них). В данной статье исследуются факторные и трансверсальные отображения топологических квазигрупп, а также ассоциированные с ними однородные пространства и топологические пространства.

Квазигруппы также используются в некоммутативном математическим анализе и дифференциальных уравнениях с частными производными, физике элементарных частиц, математической физике, в теории групп Ли, алгебр Ли и их обобщений, теории операторов и их приложений в естественных науках, включая физику и квантовую теорию поля (см. [16–29] и ссылки в них).

Эта статья посвящена изучению структуры топологических левых (или правых) квазигрупп.

В первом параграфе напоминаются необходимые определения и даются используемые обозначения.

Во втором параграфе исследуются факторные и трансверсальные отображения топологических левых (или правых) квазигрупп. Необходимые и достаточные условия для их непрерывности тщательно исследуются в теоремах 2.1, 2.2, 2.12, 2.14, следствиях 2.1–2.3, 2.6. Даны примеры 2.1 и 2.2. Замыкания топологических подквазигрупп и замкнутые подквазигруппы исследуются в предложениях 2.3 и 2.4, теореме 2.9 и следствии 2.9. Также даны теоремы 2.5, 2.6 и 2.7, леммы 2.1–2.3, которые содержат необходимый вспомогательный материал о топологиях на квазигруппах. Изучаются однородные пространства, ассоциированные с квазигруппами и их подквазигруппами. Тщательно исследуется структура факторных квазигрупп и трансверсальных множеств. Рассматриваемые топологические квазигруппы в общем случае не являются локально компактными. Совершенность факторных отображений изучается в теоремах 2.4 и 2.10, следствиях 2.4 и 2.5. В частности, нульмерные факторные пространства для квазигрупп изучаются в теореме 2.11. Также исследуется минимальная топология на топологической квазигруппе, относительно которой трансверсальное отображение непрерывно (см. теорему 2.13 и следствие 2.10). Для этой цели объединение топологий на квазигруппе исследуется в теореме 2.8 и следствиях 2.7, 2.8.

В третьем параграфе исследуется сокрушающее произведение топологических левых (или правых) квазигрупп в теореме 3.2, следствиях 3.1 и 3.2. Ядро и центр в прямом произведении топологических квазигрупп изучается в теореме 3.1. С их помощью описывается обширное семейство топологических недискретных левых квазигрупп, для которых трансверсальное отображение непрерывно. Приводятся несколько их примеров 3.1–3.5. Показано, что такие топологические левые (или правые) квазигруппы можно строить посредством сокрушающих произведений других топологических квазигрупп или даже топологическое групп.

Возможные применения главных результатов данной статьи обсуждаются в заключительном параграфе.

## § 1. Основные обозначения и определения

**Определение 1.1.** Предположим, что на множестве $G$ задано умножение $m_G(a,b) = ab$ (то есть однозначная бинарная операция) $G^2 \ni (a,b) \mapsto ab \in G$ такая, что

(i) для любых $a$ и $b$ в $G$ существует единственное $x \in G$, удовлетворяющее равенству $ax = b$.

Множество $G$ с умножением, удовлетворяющее условию (i), называется левой квазигруппой. Если $H$ — левая квазигруппа, содержащаяся в $G$, $H \subset G$, то она называется левой подквазигруппой в $G$. Симметрично рассматривается

(ii) для любых $a$ и $b$ в $G$ существует единственное $y \in G$, удовлетворяющее равенству $ya = b$.

Тогда множество $G$ с умножением, удовлетворяющее условию (ii), называется правой квазигруппой.

Отображения в (i) и (ii) обозначаются $x = a \setminus b = \mathrm{Div}_l(a,b)$ и $y = b/a = \mathrm{Div}_r(a,b)$ соответственно.

Если $G$ является левой и правой квазигруппой, то оно называется квазигруппой.

Множество $G$ с умножением называется группоидом.

Если существует нейтральный (то есть единичный) элемент $e_G = e \in G$: $eg = ge = g$ для любого $g \in G$, то группоид $G$ называется унитальным.

Левая унитальная квазигруппа (или правая унитальная квазигруппа, или унитальная квазигруппа) также называется левой лупой (или правой лупой, или лупой соответственно).

Если $G$ является левой (или правой) квазигруппой с топологией $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_G$ на ней такой, что отображения $m_G$ и $\mathrm{Div}_l$ (или $\mathrm{Div}_r$ соответственно) являются непрерывными по паре аргументов из $(G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G)$ в $(G, \mathcal{T}_G)$, то $G$ называется топологической левой (или правой соответственно) квазигруппой.

Если $A$ и $B$ являются подмножествами в $G$, то $A - B$ обозначает их разность

$$A - B = \{a \in A \colon a \notin B\}.$$

**Определение 1.2.** Пусть $G$ — левая квазигруппа, а $H$ — левая подквазигруппа в $G$. Пусть $V = V_{G,H}$ — это подмножество в $G$, удовлетворяющее двум условиям ниже:

(1) $G = \bigcup_{v\in V} vH$,

(2) $(v_1H) \cap (v_2H) = \emptyset$ для любых $v_1 \neq v_2$ в $V$.

Тогда $V = V_{G,H}$ называется левым трансверсальным множеством для $H$ в $G$.

**Лемма 1.1.** *Предположим, что $G$ является левой квазигруппой, и $H$ является левой подквазигруппой в $G$ такой, что $(ab)H = a(bH)$ для любых $a$ и $b$ в $G$. Тогда существует левое трансверсальное множество $V_{G,H}$ для $H$ в $G$.*

Доказательство. Выберем произвольные $v_1$ и $v_2$ в $G$, и рассмотрим левые классы смежности $v_1H$ и $v_2H$. Тогда $\big((v_1H) \cap (v_2H) \neq \emptyset\big) \leftrightarrow \big(\exists h_1 \in H, \exists h_2 \in H, v_1h_1 = v_2h_2\big)$. С другой стороны, оператор левого сдвига $L_b\colon G \to G$ является биекцией и имеет обратный оператор $L_b^{-1}$ такой, что $L_bx = bx$ и $L_b^{-1}x = b\backslash x$ для любых $b$ и $x$ в $G$. В частности, $L_hH = H$ для любого $h \in H$. Поэтому $(v_1h_1)H = v_1(h_1H) = v_1H = (v_2h_2)H = v_2(h_2H) = v_2H$. Таким образом, $\big((v_1H) \cap (v_2H) \neq \emptyset\big) \leftrightarrow \big(v_1H = v_2H\big)$.

Отсюда вытекает, что существует семейство $\Psi$ подмножеств $W$ в $G$ такое, что $w_1H \cap \cap w_2H = \emptyset$ для любых $w_1 \neq w_2$ в $W$. Это семейство упорядочено по включению таким образом, что $W_1 \leqslant W_2$ тогда и только тогда, когда $W_1 \subseteq W_2$. Если $\sigma$ является линейно упорядоченным подмножеством в $\Psi$, то $\bigcup_{W\in\sigma} W \in \Psi$. В силу леммы Куратовского–Цорна [30,31] существует максимальный элемент $V$ в $\Psi$.

Если $W \in \Psi$ и $G - WH \ni v_0$, то $v_0H \subseteq G - WH$, следовательно, $VH = G$, где $VH = \bigcup_{v\in V} vH$. Таким образом, существует левое трансверсальное множество $V_{G,H} = V$ для $H$ в $G$. □

**Замечание 1.1.** Согласно определению 1.2 левое трансверсальное множество $V$ для левой подквазигруппы $H$ в левой квазигруппе $G$ индуцирует (однозначные) сюръективные отображения:

$$\psi_H^G\colon G \to H \quad \text{и} \quad \tau_H^G\colon G \to V_{G,H},$$

где $\psi_H^G(g) = h \in H$, $\tau_H^G(g) = v \in V_{G,H}$, $g = vh$ для любого $g \in G$, так как для произвольного заданного $g \in G$ существует и единственное $v \in V$ такое, что $g \in vH$ и следовательно, $g^\psi = v \setminus g$ единственно, $g^\tau = v$. Они также обозначаются $g^{\psi_H^G} = \psi_H^G(g)$ и $g^{\tau_H^G} = \tau_H^G(g)$ или кратко $g^\psi = \psi(g)$ и $g^\tau = \tau(g)$ соответственно, если $G$ и $H$ заданы.

Посредством $\mathcal{T}_{G,H,V}$ обозначается минимальная топология на $G$ такая, что $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{T}_{G,H,V}$ и отображения $\tau\colon (G, \mathcal{T}_{G,H,V}) \to (V, \mathcal{T}_{G,H,V} \cap V)$, и $\psi\colon (G, \mathcal{T}_{G,H,V}) \to (H, \mathcal{T}_{G,H,V} \cap H)$ непрерывны, и умножение, и $\mathrm{Div}_l$ (или $\mathrm{Div}_r$ соответственно) совместно непрерывны (то есть непрерывны по паре аргументов согласно формулам в определении 1.1).

**Определение 1.3.** Пусть подквазигруппа $H$ в квазигруппе $G$ удовлетворяет следующим условиям:

$$xH = Hx \ \text{ и } \ (xy)H = x(yH) \ \text{ и } \ (xH)y = x(Hy) \ \text{ и } \ H(xy) = (Hx)y$$

для любых $x$ и $y$ in $G$. Тогда $H$ называется нормальной в $G$.

Семейство левых классов смежности $\{bH : b \in G\}$ обозначается $G/_cH$.

## § 2. Трансверсальные и факторные отображения на топологических квазигруппах

**Замечание 2.1.** В данном замечании вводятся полезные условия, которые используются ниже. Предположим, что или

(i) $G$ является топологической квазигруппой, и $H$ — это замкнутая подквазигруппа в $G$ такая, что $a(bH) = (ab)H$, $(aH)b = a(Hb)$, $H(ab) = (Ha)b$ для любых $a$, $b$ в $G$; или

(ii) $G$ является топологической левой квазигруппой, и $H$ — это замкнутая левая подквазигруппа в $G$ такая, что $a(bH) = (ab)H$, $(aH)b = a(Hb)$, $aH = Ha$ для любых $a$, $b$ в $G$.

Семейство всех левых классов смежности $G/_cH := \{aH\colon a \in G\}$ снабжается факторной топологией относительно канонического отображения $\pi\colon G \to G/_cH$ такого, что $\pi(a) = aH$ для любых $a \in G$.

Мы напомним, что топологическое пространство $X$ с топологией $\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}_X$ называется однородным, если для любых $x$, $y$ из $X$ существует гомеоморфизм $f$ из $X$ на $X$ такой, что $f(x) = y$. Для $A \subset X$ посредством $\mathrm{cl}_X A$ (или $\mathrm{int}_X A$) обозначается замыкание (или внутренность соответственно) подмножества $A$ в $X$.

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены условия* (i) *или* (ii) *замечания* 2.1. *Тогда для любых $x$, $b$ в $G$ семейство $\{\pi(xU)\colon b \in U \in \mathcal{T}(G)\}$ является локальной базой для $G/_cH$ в $(xb)H \in G/_cH$, причем отображение $\pi$ непрерывно и открыто, а $G/_cH$ является $T_1$-пространством. Более того, в случае* (i) *пространство $G/_cH$ левых классов смежности однородно.*

Доказательство. Мы рассмотрим отображение левого сдвига $L_b\colon G \to G$ такое, что $L_b y = by$ для любых $b$ и $y$ в $G$. Для любых $a \in G$ уравнение $by = a$ имеет единственное решение $y = b \setminus a$, так как $G$ является квазигруппой или левой квазигруппой. Поэтому существует обратное отображение $L_b^{-1}\colon G \to G$ такое, что $L_b^{-1}a = b\setminus a$ для любых $a$ и $b$ в $G$, так как $b(b\setminus a) = a$, $bx = by$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l(b, a) = b \setminus a$ вытекает, что $L_b$ и $L_b^{-1}$ являются непрерывными открытыми биекциями из $G$ на $G$. В случае (i) сходно $R_b$ и $R_b^{-1}$ являются непрерывными открытыми биекциями, где $R_b y = yb$, $R_b^{-1}y = y/b$ для любых $b$ и $y$ в $G$.

Мы выберем произвольные фиксированные $x$ и $b$ в $G$, и $U \in \mathcal{T}(G)$ такие, что $b \in U$. В случае (i) $(xU)H = x(UH)$, подмножество $x(UH) = \bigcup_{h\in H} x(Uh) = L_x \bigcup_{h\in H} R_h U$ открыто. В случае (ii) $(xU)H = x(UH)$, $x(UH) = x(HU)$, подмножество $x(HU) = L_x(\bigcup_{h\in H} L_h U)$ открыто в $G$.

Тогда $\pi^{-1}(\pi(xU)H) = \pi^{-1}(\bigcup_{y\in xU} yH) = (xU)H$, так как

$$\pi^{-1}(\bigcup_{y\in xU} yH) = \bigcup_{y\in xU} (yH)H = \bigcup_{y\in xU} yH,$$

и очевидно, что $HH = H$. С другой стороны, $(xU)H = x(UH)$ согласно условиям данной теоремы. Таким образом, $\pi(xU) = \pi((xU)H) = x(UH)$ и $\pi$ — это непрерывное отображение из $G$ на $G/_cH$ такое, что $\pi((xU)H)$ открыто в $G/_cH$, следовательно, $\pi$ также открытое отображение. Поэтому $\pi(gH)$ замкнуто в $G/_cH$, так как $gH = L_g H$ замкнуто в $G$ и $G - gH$ открыто в $G$ для любых $g \in G$. Таким образом, $G/_cH$ является $T_1$-топологическим пространством.

Возьмем произвольную открытую окрестность $W$ для $yH$ в $G/_cH$, где $y \in G$, следовательно, $V = \pi^{-1}(W)$ открыто, так как отображение $\pi$ непрерывно. Заметим, что $yh \in V$ для любых $h \in H$. В частности, $yH = (xb)H = x(bH)$ для $y = xb$. В силу совместной непрерывности умножения на $G$ существуют открытые в $G$ окрестности $U_b$ для $b$ и $U_h$ для $h \in H$ такие, что $x(U_bU_h) \subset V$, следовательно, $\pi(x(U_bU_h)) \subset W$, следовательно, $\pi^{-1}(\pi(x(U_bU_h))) \subset \subset V$. Поэтому $\pi(x(U_bU_h)) \subset W$, так как $(x(U_bU_h))H = x((U_bU_h)H) = x(U_b(U_hH))$

и $\pi^{-1}(\pi(x(U_bU_h))) = (x(U_bU_h))H$. Таким образом, $\{\pi(xU)\colon b \in U, U \in \mathcal{T}(G)\}$ является локальной базой для $(xb)H$ в факторпространстве $G/_cH$.

