МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 387–401.

УДК 517.982.22, 517.518.12

© *В. Н. Баранов, В. И. Родионов, А. Г. Родионова*

О БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРАВИЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

В работе вводится понятие правильной функции многих переменных $f\colon X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$. В основе определения лежит понятие специального разбиения множества X и понятие колебания функции f на элементах разбиения. Показано, что всякая функция, заданная и непрерывная на замыкании X открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, является правильной (принадлежит пространству $\langle \mathrm{G}(X), \|\cdot\|\rangle$). Доказана полнота пространства $\mathrm{G}(X)$ по $\sup$-норме $\|\cdot\|$. Оно является замыканием пространства ступенчатых функций. Во второй части работы определено и исследовано пространство $\mathrm{G}^J(X)$, отличающееся от пространства $\mathrm{G}(X)$ тем, что в его определении вместо разбиений используются J-разбиения, элементы которых — измеримые по Жордану открытые множества. Перечисленные выше свойства пространства $\mathrm{G}(X)$ переносятся на пространство $\mathrm{G}^J(X)$. В заключительной части работы определено понятие J-интегрируемости функций многих переменных. Доказано, что если X — это измеримое по Жордану замыкание открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то она J-интегрируема. При этом значения интегралов совпадают. Все функции $f \in \mathrm{G}^J(X)$ являются J-интегрируемыми.

Ключевые слова: ступенчатая функция, правильная функция, измеримость по Жордану, интегрируемость по Риману.

DOI: 10.35634/vm230301

Введение

Непрерывные функции $f\colon K \to \mathbb{R}$, где K — это отрезок, интервал или полуинтервал, обладают достаточно высокой степенью регулярности («порядка»), заключающейся в том, что близость аргументов влечет близость значений непрерывной функции. «Не слишком разрывные» правильные функции тоже обладают хорошей регулярностью. Термин «правильная функция» предложен в [1, с. 197] как перевод слов «regulated function», в более раннем переводе [2, с. 167] использован термин «простая функция», позднее в работах [3,4] использован термин «прерывистая функция». Отметим еще, что в работе [5] дается определение правильных функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{B}$, действующих из отрезка $[a,b]$ в произвольное банахово пространство $\mathbb{B}$. В определении предполагается, что существуют односторонние пределы $f(x-0)$, $x \in (a,b]$, $f(x+0)$, $x \in [a,b)$, такие, что $f(x-0)$, $f(x+0) \in \mathbb{B}$ (см. [3,5]). Пространство правильных функций f обозначим через $\mathrm{G}([a,b]),\mathbb{B})$. В случае $\mathbb{B}=\mathbb{R}$ пишем $\mathrm{G}([a,b])$. Согласно [5, с. 16] справедливо

Утверждение 1. *Для функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $f \in \mathrm{G}([a,b])$;

(2) *функция f есть равномерный* (*на $[a,b]$*) *предел последовательности $\{h_k\}$, состоящей из ступенчатых функций $h_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;*

(3) *для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ такое, что*

$$\max_{i=1,\ldots,m} \sup_{x,y\in(x_{i-1},x_i)} |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Эволюция задач, в которых используются обобщения правильных функций, происходит в разных направлениях. Например, в работах [6, 7] фигурируют ограниченные правильные функции, определенные на неограниченных интервалах, а в [8] исследовано полное метрическое нелинейное пространство, состоящее из правильных функций, действующих из отрезка $[a, b]$ в расширенную числовую ось $\overline{\mathbb{R}}$.

Правильные функции играют важную роль в переопределении расширительных толкований