Остается доказать, что $G/_cH$ является однородным пространством, если выполнены условия (i) данной теоремы. Возьмем произвольные элементы $x$, $y$, $b$ в $G$. Мы положим $h_b(xH) = L_bxH$, где $L_bxH = b(xH)$. Тогда $(h_b(xH) = h_b(yH)) \leftrightarrow (b(xH) = b(yH)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (xH = yH)$, так как $(b(xg) = b(yq)) \leftrightarrow (xg = yq)$, $(xg)H = xH$, где $q \in H$ и $g \in H$. Таким образом, $h_b\colon G/_cH \to G/_cH$ — это биекция для любых $b \in G$. Тогда $h_a(\pi((xU_b)H)) =$ $= \pi(a((xU_b)H)) = \pi((a(xU_b))H)$ является открытой окрестностью $a(xb)$ в $G/_cH$ для любых $a$, $x$, $b$ в $G$ и открытой окрестности $U_b$ для $b$ в $G$. Поэтому, $h_a$ является гомеоморфизмом из $G/_cH$ на $G/_cH$ для любых $a \in G$. Тогда для любых $xH$, $yH$ в $G/_cH$ существует элемент $a = y/x \in G$ такой, что $a(xH) = yH$, так как $(y/x)x = y$ и $a(xH) = (ax)H$, где $x$ и $y$ принадлежат $G$. Таким образом, $h_a(xH) = yH$ и следовательно, $G/_cH$ является однородным пространством. $\square$

**Определение 2.1.** Пусть $G$ является топологической левой квазигруппой, пусть $H$ — это замкнутая подквазигруппа в $G$. Тогда $G/_cH$ из теоремы 2.1 называется пространством левых классов смежности для $G$ относительно $H$.

**Следствие 2.1.** *Если выполнены условия теоремы 2.1, то $\pi \circ L_b = h_b \circ \pi$ для любых $b$ в $G$.*

**Теорема 2.2.** *Предположим, что выполнены условия* (ii) *из теоремы 2.1. Тогда $G/_cH$ относительно факторной топологии, умножения и* $\mathrm{Div}_l$*, индуцированных из $G$, является топологической левой квазигруппой. Более того, $\pi\colon G \to G/_cH$ является непрерывным открытым гомоморфизмом.*

Доказательство. Для любых $x$, $y$ в $G$ мы выводим из условий (ii) теоремы 2.1, что $(xH)(yH) = (x(Hy))H = ((xy)H)H = (xy)H = x(yH)$, $HH = H$, так как для любых $z \in H, q \in H$ существует $s \in H$ такое, что $qs = z$, то есть $s = q\backslash z$. Поэтому $(xH)(yH) = zH$ выполняется для некоторых элементов $x$, $y$, $z$ в $G$ тогда и только тогда, когда $(xy)H = zH$, а последнее равенство равносильно $yH = (x \setminus z)H$, так как $(xH) \setminus (zH) = (x \setminus z)H$, $(xH)((x \setminus z)H) = (x(x \setminus z))H = zH$. Таким образом, $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) = (xH)(yH) =$ $= (xy)H$ и $\pi(x \setminus z) = (x \setminus z)H = \pi(x) \setminus \pi(z) = (xH) \setminus (zH)$.

В силу теоремы 2.1 отображение $\pi$ непрерывно и открыто. Из доказательства выше мы получаем, что $G/_cH$ является топологической левой квазигруппой, и что $\pi$ — это непрерывный открытый гомоморфизм. $\square$

**Следствие 2.2.** *Если выполнены условия* (i) *теоремы 2.1, и $bH = Hb$ для любых $b \in G$, то $G/_cH$ является топологической квазигруппой, и $\pi\colon G \to G/_cH$ — непрерывный открытый гомоморфизм.*

Доказательство. Если условия (ii) теоремы 2.1 симметрично выполняются для топологической правой квазигруппы $G$, то симметрично существует пространство правых классов смежности $H \setminus_c G = \{Hx\colon x \in G\}$, и существует непрерывное открытое факторное отображение $p\colon G \to H \setminus_c G$ такое, что $p(Ux)$ является локальной базой для $H \setminus_c G$ в $H(bx)$ с $b \in U$, $U \in \mathcal{T}(G)$. Сходно теореме 2.2 $H \setminus_c G$ является топологической правой квазигруппой, и $p$ является непрерывным открытым гомоморфизмом. С другой стороны, $H \setminus_c G$ и $G/_cH$ изоморфны, так как $\pi(b) = p(b) = bH = Hb$ для любых $b$ в $G$. Таким образом, $G/_cH$ является топологической квазигруппой, и $\pi\colon G \to G/_cH$ является непрерывным открытым гомоморфизмом. $\square$

**Следствие 2.3.** *Пусть выполнены условия* (ii) *теоремы 2.1. Тогда $G/_cH$ дискретно в том и только том случае, когда $H$ открыто-замкнуто в $G$. Если $H$ открыто-замкнуто в $G$,* *то трансверсальное множество $V = V_{G,H}$ для $H$ в $G$ можно вложить в $G$ как дискретное подмножество, и $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_{G,H,V}$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2 факторное отображение $\pi\colon G \to G/_cH$ — это непрерывный открытый гомоморфизм. Поэтому $\pi(gH)$ открыто-замкнуто в $G/_cH$ для любых $g \in G$ тогда и только тогда, когда $G/_cH$ дискретно. С другой стороны, $\pi(gH)$ открыто-замкнуто (то есть, замкнуто и открыто одновременно) в $G/_cH$ для любых $g \in G$ тогда и только тогда, когда $H$ открыто-замкнуто в $G$.

Выбирая в каждом классе смежности $gH$ по одному $v$ для $V$ и используя лемму Тейхмюллера–Тьюки (см. о ней в [30, 31]), мы построим дискретное отображение из $V$ в $G$. Поэтому трансверсальное отображение $\tau\colon G \to V$ непрерывно (см. замечание 1.1). Из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l$ вытекает, что $\psi\colon G \to H$ непрерывно, где $g = g^\tau g^\psi$ для любых $g \in G$, где $g^\tau = \tau(g)$, $g^\psi = \psi(g)$. Таким образом, $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_{G,H,V}$ (см. также в замечании 1.1). □

**Лемма 2.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1, $g$, $r$, $s$ принадлежат $G$, причем $r = sg$, а $U_g$, $U_s$, $U_r$ являются открытыми окрестностями $g$, $s$, $r$ соответственно, так что $U_s \setminus U_r \subseteq U_g$. Тогда $\mathrm{cl}_{G/_cH}\, \pi(U_r) \subseteq \pi(U_sU_g)$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x$ в $G$ такой, что выполнено включение $\pi(x) \in \mathrm{cl}_{G/_cH}\, \pi(U_r)$. Заметим, что $(U_s \setminus U_r \subseteq U_g) \leftrightarrow (\forall p \in U_s, p \setminus U_r \subseteq U_g) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\forall p \in U_s, U_r \subseteq pU_g) \leftrightarrow (U_r \subseteq \bigcap_{p\in U_s} pU_g)$, где $U_s \setminus U_r = \bigcup_{p\in U_s}(p \setminus U_r) = \bigcup_{q\in U_r}(U_s \setminus q)$. Достаточно доказать, что $\pi(x) \in \pi((U_sU_g)H)$, так как $\pi(U_sU_g) = (U_sU_g)H = \pi((U_sU_g)H)$. Тогда $\pi(V_x) \cap \mathrm{cl}_{G/_cH}\, \pi(U_r) \neq \emptyset$ для любой открытой окрестности $V_x$ для $x$ в $G$. Из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l$ вытекает, что существуют открытые окрестности $V'_x$, $V'_{p\setminus x}$, $U'_s$, $U'_{x\setminus s}$ для $x$, $p \setminus x$, $s$, $x \setminus s \in G$ соответственно такие, что $V'_x \subseteq V_x$, $V'_{p\setminus x} = p \setminus V'_x$, $V'_x \setminus U'_s \subseteq U'_{x\setminus s}$, $V'_xU'_{x\setminus s} \subseteq U_s$, где $p \in U_s$.

Поэтому $\pi(V'_{p\setminus x}) \cap \pi(p \setminus U_r) \neq \emptyset$. Последнее эквивалентно тому, что $(\exists q_1 \in V'_{p\setminus x}, \exists r_2 \in$ $\in U_r, \pi(q_1) = \pi(p \setminus r_2)) \leftrightarrow (\exists q_1 \in V'_{p\setminus x}, \exists r_2 \in U_r, \pi(pq_1) = \pi(r_2)) \leftrightarrow ((pq_1)H = r_2H)$. То есть, $pq_1 = q_2 \in V'_x$. С другой стороны, $(pq_1)H = p(q_1H)$, следовательно, $q_1H \subseteq$ $\subseteq p \setminus (U_rH)$.

Тогда $\forall w_1 \in H$, $\exists w_2 \in H$, $(pq_1)w_1 = r_2w_2$. В случае (i) последнее эквивалентно тому, что $pq_1 = (r_2w_2)/w_1 \in r_2H$, так как $(r_2H)/H = r_2H$. Таким образом, $q_1 \in p \setminus (U_rH) =$ $= (p \setminus U_r)H \subseteq U_gH$.

В случае (ii) $Hy = yH$ для любых $y \in G$ и $\forall s_1 \in H$, $\exists s_2 \in H$, $s_1q_2 = s_2r_2$, где $q_2 = pq_1$, $\pi(pq_1) = \pi(r_2)$ как выше. Поэтому $q_2 = s_1 \setminus (s_2r_2) \in Hr_2$ и $Hr_2 \subseteq U_rH$, так как $HU_r = U_rH$. Следовательно, $p \setminus q_2 = q_1 \in (p \setminus U_r)H$.

Поэтому в случаях (i) и (ii) $pq_1 \in U'_s(U_gH)$ для любых $p \in U'_s$. Эта влечет, что $xH \subseteq (V'_x(V'_x \setminus U'_s))(U_gH) \subseteq (V'_xU'_{x\setminus s})(U_gH)$, так как $\bigcap_{V_x\in B_x} V_xH = xH$, так как $G/_cH$ — это топологическое $T_1$-пространство, и $\pi$ — это открытое отображение по теореме 2.1, где $B_x$ обозначает открытую база в точке $x$ в $G$. Поэтому $\pi(x) \in \pi(U_sU_g)$, так как $(V'_xU'_{x\setminus s})(U_gH) \subseteq U_s(U_gH) = (U_sU_g)H$. □

**Теорема 2.3.** *Если выполнены условия теоремы 2.1, то фактор-пространство $G/_cH$ регулярно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную открытую окрестность $W_q$ для $\pi(q)$ в $G/_cH$, где $q \in G$. Поскольку отображение $\pi$ непрерывно, то существует открытая окрестность $V_q$ точки $q$ в $G$ такая, что $\pi(V_q) \subseteq W_q$. Умножение и $\mathrm{Div}_l$ совместно непрерывны, следовательно, для любых $s$, $r$, $g \in G$ с $sg = q$, $s \setminus r = g$, существуют открытые окрестности $U_s$, $U_r$, $U_g$ точек $s$, $r$, $g$ соответственно такие, что $U_s \setminus U_r \subseteq U_g$, $U_sU_g \subseteq V_q$. В силу леммы 2.1 $\mathrm{cl}_{G/_cH}\,\pi(U_r) \subseteq \pi(U_sU_g)$, следовательно, $\mathrm{cl}_{G/_cH}\,\pi(U_r) \subseteq \pi(V_q) \subseteq W_q$. В частности, с $q = r$ и $g = s \setminus r$ это дает $\mathrm{cl}_{G/_cH}\,\pi(U_r) \subseteq \pi(U_sU_{s\setminus r}) \subseteq \pi(V_r) \subseteq W_r$. Поэтому для любого $r \in G$ и всякой открытой окрестности $W_r$ для $\pi(r)$ в $G/_cH$ существует открытая окрестность $\pi(U_r)$ для $\pi(r)$ такая, что $\mathrm{cl}_{G/_cH}\,\pi(U_r) \subseteq W_r$. Таким образом, фактор-пространство $G/_cH$ является регулярным. □

**Лемма 2.2.** *Пусть $G$ является левой квазигруппой, и пусть $A$, $B$, $C$ — подмножества в $G$. Тогда $(AB) \cap C = \emptyset$ в том и только в том случае, когда $(A \setminus C) \cap B = \emptyset$.*

Доказательство.

$$((AB)\cap C = \emptyset) \leftrightarrow (\forall a \in A, \forall b \in B, ab \notin C) \leftrightarrow (\forall a \in A, \forall b \in B, b \notin a \setminus C) \leftrightarrow ((A\setminus C)\cap B = \emptyset).$$

□

**Определение 2.2.** Если отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно и прообразы любых точек из $Y$ компактны, то оно называется совершенным.

**Предложение 2.1.** *Пусть $G$ является $T_1$-топологической левой (или правой) лупой, $A$ — компактное подмножество, а $B$ — замкнутое в $G$ подмножество, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует открытая окрестность $S$ единичного элемента $e$ в $G$ такая, что $AS \cap B = \emptyset$ (или $SA \cap B = \emptyset$ соответственно).*

Доказательство. Одноточечное подмножество $\{e\}$ замкнуто в $G$, так как $G$ является $T_1$-топологическим пространством. Для топологической левой лупы $G$ отображение сдвига $L_x$ и обратное к нему $L_x^{-1}$ являются гомеоморфизмами $G$ на $G$ (см. доказательство теоремы 2.1). Поэтому для любого $x \in A$ существует открытая окрестность $V_x$ для $e$ в $G$ такая, что $(xV_x) \cap B = \emptyset$, $xV_x = L_xV_x$. Умножение на $G$ совместно непрерывно, следовательно, существует открытая окрестность $W_x$ для $e$ такая, что $(xW_x)W_x \subseteq xV_x$. Поэтому $A \subseteq \bigcup_{x\in A}(xW_x)$ и существует конечное подмножество $D$ в $A$ такое, что $A \subseteq \bigcup_{x\in D}(xW_x)$, так как $A$ компактно и из его открытого покрытия $\{(xW_x)\colon x \in A\}$ можно выделить конечное открытое подпокрытие. Возьмем $S = \bigcap_{x\in D} W_x$, следовательно, $e \in S$ и $S$ открыто. Для любых $y \in A$ существует $x \in D$ такое, что $y \in xW_x$, следовательно, $yS \subseteq (xW_x)S \subseteq (xW_x)W_x \subseteq xV_x \subseteq G - B$, следовательно, $(AS) \cap B = \emptyset$. □

**Предложение 2.2.** *Пусть $G$ является $T_1$-топологической левой (или правой) лупой, подмножество $A$ компактно, а подмножество $B$ замкнуто в $G$. Тогда $AB$ (или $BA$ соответственно) замкнуто в $G$.*

Доказательство. Для любого $g$ в $G$ условие $g \notin AB$ эквивалентно $(A \setminus g) \cap B = \emptyset$. Возьмем произвольное фиксированное $g$ в $G - AB$. С другой стороны, $A\setminus g = \mathrm{Div}_l(A, g)$ компактно как непрерывный образ компактного подмножества по теореме 3.1.10 [30], так как $\mathrm{Div}_l$ совместно непрерывное отображение. В силу предложения 2.1 существует открытая окрестность $S$ для $e$ в $G$ такая, что $(A\setminus g)S \cap B = \emptyset$. Из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l$ вытекает, что для любого $a \in A$ существует открытая окрестность $S_a$ для $e$ в $G$ такая, что $((aS_a)\setminus(gS_a)) \subseteq (A\setminus g)S$, так как $a\setminus g \in (A\setminus g)S$. Поэтому, $A \subseteq \bigcup_{a\in A} aS_a$, и существует конечное подмножество $D$ в $A$ такое, что $A \subseteq \bigcup_{d\in D} dS_d$, так как $A$ компактно, и $aS_a$ открыто в $G$. Пусть $U = \bigcap_{d\in D} S_d$, тогда $e \in U$, и $U$ открыто в $G$, так как множество $D$ конечное. Следовательно, $(A \setminus (gU)) \subseteq ((\bigcup_{d\in D} dS_d) \setminus (gU)) \subseteq \bigcup_{d\in D}((dS_d) \setminus (gS_d)) \subseteq (A \setminus g)S$, следовательно, $(A \setminus (gU)) \cap B = \emptyset$. Последнее эквивалентно тому, что $(gU) \cap (AB) = \emptyset$ по лемме 2.2. Таким образом, для любых $g \notin AB$ существует открытая окрестность $gU$ для $g$ такая, что $gU \subseteq G - AB$, следовательно, $AB$ замкнуто в $G$. □

**Теорема 2.4.** *Предположим, что или*

(i) *$G$ является $T_1$-топологической лупой, и $H$ является компактной подлупой в $G$ такой, что $(ab)H = a(bH)$, $(aH)b = a(Hb)$, $H(ab) = (Ha)b$ для любых $a$, $b$ в $G$; или*

(ii) *$G$ является $T_1$-топологической левой лупой, и $H$ является компактной левой подлупой в $G$ такой, что $(ab)H = a(bH)$, $(aH)b = a(Hb)$, $aH = Ha$ для любых $a$, $b$ в $G$.*

*Тогда факторное отображение $\pi\colon G \to G/_cH$ совершенно.*

Доказательство. Из предложения 2.2 вытекает, что $Hb$ замкнуто в $G$ для любых $b \in G$, так как каждое одноточечное подмножество $\{b\}$ замкнуто в $T_1$-топологическом пространстве $G$. В частности, для $b = e$ это дает то, что $H$ замкнута в $G$, где $e$ обозначает единичный элемент в $G$. В силу теоремы 2.2 $\pi$ является непрерывным открытым гомоморфизмом. Заметим, что из условий (ii) вытекает, что $H(ab) = (Ha)b$ для любых $a$ и $b$ в $G$.

(i). Выберем произвольное замкнутое подмножество $B$ в $G$. В силу предложения 2.2 подмножество $BH$ замкнуто в $G$. Поэтому $\pi(B) = BH = \pi^{-1}(\pi(B))$ — это замкнутое подмножество в $G/_cH$, следовательно, $\pi$ является замкнутым отображением. Если $y \in G/_cH$, $x \in G$, $\pi(x) = y$, тогда $\pi^{-1}(y) = xH$ является компактным подмножеством в $G$, так как $L_x\colon G \to G$ — это гомеоморфизм $G$ как топологического пространства. Таким образом, факторное отображение $\pi$ совершенно.

(ii). В силу предложения 2.2 подмножество $HB$ замкнуто в $G$. Из условия $aH = Ha$ для любых $a$ в $G$ вытекает, что $HB = BH$. Остальная часть доказательства проводится как в случае (i). □

**Следствие 2.4.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.4. Пусть фактор-пространство $G/_cH$ компактно. Тогда $G$ компактна.*

Доказательство. В силу теоремы 3.7.2 в [30] $\pi^{-1}(G/_cH) = G$ компактна, так как $\pi$ — это совершенное отображение по теореме 2.4. □

**Следствие 2.5.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.4. Пусть фактор-пространство $G/_cH$ компактно. Пусть $V = V_{G,H}$ — это левое трансверсальное множество для $H$ в $G$, пусть $V$ имеет топологию $\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(G) \cap V$ наследуемую из $G$. Тогда $V$ можно выбрать компактным и замкнутым в $G$.*

Доказательство. Существует биекция $\eta\colon V \to G/_cH$ и $V \subset G$, так как $V$ — это левое трансверсальное множество для $H$ в $G$. В силу теоремы 2.3 $G/_cH$ и $G = G/_c\{e\}$ регулярны, так как $H$ замкнута в $G$ по предложению 2.2. Поэтому $V$ можно выбрать таким образом, что $\eta^{-1} \circ \pi|_V = \mathrm{id}_V$ было тождественным отображением на $V$, $\mathrm{id}_V(v) = v$ для любых $v \in V$. В силу теоремы 2.2 факторное отображение $\pi$ непрерывно и открыто, следовательно, $\eta^{-1}$ непрерывно. В силу теоремы 2.4 $\pi$ совершенно. Поскольку $G/_cH$ компактно, то $\eta^{-1}$ является гомеоморфизмом согласно теореме 3.1.13 [30]. Следовательно, $V$ компактно. В силу теоремы 3.1.8 [30] $V$ замкнуто в $(G, \mathcal{T}(G))$. □

**Следствие 2.6.** *Если выполнены условия следствия 2.5, то трансверсальное множество $V = V_{G,H}$ и трансверсальное отображение $\tau = \tau_H^G$ можно выбрать таким образом, чтобы $\mathcal{T}_{G,H,V} = \mathcal{T}(G)$, а отображения $\tau\colon G \to V$ и $\psi\colon G \to H$ были непрерывными относительно топологий $\mathcal{T}(H) = \mathcal{T}(G) \cap H$ и $\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(G) \cap V$ на $H$ и $V$ соответственно, наследуемых из $G$.*

Доказательство. Возьмем $\tau = \eta^{-1} \circ \pi\colon G \to V$, где $\eta$ и $V$ такие же, как в следствии 2.5. Поэтому трансверсальное отображение $\tau$ непрерывно относительно топологий $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(G) \cap V$ на $G$ и $V$ соответственно. С другой стороны, $g = g^\tau g^\psi$ для любых $g \in G$, где $g^\tau = \tau(g)$, $g^\psi = \psi(g)$ (см. замечание 1.1). Поэтому, $g^\psi = g^\tau \setminus g$, а непрерывность $\tau$ и совместная непрерывность $\mathrm{Div}_l$ влекут непрерывность отображения $\psi$, где $H$ и $V$ имеют топологии, наследуемые из $G$. Таким образом, минимальная топология $\mathcal{T}_{G,H,V}$ на $G$, содержащая $\mathcal{T}(G)$ и относительно которой $m_G$, $\mathrm{Div}_l$ (а также $\mathrm{Div}_r$ в случае 2.4 (i)), $\tau$ и $\psi$ непрерывны, такова, что $\mathcal{T}_{G,H,V} = \mathcal{T}(G)$. □

**Пример 2.1.** Пусть $X$, $Y$, $Z$ будут топологическими левыми квазигруппами такими, что $Y \subset X$ и $Z \subset X$, и пусть $X$ будет прямым произведением $X = Y \times Z$ для $Y$ и $Z$. То есть, $g_1g_2 = (j_1j_2, h_1h_2)$ и $g_1 \setminus g_2 = (j_1 \setminus j_2, h_1 \setminus h_2)$ для любых $g_1 = (j_1, h_1)$, $g_2 = (j_2, h_2)$ в $X$, где $j_1$, $j_2$ принадлежат $Y$, а $h_1$, $h_2$ принадлежат $Z$. Естественно, что для любых $g$ в $X$ существуют единственное $j$ в $Y$ и $h$ в $Z$ такие, что $g = (j, h)$ или в кратких обозначениях $g = jh$.

Тогда для $G = X$, $H = Z$ и $V = Y$ существуют непрерывные отображения $\tau\colon X \to Y$ и $\psi\colon X \to Z$ такие, что $g = g^\tau g^\psi$, $(g^\tau)^\tau = g^\tau$, $(g^\psi)^\psi = g^\psi$ для любого $g$ в $X$, так как $X = Y \times Z$, где $\tau(g) = j$ и $\psi(g) = h$ для любых $g = (j, h)$ в $X$ с $j \in Y$ и $h \in Z$. Таким образом, $\mathcal{T}_{X,Y,Z} = \mathcal{T}(X)$, и $Y$ является левым трансверсальным множеством для $Z$ в $X$.

Вышеупомянутый неассоциативный случай является довольно общим. Можно сравнить его с ассоциативным случаем групп. В самом деле, в силу теоремы $(A.15)$ [12] каждая коммутативная группа обладает минимальным делимым расширением. По теореме $(A.14)$ [12] каждая делимая коммутативная группа раскладывается в слабое прямое произведение (а при аддитивной записи бинарной операции в виде слабой прямой суммы) групп, изоморфных с $\mathbb{Q}$ и $Z(p^\infty)$ с $p \in \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, где конечное слабое прямое произведение совпадает с прямым произведением. Далее, теорема $(A.8)$ [12] утверждает, что если $H$ является делимой подгруппой коммутативной группы $G$, то существует подгруппа $A$ в $G$ такая, что $G$ изоморфна прямому произведению $A \times H$. Для топологической группы $X$, которая может быть некоммутативной, эта ситуация описывается теоремой $(6.11)$ [12]. Она утверждает, что $X$ изоморфна прямому произведению $N_1 \times N_2$, если $N_1$ и $N_2$ являются нормальными подгруппами в $X$, удовлетворяющими условиям (i)–(iii): (i) $N_1N_2 = X$, (ii) $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, (iii) если $N_1$ и $N_2$ снабжены топологиями, наследуемыми из $X$, $S_1$ и $S_2$ являются открытыми окрестностями для $e$ в $N_1$ и $N_2$ соответственно, то $S_1S_2$ содержит открытую окрестность для $e$ в $X$.

**Пример 2.2.** Пусть $V$ и $H$ являются топологическими левыми квазигруппами, пусть $r_V$ — правая единица в $V$, и $l_H$ — левая единица в $H$, то есть $vr_V = v$ для любых $v \in V$ и $l_Hh = h$ для любых $h \in H$. Пусть $\mu\colon V \to \mathrm{Aut}_c(H)$ — это инъективное отображение такое, что отображения $V \times H \ni (v, h) \mapsto \mu(v)h \in H$ и $V \times H \ni (v, h) \mapsto (\mu(v))^{-1}h \in H$ совместно непрерывны и $\mu(r_V) = \mathrm{id}_H$, где прямое произведение $V \times H$ снабжено тихоновской топологией произведения, $\mathrm{Aut}_c(H)$ обозначает семейство всех непрерывных автоморфизмов для $H$, $\mathrm{id}_H(h) = h$ для любых $h$ из $H$.

Пусть $(v_1, h_1)(v_2, h_2) = (v_1v_2, h_1h_2^{v_1})$ для любых $v_1$ и $v_2$ из $V$, $h_1$ и $h_2$ из $H$, где $h_2^{v_1} = \mu(v_1)h_2$. Это снабжает $V \times H$ структурой полупрямого произведения $G = V \bigotimes^s H$ такой, что $G$ является топологической левой квазигруппой, где $G$ снабжено тихоновской топологией произведения на $V \times H$. Умножение на $G$ совместно непрерывно, так как умножения на $V$ и $H$ совместно непрерывны, $\mu(v)h$ является совместно непрерывным по $(v, h) \in V \times H$. Уравнение $(v_1, h_1)(x, y) = (v_2, h_2)$ эквивалентно $v_1x = v_2$, $h_1y^{v_1} = h_2$, следовательно, $x = v_1 \setminus v_2$, $y^{v_1} = h_1 \setminus h_2$, следовательно, $y = (\mu(v_1))^{-1}(h_1 \setminus h_2)$. Таким образом, $\mathrm{Div}_l((v_1, h_1), (v_2, h_2)) = (v_1 \setminus v_2, (\mu(v_1))^{-1}(h_1 \setminus h_2))$ является совместно непрерывным отображением по переменным $v_1$, $v_2$, $h_1$, $h_2$, так как $\mathrm{Div}_l(v_1, v_2) = v_1 \setminus v_2$, $\mathrm{Div}_l(h_1, h_2) = h_1 \setminus h_2$ и $(\mu(v_1))^{-1}(h_1 \setminus h_2)$ являются совместно непрерывными отображениями. Поэтому, $G$ — это топологическая левая квазигруппа. Имеются естественные вложения $V \ni v \mapsto (v, l_H) \in G$, $H \ni h \mapsto (r_V, h) \in G$ для $V$ и $H$ в $G$. Тогда мы выводим, что $(v_2, h_2)((v_1, h_1)(r_V, H)) = (v_2, h_2)(v_1, H) = (v_2 v_1, h_2 H) = (v_2 v_1, H)$ и $((v_2, h_2)(v_1, h_1))(r_V, H) = (v_2 v_1, h_2 h_1^{v_2})(r_V, H) = (v_2 v_1, H)$ для любых $v_1$ и $v_2 \in V$, $h_1$ и $h_2 \in H$, так как $\mu(r_V) = \mathrm{id}_H$, $H^{v_2} = H$, $h_2 H = H$.

Можно кратко записать $g = vh$ вместо $g = (v, h)$ с $v \in V$ и $h \in H$, так как $(v, l_H)(r_V, h) = (v, h) = vh$. Поэтому, в силу леммы 1.1 можно выбрать левое трансверсальное множество $V_{G,H}$ для $H$ в $G$ таким, что $V_{G,H} = V$ с $\tau(g) = v$ и $\psi(g) = h$, так как для всякого $g \in G$ существуют единственные $v \in V$ и $h \in H$ такие, что $g = vh$. То есть $\tau \colon G \to V$ и $\psi \colon G \to H$ являются отображениями индуцированными проекциями из $V \times H$ на $V$ и $H$ соответственно, следовательно, $\tau$ и $\psi$ непрерывны. Отсюда вытекает, что существует пространство левых классов смежности $G/_c H$.

Если дополнительно $H$ является топологической квазигруппой, то
$(v_1, h_1)(r_V, H) = (v_1, h_1 H) = (v_1, H) = (r_V, H)(v_1, h_1)$;
$(v_2, h_2)((r_V, H)(v_1, h_1)) = (v_2, h_2)(v_1, H) = (v_2 v_1, H)$ и
$((v_2, h_2)(r_V, H))(v_1, h_1) = (v_2, H)(v_1, h_1) = (v_2 v_1, H h_1^{v_2}) = (v_2 v_1, H)$,
следовательно,

$$(r_V, H)((v_2, h_2)(v_1, h_1)) = ((v_2, h_2)(v_1, h_1))(r_V, H) = (v_2, h_2)((v_1, h_1)(r_V, H)) = \\ = ((v_2, h_2)(r_V, H))(v_1, h_1) = ((r_V, H)(v_2, h_2))(v_1, h_1),$$

для всяких $v_1$ и $v_2$ из $V$, $h_1$ и $h_2$ из $H$, так как $\mu(r_V) = \mathrm{id}_H$, $H^{v_2} = H$, $h_2 H = H = H h_2$.

В качестве подходящей ссылки приводится следующая теорема. Ее доказательство дано в приложении.

**Теорема 2.5.** *Пусть $G$ является топологической левой квазигруппой с топологией $\mathcal{T}(G)$. Тогда для любых $g$ в $G$ существует открытая база $B_g$ в $g$ (то есть состоящая из открытых окрестностей элемента $g$ в $G$) такая, что*

(i) *$\forall g \in G$, $\forall U_g \in B_g$, $\forall g_1 \in G$, $\forall g_2 \in G$ с $g_1 g_2 = g$, $\exists U_{g_1} \in B_{g_1}$, $\exists U_{g_2} \in B_{g_2}$, $U_{g_1} U_{g_2} \subseteq U_g$, $g_1 U_{g_2} \in B_g$;*

(ii) *$\forall g \in G$, $\forall U_g \in B_g$, $\forall g_1 \in G$, $\forall g_2 \in G$ с $g_1 \setminus g_2 = g$, $\exists U_{g_1} \in B_{g_1}$, $\exists U_{g_2} \in B_{g_2}$, $U_{g_1} \setminus U_{g_2} \subseteq U_g$, $g_1 \setminus U_{g_2} \in B_g$;*

(iii) *$\forall g \in G$, $\forall U_g \in B_g$, $\forall V_g \in B_g$, $\exists W_g \in B_g$, $W_g \subseteq U_g \cap V_g$.*

*Обратно, пусть $G$ — это левая квазигруппа, $\mathcal{B} = \{B_g \colon g \in G\}$ — это семейство подмножеств в $G$ удовлетворяющих условиям* (i)–(iii). *Тогда $\mathcal{B}$ является базой для топологии $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}(G)$ на $G$, относительно которой $G$ является топологической левой квазигруппой такой, что $g\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ для любых $g$ в $G$. Более того, $G$ является $T_1$-топологической левой квазигруппой тогда и только тогда, когда*

(iv) $\forall g \in G$, $\{g\} = \bigcap_{U_g \in B_g} U_g$.

**Теорема 2.6.** *Пусть $G$ — топологическая лупа. Тогда она имеет открытую базу $\mathcal{B}$ такую, что*

(i) *$B_g = gB_e = B_e g$ для любых $g \in G$ и*

(ii) *$(V \setminus e) \cap (e/V) \subseteq V$ для любых $V \in B_e$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 2.5 для правых квазигрупп формулируется и доказывается симметрично.

(i). Утверждение (i) этой теоремы вытекает из утверждений (i)–(iii) теоремы 2.5, так как $eg = ge = g$ для любых $g$ в $G$.

(ii). Мы возьмем базу $\mathcal{B}$, удовлетворяющую условию (i) этой теоремы. Пусть $U \in B_e$, тогда можно задать $V = U \cap (U \setminus e) \cap (e/U)$. Из условий (i)–(iii) в теореме 2.5 вытекает, что $V$ — это открытая окрестность для $e$ в $G$. Заметим, что для каждого $v \in V$ существуют $u_1 \in U$, $u_2 \in U$ такие, что $v = u_1 \backslash e$, $v = e/u_2$. Поэтому $v \backslash e \in V \backslash e$, $e/v \in e/V$ и $v \backslash e \in U \backslash e$, $v \backslash e = (e/u_2) \backslash e = u_2 \in U$, $(u_1 \backslash e) \backslash e = (e/u_2) \backslash e = u_2$, $e/v = e/(u_1 \backslash e) = u_1 \in U$, $e/v \in e/U$, следовательно, $V \setminus e \subseteq U \cap (U \setminus e)$, $e/V \subseteq U \cap (e/U)$. Поэтому $(V \setminus e) \cap (e/V) \subseteq V$. $\square$

Из теоремы 2.3 следует приводимая ниже теорема. Ее также можно доказать, опираясь на теорему 2.5 (см. приложение).

**Теорема 2.7.** *Пусть $G$ является $T_1$-топологической лупой. Тогда $G$ регулярна.*

**Теорема 2.8.** *Предположим, что $G$ — левая (или правая) квазигруппа, и $\mathcal{T}_j$ является топологией на $G$, относительно которой $(G, \mathcal{T}_j)$ является топологической левой (или правой, соответственно) квазигруппой для любых $j \in J$, где $J$ — это множество. Предположим также, что $\mathcal{T}$ — наименьшая топология на $G$, содержащая $\mathcal{T}_j$ для любого $j \in J$. Тогда $(G, \mathcal{T})$ — топологическая левая (или правая, соответственно) квазигруппа.*

Доказательство. Прямое произведение $D = \prod_{j \in J} G_j$ топологических левых квазигрупп является топологической левой квазигруппой, где $(G_j, \mathcal{T}_j) = (G, \mathcal{T}_j)$ для любого $j \in J$, где $D$ снабжено тихоновской топологией произведения $\mathcal{T}(D)$. В силу предложения 1.6.1 в [13] диагональное отображение $\eta$ является гомеоморфизмом из $(G, \mathcal{T})$ на диагональ $\eta(G)$ для $G$ в $(D, \mathcal{T}(D))$, где $\eta(g) = \{g_j = g \colon j \in J\}$ для любых $g \in G$, $\eta(G)$ снабжена топологией наследуемой из $\mathcal{T}(D)$. Тогда $\eta(gh) = \{g_j h_j \colon g_j = g, h_j = h, j \in J\} = \eta(g)\eta(h)$ и $\eta(g \setminus h) = \{g_j \setminus h_j \colon g_j = g, h_j = h, j \in J\} = \eta(g) \setminus \eta(h)$ для любых $g$, $h$ в $G$. Поэтому $(G, \mathcal{T})$ — это топологическая левая квазигруппа, и $\eta$ является топологическим изоморфизмом топологических левых квазигрупп $(G, \mathcal{T})$ и $(\eta(G), \mathcal{T}(D) \cap \eta(G))$. Для правой квазигруппы доказательство симметрично. $\square$

**Определение 2.3.** Топология $\mathcal{T}$ в теореме 2.8 называется соединением топологий $\mathcal{T}_j$, где $j \in J$. Оно обозначается $\vee_{j \in J} \mathcal{T}_j$.

**Следствие 2.7.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.8. Пусть $j_0 \in J$ и $\mathcal{T}_{j_0} \subseteq \mathcal{T}_j$ для любого $j \in J$, пусть топология $\mathcal{T}_{j_0}$ является хаусдорфовой. Тогда $\eta(G)$ является замкнутой левой (или правой, соответственно) подквазигруппой хаусдорфовой топологической левой (или правой, соответственно) квазигруппы $D$.*

**Следствие 2.8.** *Пусть $G$ — левая (или правая) квазигруппа, и пусть $f_j \colon G \to K_j$ является гомоморфизмом из $G$ в топологическую левую (или правую, соответственно) квазигруппу $K_j$ с топологией $\mathcal{T}(K_j)$. Тогда существует наименьшая топология $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ на $G$ такая, что $f_j \colon (G, \mathcal{T}) \to (K_j, \mathcal{T}(K_j))$ непрерывно, и $(G, \mathcal{T})$ является топологической левой (или правой, соответственно) квазигруппой.*

Доказательство. Гомоморфизм $f_j \colon G \to K_j$ индуцирует топологию $\mathcal{T}_j(G) = \mathcal{T}_j$ на $G$ такую, что $\mathcal{T}_j = \{f^{-1}(V) \colon V \in \mathcal{T}(K_j)\}$ для любого $j$. Поэтому утверждение этого следствия вытекает из теоремы 2.8. $\square$

**Предложение 2.3.** *Предположим, что $G$ является топологической левой квазигруппой, $H$ — это левая подквазигруппа в $G$. Тогда замыкание $J = \mathrm{cl}_G H$ для $H$ в $G$ является топологической левой подквазигруппой в $G$.*

Доказательство. Из непрерывности отображений $L_x$ и $L_x^{-1}$ на $G$ вытекает, что $ab \in \mathrm{cl}_G(aH)$ и $a \setminus b \in \mathrm{cl}_G(a \setminus H)$ для любых $a \in H$ и $b \in J$. С другой стороны, $aH = H$ и $a \setminus H = H$, так как $H$ — это левая подквазигруппа в $G$ и $a \in H$. Поэтому $ab \in J$ и $a \setminus b \in J$. Из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l$ на $G$ вытекает, что $cb \in J$ и $c \setminus b \in J$ для любых $c$ и $b$ в $J$. $\square$

**Лемма 2.3.** *Пусть $G$ является $T_1$-топологической левой лупой, $B_e$ — открытая база (то есть база открытых окрестностей) единицы $e$. Пусть $B$ — это компактной подмножество в $G$. Тогда для любого $W \in B_e$ существует окрестность $V \in B_e$ такая, что $VB \subseteq BW$.*

Доказательство. Возьмем произвольную фиксированную окрестность $W$, открытую и принадлежащую базе $B_e$. Из совместной непрерывности умножения на $G$ мы выводим, что для любых $b$ в $B$ существуют $W_{1,b} \in B_e$ и $W_{2,b} \in B_e$ такие, что $W_{1,b}(bW_{2,b}) \subseteq bW$. С другой стороны, $bW_{2,b} = L_b W_{2,b}$ открыто и следовательно, $\{bW_{2,b} \colon b \in B\}$ — это открытое покрытие для $B$. Следовательно, оно содержит конечное подпокрытие $\bigcup_{j=1}^n b_j W_{2,b_j} \supseteq B$, так как $B$ компактно.

Зададим $W_1 = \bigcap_{j=1}^n W_{1,b_j}$. Тогда $W_1$ является открытой окрестностью для $e$ в $G$. Возьмем $V \in B_e$ таким, чтобы $V \subseteq W_1$. Следовательно, $VB \subseteq \bigcup_{j=1}^n V(b_j W_{2,b_j}) \subseteq \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_{1,b_j}(b_j W_{2,b_j}) \subseteq BW$. □

**Теорема 2.9.** *Предположим, что $G$ является топологической левой квазигруппой, $H$ — открытой левой подквазигруппой в $G$ такой, что $(ab)H = a(bH)$ для любых $a$ и $b$ в $G$. Тогда $bH$ замкнуто в $G$ для любого $b$ в $G$.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 $\{aH \colon a \in G\}$ является дизъюнктным открытым покрытием для $G$, так как $L_a \colon G \to G$ — это гомеоморфизм для любого $a$ в $G$. Поэтому $bH = G - \bigcup_{c \in G, cH \cap bH = \emptyset} cH$ замкнуто в $G$. □

**Следствие 2.9.** *Если выполнены условия теоремы 2.9 и $G$ унитальна (см. определение 1.1), то $H$ замкнута в $G$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.9 $eH = H$ замкнута в $G$. □

**Предложение 2.4.** *Пусть $G$ является $T_2$-топологической левой лупой, пусть $H$ является локально компактной левой подлупой в $G$ такой, что $(ab)H = a(bH)$ для любых $a$ и $b$ в $G$. Тогда $H$ замкнута в $G$.*

Доказательство. Из предложения 2.3 вытекает, что $J = \mathrm{cl}_G H$ является топологической левой подлупой в $G$. В силу теоремы 3.3.9 в [30] $H$ открыто в $J$, так как $G$ является хаусдорфовой, а $H$ локально компактна и (всюду) плотна в $J$, тогда как $J$ замкнута в $G$. В силу следствия 2.9 $H$ замкнута в $G$ и $J = H$. □

**Теорема 2.10.** *Предположим, что или*

(i) *$G$ является $T_1$-топологической лупой, а $H$ — локально компактная подлупа в $G$ такая, что $(ab)H = a(bH)$, $(aH)b = a(Hb)$, $H(ab) = (Ha)b$ для любых $a$ и $b$ в $G$; или*

(ii) *$G$ является $T_2$-топологической левой лупой, а $H$ — локально компактная левая подлупа в $G$ такая, что $(ab)H = a(bH)$, $(aH)b = a(Hb)$, $aH = Ha$ для любых $a$ и $b$ в $G$.*

*Пусть также $e$ принадлежит внутренности $\mathrm{Int}_G S$ подмножества $S$ в $G$, а $S$ замкнуто в $G$, $H \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus (S \setminus S))$ в случае* (i) *или $H \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus (S(S \setminus S)))$ в случае* (ii) *компактно. Тогда ограничение $\eta = \pi|_S$ отображения $\pi$ на $S$ является совершенным отображением из $S$ на $\pi(S)$.*

Доказательство. Отметим, что из условий (ii) вытекает, что $H(ab) = (Ha)b$ для любых $a$ и $b$ в $G$. В силу предложения 2.4 $H$ замкнута в $G$. Отображение $\eta$ непрерывно, так как факторное отображение $\pi \colon G \to G/_c H$ непрерывно. Возьмем произвольную фиксированную точку $s$ в $S$. Тогда $\eta^{-1}(\eta(s)) = (sH) \cap S$. Отметим, что $L_s^{-1}((sH) \cap S) = H \cap (s \setminus S)$.

Следовательно, $(sH) \cap S$ и $H \cap (s \setminus S)$ гомеоморфны. В случае (i) $G$ регулярна в силу теоремы 2.7, следовательно, она хаусдорфова. Поскольку $G$ хаусдорфова в случаях (i) и (ii), то $H$ хаусдорфова.

Тогда $\mathrm{cl}_G(S \setminus S) \subseteq \mathrm{cl}_G(S \setminus (S \setminus S))$ и $\mathrm{cl}_G(S(S \setminus S)) \subseteq \mathrm{cl}_G(S \setminus (S(S \setminus S)))$, так как $e \in S$, следовательно, $H \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$ в случае (i) или $H \cap \mathrm{cl}_G S(S \setminus S)$ в случае (ii) компактна по теореме 3.1.2 [30]. С другой стороны, $s \setminus \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$ и $s \setminus \mathrm{cl}_G S(S \setminus S)$ замкнуты в $G$, $s \in S$, следовательно, $H \cap (s \setminus \mathrm{cl}_G(S \setminus S))$ в случае (i) или $H \cap (s \setminus \mathrm{cl}_G(S(S \setminus S)))$ в случае (ii) компактно, так как $L_s^{-1} \colon G \to G$ — это гомеоморфизм, и $S$ замкнуто в $G$, $s \setminus (S \setminus S) \subseteq S \setminus (S \setminus S)$ и $s \setminus (S(S \setminus S)) \subseteq S \setminus (S(S \setminus S))$.

Остается доказать, что $\eta$ является замкнутым отображением. Выберем произвольное замкнутое подмножество $A$ в $S$. Пусть $s \in S$ и $\eta(s) \in \mathrm{cl}_G \eta(A)$. Если выполнены условия (i), то $(\eta(s) \in \eta(A)) \leftrightarrow (sH \subseteq AH) \leftrightarrow (\forall h_1 \in H, \exists h_2 \in H, \exists a \in A, (sh_1 = ah_2))$. Из условий (i) вытекает, что $(sH)/H = s(H/H) = sH$ и $(sh_1 = ah_2) \leftrightarrow (a = (sh_1)/h_2)$. Следовательно, $a \in sH$.

Из условия (ii) мы выводим, что $(\eta(s) \in \eta(A)) \leftrightarrow (Hs \subseteq HA)$, так как $AH = HA$. Тогда $(Hs \subseteq HA) \leftrightarrow (\forall h_1 \in H, \exists h_2 \in H, \exists a \in A, (h_1 s = h_2 a) \leftrightarrow (a = h_2 \setminus (h_1 s)))$. Поэтому $a \in sH$, так как $H \setminus (Hs) = Hs = sH$. Таким образом, $(\eta(s) \in \eta(A)) \leftrightarrow ((sH) \cap A \neq \emptyset)$ в случаях (i) и (ii).

В обоих случаях предположим, что $(sH) \cap A = \emptyset$. Тогда $((sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)) \cap A = \emptyset$ в случае (i) или $((sH) \cap \mathrm{cl}_G S(S \setminus S)) \cap A = \emptyset$ в случае (ii). Заметим, что $(sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$ гомеоморфно с $H \cap (s \setminus \mathrm{cl}_G(S \setminus S))$, а $(sH) \cap \mathrm{cl}_G S(S \setminus S)$ гомеоморфно с $H \cap (s \setminus \mathrm{cl}_G S(S \setminus S))$, при этом $s \setminus \mathrm{cl}_G(S \setminus S) \subseteq \mathrm{cl}_G(S \setminus (S \setminus S))$ и $s \setminus \mathrm{cl}_G S(S \setminus S) \subseteq \mathrm{cl}_G S \setminus (S(S \setminus S))$. Поэтому $H \cap (s \setminus \mathrm{cl}_G(S \setminus S))$ в случае (i) или $H \cap (s \setminus \mathrm{cl}_G S(S \setminus S))$ в случае (ii) компактно, так как $s \setminus \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$ и $s \setminus \mathrm{cl}_G S(S \setminus S)$ замкнуты в $G$, следовательно, $(sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$ в случае (i) или $(sH) \cap \mathrm{cl}_G S(S \setminus S)$ в случае (ii) компактны.

В силу предложения 2.1 в случае (i) существует $W \in B_e$, $W \subseteq S$ такая, что $(W((sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S))) \cap A = \emptyset$. Поэтому $Ws$ — это открытая окрестность точки $s$ в $G$, $W(sH) = (Ws)H$, следовательно, $\pi(Ws)$ — это открытая окрестность для $\pi(s)$ в $G/_cH$, следовательно, $\pi(Ws) \cap \pi(A) \neq \emptyset$, так как $\pi(s) \in \mathrm{cl}_G \pi(A)$. Поэтому $(\exists x \in A, \exists y \in W, \pi(x) = \pi(ys)) \leftrightarrow (xH = (ys)H = y(sH)) \leftrightarrow (\exists h \in H, (x = y(sh)) \leftrightarrow (sh = y \setminus x \in \mathrm{cl}_G(S \setminus S))$, так как $y \in W \subseteq S$, $x \in A \subseteq S$. Поэтому $(sh \in sH) \to (sh \in (sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$, $x = y(sh) \in W((sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)))$. Отсюда вытекает, что $x \in A \cap (W((sH) \cap \mathrm{cl}_G(S \setminus S)))$, но это противоречит выбору $W$. Поэтому $\eta(s) \in \eta(A)$, следовательно, $\eta(A)$ замкнуто в $\eta(S)$ в случае (i).

В силу предложения 2.1 и леммы 2.3 в случае (ii) существует $W \in B_e$, $W \subseteq S$ такая, что $(((Hs) \cap \mathrm{cl}_G S(S \setminus S))W) \cap A = \emptyset$. Заметим, что $(Hs)W = H(sW)$, и $sW$ — это открытая окрестность точки $s$ в $G$ по теореме 2.5. Поэтому $\pi(sW)$ — это открытая окрестность для $\pi(s)$ в $G/_cH$, следовательно, $\pi(sW) \cap \pi(A) \neq \emptyset$, а значит, $(\exists x \in A, \exists y \in W, (\pi(x) = \pi(sy)) \leftrightarrow (xH = Hx = (sy)H = H(sy) = (Hs)y) \leftrightarrow (\exists h \in H, x = h(sy)) \leftrightarrow (x \in H(sy)))$. С другой стороны, $H(sy) \subseteq (Hs)W = s(HW)$, следовательно, существует элемент $h_1 \in H$ такой, что $x = s(h_1 y)$, поэтому $h_1 y = s \setminus x \in S \setminus A \subseteq \mathrm{cl}_G(S \setminus S)$, а значит, $x \in (((Hs) \cap \mathrm{cl}_G S(S \setminus S))W) \cap A$, так как $s \in S$, $x \in A \subseteq S$, $y \in W \subseteq S$. Эта противоречит предположению о $W$. Таким образом, $\eta(s) \in \eta(A)$, следовательно, $\eta(A)$ замкнуто в $\eta(S)$ также в случае (ii). $\square$

**Замечание 2.2.** Если выполнены условия теоремы 2.10, и $H$ компактна, то в доказательстве можно взять $S = G$. Поэтому $\pi$ является совершенным отображением в этом случае.

**Теорема 2.11.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.10, и $G$ нульмерна. Тогда фактор-пространство $G/_cH$ является нульмерным.*

Доказательство. В силу теоремы 2.10 существует $U \in B_e$ такая, что $\pi(\mathrm{cl}_G U)$ замкнуто в $G$, $\eta = \pi|_{\mathrm{cl}_G U}$ является совершенным отображением из $\mathrm{cl}_G U$ на $\pi(\mathrm{cl}_G U)$. Мы возьмем $W \in B_{\pi(e)}$ в $G/_c H$. Поскольку $G$ нульмерна, то существует открыто-замкнутая (т. е. замкнутая и открытая одновременно) окрестность $Q$ для $e$ в $G$ такая, что $Q \subseteq U \cap \pi^{-1}(W)$. С другой стороны, $\pi(Q)$ открыто в $G/_c H$, так как $\pi$ — это открытое отображение по теореме 2.1 и предложению 2.4. Тогда $\pi(Q)$ замкнуто в $G/_c H$, так как $\pi|_{\mathrm{cl}_G U}$ — это замкнутое отображение, и $\pi(\mathrm{cl}_G U)$ замкнуто в $G/_c H$. В силу теоремы 2.5 $G/_c H$ нульмерно, так как $\pi(Q) \subseteq W$. □

**Теорема 2.12.** *Пусть $G$ будет хаусдорфовой компактной левой квазигруппой, пусть $H$ будет подквазигруппой в $G$, и пусть $V = V_{G,H}$ будет левым трансверсальным множеством для $H$ в $G$, пусть трансверсальное отображение $\tau\colon G \to V$ и отображение $\psi\colon G \to H$ непрерывны, так что $g = g^\tau g^\psi$ для любых $g \in G$, где $g^\tau = \tau(g)$, $g^\psi = \psi(g)$, $\tau(v) = v$ для любых $v \in V$, $\psi(h) = h$ для любых $h \in H$. Тогда $G$ как топологическое пространство гомеоморфно с $V \times H$, где прямое произведение $V \times H$ снабжено тихоновской топологией произведения, $V$ и $H$ имеют топологии, наследуемые из $G$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1.12 [30] $V$ и $H$ замкнуты в $G$, и отображения $\tau$ и $\psi$ замкнуты, так как $G$ компактна, $\tau$ и $\psi$ непрерывны, $\tau(G) = V$, $\psi(G) = H$. Поэтому $V$ и $H$ хаусдорфовы и компактны по теореме 3.1.2 [30]. Из теоремы 3.2.4 [30] вытекает, что $V \times H$ компактна. Отображение $\tau \times \psi|_{\Delta_G}$ из диагонали $\Delta_G = \{(g,g)\colon g \in G\}$ в $G \times G$ на $V \times H$ биективно. Поэтому $\tau \times \psi|_{\Delta_G}$ непрерывно, так как $\tau$ и $\psi$ непрерывны. Следовательно, $\tau \times \psi|_{\Delta_G}\colon \Delta_G \to V \times H$ является гомеоморфизмом топологических пространств по теореме 3.1.13 [30]. Естественно, что $G$ гомеоморфна своей диагонали $\Delta_G$. □

**Замечание 2.3.** Если $G$ является хаусдорфовой топологической левой квазигруппой, $H$ является левой подквазигруппа, а $V$ — это левое трансверсальное множество для $H$ в $G$, отображения $\tau\colon G \to V$ и $\psi\colon G \to H$ непрерывны, тогда $V$ и $H$ замкнуты в $G$ как непрерывные ретракты $G$ (см. 1.5.C [30]). Примеры выше и лемма 1.1 дают обширные классы недискретных топологических левых квазигрупп $G$, для которых трансверсальное множество $V$ для левой подквазигруппы $H$ в $G$ существует, и отображения $\tau$ и $\psi$ непрерывны.

**Теорема 2.13.** *Предположим, что $G$ — это топологическое левая (или правая) квазигруппа с топологией $\mathcal{T} = \mathcal{T}_G$; предположим также, что $A_i$, $B_i$ являются подмножествами в $G$, и $f_i\colon A_i \to B_i$ — это отображение для любого $i \in J$, где $J$ — множество. Тогда существует слабейшая топология $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_{G;\{(A_i,B_i,f_i)\colon i \in J\}}$ на $G$ такая, что $(G, \mathcal{T}^*)$ является топологической левой (или правой, соответственно) квазигруппой с $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$, и $f_i$ непрерывно относительно $\mathcal{T}^*$ для любого $i$ в $J$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.8 квазигрупповые топологии левые (или правые, соответственно) на левой (или правой, соответственно) квазигруппе частично упорядочены по силе (т. е. по включению), и их семейство образует полную решетку. Мы положим сначала $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$. Потом мы рассмотрим семейство отображений $\mathcal{F} = \{\mathrm{Div}_l, m_G; f_i\colon i \in J\}$ для левой квазигруппы (или $\mathcal{F} = \{\mathrm{Div}_r, m_G; f_i\colon i \in J\}$ для правой квазигруппы, или $\mathcal{F} = \{\mathrm{Div}_l, \mathrm{Div}_r, m_G; f_i\colon i \in J\}$ для квазигруппы соответственно), где $\mathrm{Div}_l(a,b) = a \setminus b$ (или $\mathrm{Div}_r(a,b) = b/a$), $m_G(a,b) = ab$ для любых $a$ и $b$ в $G$. По индукции, для любого $n \in \mathbb{N}$, существует слабейшая квазигрупповая топология левая (или правая, или квазигрупповая, соответственно) $\mathcal{T}_{n+1}$ на $G$ такая, что $f_i\colon (A_i, \mathcal{T}_{n+1} \cap A_i) \to (B_i, \mathcal{T}_n \cap B_i)$ непрерывно для любого $i \in J$ и $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$ (см. также предложение 2.4.3 [30] и теорему 2.5). Существует супремум $\mathcal{T}^*$ для $\{\mathcal{T}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Она является соединением топологий $\vee_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_n$ порожденной $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$. Из построения выше вытекает, что $\mathcal{T}^*$ — это искомая топология. □

Из теоремы 2.13 вытекает следствие.

**Следствие 2.10.** *Предположим, что $G$ является топологической левой (или правой) квазигруппой с топологией $\mathcal{T}_G$, предположим также, что $G_i$ является левой (или правой соответственно) подквазигруппой в $G$ для любого $i \in \Lambda$, так что $G_m \subset G_i \subset G$ для любых $i < m$ в $\Lambda$, где $\Lambda$ — это ординал. Тогда существует слабейшая топология $\mathcal{T}_{G;\mathcal{G},\mathcal{V}}$ на $G$ такая, что $\mathcal{T}_{G;\mathcal{G},\mathcal{V}} \supset \mathcal{T}_G$; $(G, \mathcal{T}_{G;\mathcal{G},\mathcal{V}})$ является топологической левой (или правой, соответственно) квазигруппой, и отображения $\psi^G_{G_i}$, $\psi^{G_i}_{G_m}$; $\tau^G_{G_i}$, $\tau^{G_i}_{G_m}$ непрерывны для любых $i < m$ в $\Lambda$, если $G$ снабжена топологией $\mathcal{T}_{G;\mathcal{G},\mathcal{V}}$; $G_i$, $V_{G,G_i}$, $V_{G_i,G_m}$ рассматриваются с наследственными топологиями из $(G, \mathcal{T}_{G;\mathcal{G},\mathcal{V}})$, где $\mathcal{G} = \{G_i \colon i \in \Lambda\}$, $\mathcal{V} = \{V_i = V_{G,G_i}, V_{i,m} = V_{G_i,G_m} \colon i < m \in \Lambda\}$.*

**Теорема 2.14.** *Пусть $G$ будет топологической хаусдорфовой левой квазигруппой, пусть $H$ будет левой подквазигруппой в $G$, пусть $V = V_{G,H}$ будет левым трансверсальным множеством для $H$ в $G$. Пусть $G$ как топологическое пространство будет гомеоморфным с $V \times H$, где прямое произведение $V \times H$ снабжено тихоновской топологией произведения. Тогда отображения $\tau$ и $\psi$ непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\theta \colon G \to V \times H$ — это гомеоморфизм. Пусть $\rho_V \colon V \times H \to V$ и $\rho_H \colon V \times H \to H$ — это отображения проекций, где $H \subset G$, $V \subset G$, $V = V_{G,H} \subset G$, $H$ и $V$ снабжены топологиями, наследственными из $G$. Тогда $g = g^\tau g^\psi$, $(g^\tau, g^\psi) \in V \times H$, $\rho_V(g^\tau, g^\psi) = g^\tau$, $\rho_H(g^\tau, g^\psi) = g^\psi$ для любых $g \in G$, где $g^\tau = \tau(g)$, $g^\psi = \psi(g)$. Если $v_1 h_1 \neq vh$ для некоторых $v$ и $v_1$ в $V$, $h$ и $h_1$ в $H$, тогда или $v \neq v_1$, или $v_1 = v$ и $h_1 \neq h = v \setminus (vh)$, так как $(v_1 H) \cap (v_2 H) = \emptyset$ для любых $v_1 \neq v_2$ в $V$.

Поэтому $\tau \times \psi \colon \Delta_G \to V \times H$ является биективным отображением, где $\Delta_G = \{(g, g) \in \in G \times G \colon g \in G\}$ — это диагональ в декартовом произведении $G \times G$. Диагональ $\Delta_G$ рассматривается в топологии наследственной из $G \times G$, где произведение $G \times G$ снабжено тихоновской топологией произведения. Поэтому $\Delta_G$ гомеоморфно $G$ как топологическое пространство по следствию 2.3.21 [30]. Следовательно, $(\tau \times \psi) \circ m_G \circ \theta = \theta$, где $m_G$ обозначает умножение на $G$, $m_G \circ \theta(g) = m_G(\theta(g))$ обозначает композицию отображений, $\theta(g) = (v_g, h_g) \in V \times H$ с $v_g \in V$, $h_g \in H$, $m_G(v_g, h_g) = v_g h_g \in G$ для любого $g \in G$.

Если $W$ открыто в $G \times G$, то существуют открытые подмножества $U_{1,j}$, $U_{2,j}$ в $G$ для любого $j \in J$, где $J$ — это множество, такие, что $W = \bigcup_{j \in J} U_{1,j} \times U_{2,j}$. Поэтому $m_G(W) = \bigcup_{j \in J} m_G(U_{1,j}, U_{2,j}) = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{u \in U_{1,j}} L_u U_{2,j}$ открыто в $G$, так как $L_u \colon G \to G$ — это гомеоморфизм из $G$ на $G$ как топологического пространства для любых $u \in G$. Отображения $\rho_V$ и $\rho_H$ непрерывны и открыты, и $\rho_V \circ \theta(G) = V$, $\rho_H \circ \theta(G) = H$. Отображение $m_G \circ \theta$ непрерывно и открыто, так как $\theta$ — это гомеоморфизм, $m_G$ непрерывно и открыто из $G \times G$ на $G$. Отсюда вытекает, что $(\tau \times \psi)^{-1}(U)$ открыто в $\Delta_G$ для любого $U$, открытого в $V \times H$, так как $\theta^{-1} = \theta^{-1} \circ m_G^{-1} \circ (\tau \times \psi)^{-1}$, следовательно, $\tau \times \psi$ непрерывно, следовательно, $\tau = \rho_V \circ (\tau \times \psi)$ и $\psi = \rho_H \circ (\tau \times \psi)$ непрерывны. □

## § 3. Сокрушающие произведения топологических квазигрупп

В этом параграфе показано, что имеются обширные семейства топологических левых квазигрупп, которые недискретны. Более того, среди них имеется подкласс топологических недискретных левых квазигрупп $G$, для которых существуют левые трансверсальные множества $V_{G,H}$ левых подквазигрупп $H$ в $G$ таких, что отображения $\tau^G_H$ и $\psi^G_H$ непрерывны.

**Определение 3.1.** Пусть $G$ — левая (или правая) квазигруппа. Тогда можно задать

$$\mathrm{Com}(G) := \{a \in G \colon \forall b \in G, ab = ba\}; \tag{3.1}$$

$$N_l(G) := \{a \in G \colon \forall b \in G, \forall c \in G, (ab)c = a(bc)\}; \tag{3.2}$$

$$N_m(G) := \{a \in G \colon \forall b \in G, \forall c \in G, (ba)c = b(ac)\}; \tag{3.3}$$

$$N_r(G) := \{a \in G\colon \forall b \in G, \forall c \in G, (bc)a = b(ca)\}; \tag{3.4}$$
$$N(G) := N_l(G) \cap N_m(G) \cap N_r(G); \tag{3.5}$$
$$\mathcal{C}(G) := \mathrm{Com}(G) \cap N(G). \tag{3.6}$$

При этом $N(G)$ называется ядром (nucleus) для $G$, а $\mathcal{C}(G)$ называется центром для $G$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $(G_j, \tau_j)$ — семейство топологических левых квазигрупп, где $G_j$ — левая квазигруппа, $\tau_j$ — топология на $G_j$, $j \in J$, $J$ — множество. Тогда их прямое произведение $G = \prod_{j\in J} G_j$ относительно тихоновской топологии произведения $\tau_G$ является топологической левой квазигруппой и*

$$N(G) = \prod_{j\in J} N(G_j), \tag{3.7}$$
$$\mathcal{C}(G) = \prod_{j\in J} \mathcal{C}(G_j). \tag{3.8}$$

*Более того, если $(G_j, \tau_j)$ является $T_1$-пространством для любых $j \in J$, то $(G, \tau)$ является $T_1$-топологическим пространством, $N(G)$ и $\mathcal{C}(G)$ замкнуты в $G$.*

Доказательство. Прямое произведение левых квазигрупп удовлетворяет условию (i) в определении 1.1, следовательно, $G$ — левая квазигруппа. Умножение и $\mathrm{Div}_l$ совместно непрерывны относительно тихоновской топологии произведения, следовательно, $G$ является топологической левой квазигруппой.

Заметим, что каждый элемент $a \in G$ можно записать в виде $a = \{a_j\colon \forall j \in J, a_j \in G_j\}$. Из формул (3.1)–(3.4) определения 3.1 мы выводим, что

$$\mathrm{Com}(G) := \{a \in G\colon \forall b \in G, ab = ba\} = \prod_{j\in J} \mathrm{Com}(G_j), \tag{3.9}$$

так как любые $a$ и $b$ в $G$ имеют вид $a = \{a_j\colon \forall j \in J, a_j \in G_j\}$ и $b = \{b_j\colon \forall j \in J, b_j \in G_j\}$, и так как $ab = ba$ тогда и только тогда, когда $a_jb_j = b_ja_j$ для всех $j \in J$;

$$N_l(G) := \{a \in G\colon \forall b \in G, \forall c \in G, (ab)c = a(bc)\} = \prod_{j\in J} N_l(G_j), \tag{3.10}$$

так как $(ab)c = a(bc)$ тогда и только тогда, когда $(a_jb_j)c_j = a_j(b_jc_j)$ для всех $j \in J$, где $c \in G$ имеет вид $c = \{c_j\colon \forall j \in J, c_j \in G_j\}$; и аналогично

$$N_m(G) = \prod_{j\in J} N_m(G_j), \tag{3.11}$$
$$N_r(G) = \prod_{j\in J} N_r(G_j). \tag{3.12}$$

Таким образом, формулы (3.7) и (3.8) вытекают из (3.9)–(3.12), (3.5) и (3.6).

Если $(G_j, \tau_j)$ является $T_1$-топологическим пространством для любого $j \in J$, тогда $(G, \tau)$ является $T_1$-топологическим пространством, так как в силу теоремы 2.3.11 [30] произведение $T_1$-пространств является $T_1$-пространством. Из совместной непрерывности умножения вытекает, что $\mathrm{Com}(G_j)$, $N_l(G_j)$, $N_m(G_j)$, $N_r(G_j)$ замкнуты в $(G_j, \tau_j)$, следовательно, $N(G_j)$ и $\mathcal{C}(G_j)$ замкнуты в $(G_j, \tau_j)$ для любого $j \in J$, следовательно, $N(G)$ и $\mathcal{C}(G)$ замкнуты в $(G, \tau)$. □

**Теорема 3.2.** *Пусть $(A, \tau_A)$ и $(B, \tau_B)$ — топологические левые квазигруппы, пусть также $\xi_i\colon A \times B \times A \to B$ и $A \times B \ni (a, b) \mapsto \phi_j(a)b \in B$ — (совместно) непрерывные отображения для любых $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{1, 2, 3\}$, пусть $\mu\colon (A \times B)^2 \to A \times B$ — отображения, удовлетворяющие уравнениям (3.13)–(3.16):*

$$\mu((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = ((a_1 a_2), [(\xi_1(a_1, b_1, a_2) b_1^{(a_2)}) \xi_2(a_1, b_1, a_2)]^{\{a_1\}} b_2^{a_1}) \tag{3.13}$$

*для любых $a_1$, $a_2$ в $A$; $b_1$, $b_2$ в $B$, где*

$$b_2^{a_1} := \phi_1(a_1) b_2, \tag{3.14}$$

$$b_1^{(a_2)} := \phi_2(a_2) b_1, \tag{3.15}$$

$$b_2^{\{a_1\}} := \phi_3(a_1) b_2, \tag{3.16}$$

*$\phi_j\colon A \to \mathcal{A}(B)$, где $\mathcal{A}(B)$ обозначает семейство всех гомеоморфизмов из $B$ на $B$.*

*Тогда декартово произведение $C = A \times B$, снабженное тихоновской топологией произведения $\tau_C$, вместе с отображением $\mu$ является топологической левой квазигруппой $(C, \tau_C)$.*

Доказательство. Умножения в $A$ и $B$ однозначны, следовательно, $\mu$ однозначно и дает умножение в $C$. Поскольку $\xi_i(a_1, b_1, a_2)$, $\phi_j(a)b$ являются (совместно) непрерывными для любых $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{1, 2, 3\}$, $(A, \tau_A)$ и $(B, \tau_B)$ являются левыми топологическими квазигруппами, то $\mu$ (совместно) непрерывно. Тогда мы рассмотрим уравнение:

$$\mu((a, b), (x, y)) = (c, d), \tag{3.17}$$

где $a \in A$, $c \in A$, $b \in B$, $d \in B$ являются произвольными фиксированными, $x \in A$, $y \in B$ — это элементы, которые требуется выразить через $a, b, c, d$. Уравнение (3.17) эквивалентно системе уравнений:

$$ax = c, \tag{3.18}$$

$$[(\xi_1(a, b, x) b^{(x)}) \xi_2(a, b, x)]^{\{a\}} y^a = d. \tag{3.19}$$

Из (3.18) вытекает, что

$$x = a \setminus c, \tag{3.20}$$

так как $A$ является левой квазигруппой. Тогда из (3.19) и (3.20) вытекает, что

$$[(\xi_1(a, b, a \setminus c) b^{(a \setminus c)}) \xi_2(a, b, a \setminus c)]^{\{a\}} y^a = d. \tag{3.21}$$

Уравнение (3.21) преобразуем к виду

$$y^a = z, \text{ причем } z = [(\xi_1(a, b, a \setminus c) b^{(a \setminus c)}) \xi_2(a, b, a \setminus c)]^{\{a\}} \setminus d, \tag{3.22}$$

и следовательно,

$$y = [\phi_1(a)]^{-1} z, \tag{3.23}$$

так как $\phi_1(a) \in \mathcal{A}(B)$ и $[\phi_1(a)]^{-1} \in \mathcal{A}(B)$. Таким образом, уравнение (3.17) имеет единственное решение $(x, y)$, даваемое формулами (3.20), (3.23). Обозначим его

$$(x, y) = (a, b) \setminus (c, d). \tag{3.24}$$

Итак, $C$ является левой квазигруппой. Из (совместной) непрерывности отображений $\mu$, $\xi_i$, $\phi_j$ для любых $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{1, 2, 3\}$, и формул (3.20), (3.22)–(3.24) вытекает, что отображение $\mathrm{Div}_l$ (совместно) непрерывно, где $\mathrm{Div}_l((a, b), (c, d)) = (a, b) \setminus (c, d)$. Таким образом, $(C, \tau_C)$ является топологической левой квазигруппой. $\square$

**Определение 3.2.** Топологическая левая квазигруппа, даваемая теоремой 3.2, будет также обозначаться $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$ и называться сокрушающим произведением топологических левых квазигрупп (с сокрушающими отображениями $\xi_1, \xi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3$).

**Замечание 3.1.** Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2. Интересно изучить другое уравнение:

$$\mu((x, y), (a, b)) = (c, d),$$

где $a$ и $c$ принадлежат $A$, тогда как $b$ и $d$ принадлежат $B$, они являются произвольными фиксированными, а $x$ из $A$ и $y$ из $B$ являются неизвестными, которые требуется найти в качестве решения, если оно существует. Оно эквивалентно системе:

$$xa = c, \qquad [(\xi_1(x, y, a)y^{(a)})\xi_2(x, y, a)]^{\{x\}}b^x = d. \tag{3.25}$$

Предположим, что $A$ является квазигруппой. Тогда существует единственное $x = c/a$ в $A$, и (3.25) приобретает вид

$$[(\xi_1(c/a, y, a)y^{(a)})\xi_2(c/a, y, a)]^{\{c/a\}}b^{c/a} = d. \tag{3.26}$$

Если даже $B$ является квазигруппой, то очевидно, что могут быть случаи или нескольких различных решений, или ни одного решения $y$ уравнения (3.26) такого, что

$$\xi_1(c/a, y, a)y^{(a)} = f/\xi_2(c/a, y, a), \quad \text{где} \quad f = [\phi_3(c/a)]^{-1}(d/b^{c/a}).$$

В самом деле, существуют $A$ и $B$ такие, что $\mathcal{A}(B) - \mathrm{Aut}_c(B) \neq \emptyset$ и $\mathsf{C}(A \times B \times A, B) - \mathrm{Hom}_c(A \times B \times A, B) \neq \emptyset$, где $\mathrm{Aut}_c(B)$ обозначает семейство всех непрерывных автоморфизмов $B$, $\mathrm{Hom}_c(G, B)$ обозначает семейство всех непрерывных гомоморфизмов из $G$ в $B$, $\mathsf{C}(G, B)$ обозначает семейство всех непрерывных отображений из $G$ в $B$, где $G$ — это топологическая левая квазигруппа (или квазигруппа). Таким образом, $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$ является левой топологической квазигруппой, но в общем случае она может не быть правой квазигруппой.

**Пример 3.1.** Пусть $A$ и $B$ — топологические квазигруппы такие, что

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}(B) - \mathrm{Aut}_c(B)) \geqslant \mathrm{card}(\mathrm{Aut}_c(B)) \geqslant \mathsf{c}, \tag{3.27}$$

$$\mathrm{card}(\mathsf{C}(A \times B \times A, B) - \mathrm{Hom}_c(A \times B \times A, B)) \geqslant \mathrm{card}(\mathrm{Hom}_c(A \times B \times A, B)) \geqslant \mathsf{c}, \tag{3.28}$$

где $\mathsf{c} = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. Поэтому существуют $\xi_i$ и $\phi_j$ (см. теорему 3.2 и замечание 3.1) такие, что $\xi_i \in \mathsf{C}(A \times B \times A, B) - \mathrm{Hom}_c(A \times B \times A, B)$, и $\phi_j(A)$ не содержится в $\mathrm{Aut}_c(B)$ для любых $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{1, 2, 3\}$. Следовательно, $\xi_i$ и $\phi_j$ можно выбрать такими, чтобы $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$ была топологической левой квазигруппой (неассоциативной), но не была правой квазигруппой.

**Пример 3.2.** Возьмем специальную ортогональную группу $A = SO(n, \mathbb{R})$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, специальную линейную группу $B = SL(m, \mathbb{R})$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, где $1 < n \leqslant m \in \mathbb{N}$, $A$ и $B$ снабжены топологиями, индуцированными топологией операторной нормы. Поэтому для них выполнены неравенства (3.27) и (3.28). Следовательно, существуют топологические левые квазигруппы (неассоциативные) $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$, которые не являются правыми квазигруппами. Топологическая левая квазигруппа $C$ является локально компактной и локально связной, ее малая индуктивная размерность положительна $\frac{(m^2-1)n(n-1)}{2} = \mathrm{ind}\,(C)$.

**Пример 3.3.** Выберем сепарабельное гильбертово пространство $l_2$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ снабжено стандартной топологией, индуцированной мультипликативной нормой. Существуют унитарная группа $A = U(l_2)$ и общая линейная группа $B = GL(l_2)$ на $l_2$, где $A$ и $B$ рассматриваются в топологиях, индуцированных топологией операторной нормы. Для этих групп выполнены неравенства (3.27) и (3.28). Поэтому существуют их сокрушающие произведения $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$, которые являются топологическими левыми квазигруппами (неассоциативными), но не являются правыми квазигруппами. Более того, $C$ локальна связна и не локально компактна, $\operatorname{ind}(C) = \infty$.

**Пример 3.4.** Предположим, что $\mathbb{F}$ — бесконечное недискретное сферически полное поле, снабженное мультипликативной нормой, удовлетворяющей сильному неравенству треугольника $|a+b| \leqslant \max(|a|,|b|)$ для любых $a$ и $b$ в $\mathbb{F}$ (см. [32]).

Посредством $c_0(\alpha,\mathbb{F}) = X$ обозначается банахово пространство состоящее из всех векторов $x = (x_j\colon \forall j \in \alpha, x_j \in \mathbb{F})$ таких, что для любых $\epsilon > 0$ мощность конечна $\operatorname{card}(j \in \alpha\colon |x_j| > \epsilon) < \aleph_0$, и оно снабжено нормой $|x| = \sup_{j\in\alpha}|x_j|$, где $\alpha$ обозначает (непустое) множество. Существует группа $A = IL(X)$ всех линейных изометрий и общая линейная группа $B = GL(X)$ на $X$, снабженные топологиями, индуцированными топологией операторной нормы, где $IL(X) = \{g \in GL(X)\colon \forall x \in X, |g(x)| = |x|\}$. Очевидно, что $A$ и $B$ удовлетворяют неравенствам (3.27) и (3.28), следовательно, существуют их сокрушающие произведения $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$ такие, что $C$ является топологической левой квазигруппой, причем $C$ не является правой квазигруппой.

По построению $C$ вполне несвязна, так как $\mathbb{F}$, $X$, $A$ и $B$ вполне несвязны. Если $\operatorname{card}(\alpha) < \aleph_0$, а поле $\mathbb{F}$ локально компактно, то $C$ локальна компактна. Если или $\operatorname{card}(\alpha) \geqslant \aleph_0$, или $\mathbb{F}$ не локально компактно, то $C$ не является локально компактной.

**Следствие 3.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 3.1, и пусть $G_j$ компактна для любого $j \in J_0$ и локально компактна для любого $j \in J - J_0$, где $J_0 \subset J$. Если $J - J_0$ — конечное множество, то $G$ локально компактна. Если $J - J_0$ бесконечно, и $G_j$ некомпактна для любого $j \in J - J_0$, то $G$ не является локально компактной.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1 $G$ является топологической левой квазигруппой. Согласно теореме 3.3.13 [30] $G$ как топологическое пространство является локально компактным, если множество $J - J_0$ конечно, но $G$ не локально компактна, если $J - J_0$ бесконечно, и $G_j$ некомпактна для любого $j \in J - J_0$. $\square$

**Следствие 3.2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2. Тогда сокрушающее произведение $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$ локально компактно в том и только том случае, когда $A$ и $B$ локально компактны.*

Доказательство. Утверждение этого следствия очевидно вытекает из теоремы 3.3.13 [30] и теоремы 3.2 данной выше. $\square$

**Пример 3.5.** Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2. Предположим также, что существуют элемент $r_A$ в $A$ и единичный элемент $e_B$ в $B$ такие, что $ar_A = a$ для любого $a \in A$, $e_Bb = b = be_B$ для любого $b \in B$. Возьмем сокрушающее произведение топологических левых квазигрупп $C = A\wp^{\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3}B$ с сокрушающими отображениями $\xi_1,\xi_2,\phi_1,\phi_2,\phi_3$ такими, что $\phi_j(r_A) = \mathrm{id}_B$ для любого $j \in \{1,2,3\}$, $\xi_i(r_A,b,r_A) = e_B$ для любых $i \in \{1,2\}$ и $b \in B$, где $\mathrm{id}_B(b) = b$ для любого $b \in B$. Тогда существует вложение $A$ в $C$ в качестве топологической левой квазигруппы вида $(A,e_B)$, а $B$ имеет вложение в $C$ в качестве топологической левой квазигруппы вида $(r_A,B)$. Каждый элемент в $C$ можно кратко записать в виде $c = (a,b) = ab$, так как $(a,e_B)(r_A,b) = (a,b) = ab$. Поэтому

$V_{C,B} = A$ является левым трансверсальным множеством для $B$ в $C$. В силу теоремы 3.2 отображения $\tau(a,b) = a$ и $\psi(a,b) = b$ для любых $a$ и $b$ в $C$ непрерывны, $\tau = \tau_B^C$ является трансверсальным отображением, $a = c^\tau$, $b = c^\psi$ (см. также замечание 1.1).

## § 4. Приложение

*Доказательство теоремы* 2.5. Если $G$ является топологической левой квазигруппой, то (i) и (ii) вытекают из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l$, например, если взять $B_g = \{U_g\colon g \in U_g \in \mathcal{T}(G)\}$, $\mathcal{B} = \bigcup\{B_g\colon g \in G\}$, так как отображения $L_x$, $L_x^{-1}$ и $R_x$ непрерывны на $G$ для любого $x$ in $G$. Свойство (iii) вытекает из того факта, что $B_g$ является базой $\mathcal{T}(G)$ в точке $g$ в $G$.

Обратно, пусть $\mathcal{B}$ является семейством подмножеств левой квазигруппы $G$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii). Доказательство проводится в несколько шагов.

(a). Сначала доказывается, что $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ является топологией на $G$. Если $\beta \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, то $\bigcup_{U\in\beta} U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ по построению $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ из $\mathcal{B}$. Тогда мы возьмем произвольные фиксированные $W_1$ и $W_2$ в $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, и зададим $W = W_1 \cap W_2$. Если $W$ непусто, то для любого $g$ в $W$ существуют $U_{1,g} \in B_g$ и $U_{2,g} \in B_g$ с $U_{1,g} \subseteq W_1$ и $U_{2,g} \subseteq W_2$.

Из свойства (iii) вытекает, что существует $U_g \in B_g$ с $U_g \subseteq U_{1,g} \cap U_{2,g}$, следовательно, $g \in U_g \subseteq W$. Поэтому $\bigcup_{g\in W} U_g = W$, следовательно, $W \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(b). Потом доказывается, что для любых $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ и $\forall g \in G$ выполняется $gV \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ и $g \setminus V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Возьмем произвольное $V$ из $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, тогда $V = \bigcup_{s\in V, U_s\in B_s, U_s\subseteq V} U_s$. С другой стороны, $gU_s \in B_{gs}$ согласно условию (i), $g \setminus U_s \in B_{g\setminus s}$ по условию (ii). Поэтому $gV = \bigcup_{s\in V, U_s\in B_s, U_s\subseteq V} gU_s \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $g \setminus V = \bigcup_{s\in V, U_s\in B_s, U_s\subseteq V} (g \setminus U_s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(c). Потом доказывается, что умножение совместно непрерывно на $G$. Для любых $g_1$ и $g_2$ из $G$ с $g = g_1g_2$, $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ таких, что $g \in V$, для любого $U_g \in B_g$ с $U_g \subseteq V$ существуют $U_{g_1} \in B_{g_1}$ и $U_{g_2} \in B_{g_2}$ такие, что $U_{g_1}U_{g_2} \subseteq U_g$ согласно условию (i), следовательно, $U_{g_1}U_{g_2} \subseteq V$, следовательно, умножение на $G$ совместно непрерывно.

(d). Потом доказывается, что $\mathrm{Div}_l$ совместно непрерывно на $G$. Для любых $g_1$, $g_2$ из $G$ с $g_1 \setminus g_2 = g$, $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ таких, что $g \in V$ для любого $U_g \in B_g$ с $U_g \subseteq V$ существуют $U_{g_1} \in B_{g_1}$ и $U_{g_2} \in B_{g_2}$, для которых $U_{g_1} \setminus U_{g_2} \subseteq U_g$ согласно условию (ii), следовательно, $U_{g_1} \setminus U_{g_2} \subseteq V$, следовательно, $\mathrm{Div}_l$ совместно непрерывно на $G$.

(e). Если выполнено условие (iv), то для любых $g$, $h$ из $G$ с $g \neq h$ существует $U_g \in B_g$ такое, что $h \notin U_g$, следовательно, $G$ является $T_1$-топологической левой квазигруппой. Обратно, если $G$ является $T_1$-топологической левой квазигруппой, то $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}(G)$, где $\mathcal{B}$ — это база топологии, удовлетворяющая условиям (i)–(iii). Поэтому для любых $g \neq h$ в $G$ существует $V \in \mathcal{T}(G)$ такое, что $g \in V$, $h \notin V$. Следовательно, существует $U_g \in B_g$ такое, что $U_g \subseteq V$, следовательно, $\bigcap_{U_g\in B_g} U_g = \{g\}$. $\square$

*Доказательство теоремы* 2.7. Пусть $U$ будет открытой окрестностью для $e$ в $G$. Из совместной непрерывности умножения и $\mathrm{Div}_l$ вытекает, что существует $V \in B_e$ такое, что $(V \setminus V) \subseteq U$. Возьмем произвольное фиксированное $x$ в $\mathrm{cl}_G V$, где $\mathrm{cl}_G V$ обозначает замыкание для $V$ в $G$. Из теоремы 2.5 (i) симметрично для луп вытекает, что $Vx \cap V \neq \emptyset$, следовательно, существуют $q_1$ и $q_2$ в $V$ такие, что $q_1x = q_2$. Поэтому $x = q_1 \setminus q_2 \in V \setminus V \subseteq U$, следовательно, $\mathrm{cl}_G V \subseteq (V \setminus V)$ и следовательно, $\mathrm{cl}_G V \subseteq U$.

Из теоремы 2.5 (i) и того, что $L_q$ — это гомеоморфизм на $G$ для любого $q$ из $G$, вытекает, что для любого $q \in G$ и любой открытой окрестности $U_q$ для $q$ существует $V_q \in B_q$ такое, что $\mathrm{cl}_G V_q \subseteq U_g$. Таким образом, $G$ является топологическим $T_3$-пространством. $\square$

## § 5. Заключение

Результаты данной статьи можно использовать для дальнейшего изучения структуры топологических левых (или правых) квазигрупп, их слоений, гомоморфизмов и топологических изотопизмов, их приложений в некоммутативной геометрии и топологии. Это также можно применить для исследования структуры топологических колец. Среди других приложений следует упомянуть теорию операторов и спектральную теорию над неассоциативными алгебрами, дифференциальные уравнения с частными производными, некоммутативный математический анализ, некоммутативную геометрию, математическую физику, информатику, теорию алгоритмов, их приложения в других науках и в технике [4, 14, 33–41].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Браудер В. Перестройки односвязных многообразий. М.: Наука, 1984.
2. Hirsch M. W. Differential topology. New York: Springer, 1976. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9449-5
3. Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966.
4. Ludkovsky S. V. Microbundles over topological rings // Topology and its Applications. 2019. Vol. 260. P. 126–138. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.04.003
5. Mostajeran C., Sepulchre R. Monotonicity on homogeneous spaces // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2018. Vol. 30. Issue 4. Article number: 22. https://doi.org/10.1007/s00498-018-0229-x
6. Urakawa H. Equivariant theory of Yang–Mills connections over Riemannian manifolds of cohomogeneity one // Indiana University Mathematics Journal. 1988. Vol. 37. No. 4. P. 753–788. https://www.jstor.org/stable/24895355
7. Kock J., Vainsencher I. An invitation to quantum cohomology. Boston: Birkhäuser, 2007. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4495-6
8. Abraham R., Robbin J. W. Transversal mappings and flows. New York: W. A. Benjamin, 1967.
9. Bruck R. H. A survey of binary systems. Berlin: Springer, 1971. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43119-1
10. Pickert G. Projektive Ebenen. Berlin: Springer, 1975. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66148-8
11. Sabinin L. V. Smooth quasigroups and loops. Dordrecht: Springer, 1999. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4491-9
12. Hewitt E., Ross K. A. Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups integration theory group representations. New York: Springer, 1979. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8638-2
13. Arhangel’skii A., Tkachenko M. Topological groups and related structures, an introduction to topological algebra. Paris: Atlantis Press, 2008. https://doi.org/10.2991/978-94-91216-35-0
14. Kakkar V. Boolean loops with compact left inner mapping groups are profinite // Topology and its Applications. 2018. Vol. 244. P. 51–54. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.06.002
15. Ludkovsky S. V. On continuity of transversal maps and incomparable topologies for topological groups // Topology and its Applications. 2022. Vol. 312. 108065. https://doi.org/10.1016/j.topol.2022.108065
16. Baez J. C. The octonions // Bulletin of the American Mathematical Society. 2002. Vol. 39. No. 2. P. 145–205. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-01-00934-X
17. Dickson L. E. The collected mathematical papers of Leonard Eugene Dickson. Vol. I–VI. New York: AMS Chelsea Publishing, 1975–1983.
18. Kantor I. L., Solodovnikov A. S. Hypercomplex numbers. Berlin: Springer, 1989.
19. Frenod E., Ludkowski S. V. Integral operator approach over octonions to solution of nonlinear PDE // Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2018. Vol. 103. Issue 5. P. 831–876. https://doi.org/10.17654/MS103050831
20. Gürsey F., Tze C.-H. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. Singapore: World Scientific, 1996. https://doi.org/10.1142/3282

21. Ludkovsky S. V. Wrap groups of connected fiber bundles: their structure and cohomologies // Advances in Mathematics Research. New York: Nova Science Publishers, 2011. Vol. 14. P. 57–134.
22. Ludkovsky S. V. Meta-invariant operators over Cayley–Dickson algebras and spectra // Advances in Pure Mathematics. 2013. Vol. 3. Issue 1. P. 41–69. https://doi.org/10.4236/apm.2013.31008
23. Ludkovsky S. V. $C^*$-algebras of meta-invariant operators in modules over Cayley–Dickson algebras // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2015. Vol. 39. No. 5. P. 625–684.
24. Ludkovsky S. V. Algebras of operators in Banach spaces over the quaternion skew field and the octonion algebra // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 144. Issue 4. P. 4301–4366. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0273-4
25. Ludkovsky S. V., Sprössig W. Ordered representations of normal and super-differential operators in quaternion and octonion Hilbert spaces // Advances in Applied Clifford Algebras. 2010. Vol. 20. Issue 2. P. 321–342. https://doi.org/10.1007/s00006-009-0180-5
26. Ludkovsky S. V., Sprössig W. Spectral theory of super-differential operators of quaternion and octonion variables // Advances in Applied Clifford Algebras. 2011. Vol. 21. Issue 1. P. 165–191. https://doi.org/10.1007/s00006-010-0238-4
27. Ludkovsky S. V., Sprössig W. Spectral representations of operators in Hilbert spaces over quaternions and octonions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2012. Vol. 57. Issue 12. P. 1301–1324. https://doi.org/10.1080/17476933.2010.538845
28. Ludkovsky S. V. Integration of vector Sobolev type PDE over octonions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2016. Vol. 61. Issue 7. P. 1014–1035. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1132207
29. Ludkovsky S. V. Integration of vector hydrodynamical partial differential equations over octonions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. Vol. 58. Issue 5. P. 579–609. https://doi.org/10.1080/17476933.2011.598930
30. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
31. Kunen K. Set theory. Amsterdam: North-Holland, 1980.
32. van Rooij A. C. M. Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker, 1978.
33. Allcock D. Reflection groups and octave hyperbolic plane // Journal of Algebra. 1999. Vol. 213. Issue 2. P. 467–498. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7671
34. Blahut R. E. Algebraic codes for data transmission. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9780511800467
35. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
36. Castro-Alvaredo O. A., Doyon B., Fioravanti D. Conical twist fields and null polygonal Wilson loops // Nuclear Physics B. 2018. Vol. 931. P. 146–178. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.04.002
37. Демидова Л. А., Горчаков А. В. Применение биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации для повышения точности прогнозов компактных машин экстремального обучения // Российский технологический журнал. 2022. Т. 10. № 2. С. 59–74. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-2-59-74
38. Gilbert J. E., Murray M. A. M. Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511611582
39. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. Issue 2. P. 178–196. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04685-5
40. Shang Yilun. Lie algebraic discussion for affinity based information diffusion in social networks // Open Physics. 2017. Vol. 15. Issue 1. P. 705–711. https://doi.org/10.1515/phys-2017-0083
41. Shum Kar Ping, Xueming Ren, Wang Yanhui. Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2014. Vol. 38. P. 719–730.

Поступила в редакцию 04.04.2023

Принята к публикации 01.09.2023

Людковский Сергей Викторович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра прикладной математики, МИРЭА — Российский технологический университет, 119454, Россия, Москва, пр. Вернадского, д. 78.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4733-8151
E-mail: sludkowski@mail.ru

**Цитирование:** С. В. Людковский. Факторные и трансверсальные отображения топологических квазигрупп // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 497–522.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 3. Pp. 497–522.

*S. V. Ludkowski*

**Quotient and transversal mappings for topological quasigroups**

*Keywords*: noncommutative geometry, quasigroup, topology, mapping, quotient, transversal, continuity, homogeneous space, product.

MSC2020: 54B05, 54B15, 20N05, 22A22, 22A30

DOI: 10.35634/vm230308

This article is devoted to studying the structure of topological left (or right) quasigroups, which play a great role in noncommutative geometry. Quotient and transversal mappings are important in the theory of differentiable manifolds and topological manifolds. Their transversal and quotient mappings are investigated. Necessary and sufficient conditions for their continuity are scrutinized. Examples are given. Homogeneous spaces are investigated related to topological quasigroups and their subquasigroups. For this purpose, the products of special types of topological left (or right) quasigroups, which are called smashed, are investigated. They are used to describe an extensive family of topological nondiscrete left (or right) quasigroups for which transversal mappings are continuous.

REFERENCES

1. Browder W. *Surgery on simply-connected manifolds*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1972. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50020-6
2. Hirsch M. W. *Differential topology*, New York: Springer, 1976. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9449-5
3. Auslander L., Hahn F., Green L. *Flows on homogeneous spaces*, Princeton: Princeton University Press, 1963. https://doi.org/10.1515/9781400882021
4. Ludkovsky S. V. Microbundles over topological rings, *Topology and its Applications*, 2019, vol. 260, pp. 126–138. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.04.003
5. Mostajeran C., Sepulchre R. Monotonicity on homogeneous spaces, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2018, vol. 30, issue 4, article number: 22. https://doi.org/10.1007/s00498-018-0229-x
6. Urakawa H. Equivariant theory of Yang–Mills connections over Riemannian manifolds of cohomogeneity one, *Indiana University Mathematics Journal*, 1988, vol. 37, no. 4, pp. 753–788. https://www.jstor.org/stable/24895355
7. Kock J., Vainsencher I. *An invitation to quantum cohomology*, Boston: Birkhäuser, 2007. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4495-6
8. Abraham R., Robbin J. W. *Transversal mappings and flows*, New York: W. A. Benjamin, 1967.
9. Bruck R. H. *A survey of binary systems*, Berlin: Springer, 1971. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43119-1
10. Pickert G. *Projektive Ebenen*, Berlin: Springer, 1975. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66148-8
11. Sabinin L. V. *Smooth quasigroups and loops*, Dordrecht: Springer, 1999. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4491-9
12. Hewitt E., Ross K. A. *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups integration theory group representations*, New York: Springer, 1979. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8638-2
13. Arhangel'skii A., Tkachenko M. *Topological groups and related structures, an introduction to topological algebra*, Paris: Atlantis Press, 2008. https://doi.org/10.2991/978-94-91216-35-0
14. Kakkar V. Boolean loops with compact left inner mapping groups are profinite, *Topology and its Applications*, 2018, vol. 244, pp. 51–54. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.06.002
15. Ludkovsky S. V. On continuity of transversal maps and incomparable topologies for topological groups, *Topology and its Applications*, 2022, vol. 312, 108065. https://doi.org/10.1016/j.topol.2022.108065
16. Baez J. C. The octonions, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2002, vol. 39, no. 2, pp. 145–205. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-01-00934-X

17. Dickson L. E. *The collected mathematical papers of Leonard Eugene Dickson. Vol. I–VI*, New York: AMS Chelsea Publishing, 1975–1983.
18. Kantor I. L., Solodovnikov A. S. *Hypercomplex numbers*, Berlin: Springer, 1989.
19. Frenod E., Ludkowski S. V. Integral operator approach over octonions to solution of nonlinear PDE, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 2018, vol. 103, issue 5, pp. 831–876. https://doi.org/10.17654/MS103050831
20. Gürsey F., Tze C.-H. *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics*, Singapore: World Scientific, 1996. https://doi.org/10.1142/3282
21. Ludkovsky S. V. Wrap groups of connected fiber bundles: their structure and cohomologies, *Advances in Mathematics Research*, New York: Nova Science Publishers, 2011, vol. 14, pp. 57–134.
22. Ludkovsky S. V. Meta-invariant operators over Cayley–Dickson algebras and spectra, *Advances in Pure Mathematics*, 2013, vol. 3, issue 1, pp. 41–69. https://doi.org/10.4236/apm.2013.31008
23. Ludkovsky S. V. $C^*$-algebras of meta-invariant operators in modules over Cayley–Dickson algebras, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2015, vol. 39, no. 5, pp. 625–684.
24. Ludkovsky S. V. Algebras of operators in Banach spaces over the quaternion skew field and the octonion algebra, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 144, issue 4, pp. 4301–4366. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0273-4
25. Ludkovsky S. V., Sprössig W. Ordered representations of normal and super-differential operators in quaternion and octonion Hilbert spaces, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2010, vol. 20, issue 2, pp. 321–342. https://doi.org/10.1007/s00006-009-0180-5
26. Ludkovsky S. V., Sprössig W. Spectral theory of super-differential operators of quaternion and octonion variables, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2011, vol. 21, issue 1, pp. 165–191. https://doi.org/10.1007/s00006-010-0238-4
27. Ludkovsky S. V., Sprössig W. Spectral representations of operators in Hilbert spaces over quaternions and octonions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2012, vol. 57, issue 12, pp. 1301–1324. https://doi.org/10.1080/17476933.2010.538845
28. Ludkovsky S. V. Integration of vector Sobolev type PDE over octonions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, vol. 61, issue 7, pp. 1014–1035. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1132207
29. Ludkovsky S. V. Integration of vector hydrodynamical partial differential equations over octonions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, vol. 58, issue 5, pp. 579–609. https://doi.org/10.1080/17476933.2011.598930
30. Engelking R. *General topology*, Berlin: Heldermann, 1989.
31. Kunen K. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1980.
32. van Rooij A. C. M. *Non-Archimedean functional analysis*, New York: Marcel Dekker, 1978.
33. Allcock D. Reflection groups and octave hyperbolic plane, *Journal of Algebra*, 1999, vol. 213, issue 2, pp. 467–498. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7671
34. Blahut R. E. *Algebraic codes for data transmission*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9780511800467
35. Bogolubov N. N., Logunov A. A., Oksak A. I., Todorov I. T. *General principles of quantum field theory*, Dordrecht: Springer, 1990. https://doi.org/10.1007/978-94-009-0491-0
36. Castro-Alvaredo O. A., Doyon B., Fioravanti D. Conical twist fields and null polygonal Wilson loops, *Nuclear Physics B*, 2018, vol. 931, pp. 146–178. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.04.002
37. Demidova L. A., Gorchakov A. V. Application of bioinspired global optimization algorithms to the improvement of the prediction accuracy of compact extreme learning machines, *Russian Technological Journal*, 2022, vol. 10, issue 2, pp. 59–74. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-2-59-74
38. Gilbert J. E., Murray M. A. M. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511611582
39. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 245, issue 2, pp. 178–196. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04685-5
40. Shang Yilun. Lie algebraic discussion for affinity based information diffusion in social networks,

*Open Physics*, 2017, vol. 15, issue 1, pp. 705–711. https://doi.org/10.1515/phys-2017-0083
41. Shum Kar Ping, Xueming Ren, Wang Yanhui. Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2014, vol. 38, pp. 719–730.

Received 04.04.2023

Accepted 01.09.2023

Sergey Viktorovich Ludkowski, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied Mathematics, MIREA — Russian Technological University, pr. Vernadskogo, 78, Moscow, 119454, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4733-8151
E-mail: sludkowski@mail.ru

**Citation:** S. V. Ludkowski. Quotient and transversal mappings for topological quasigroups, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 497–522.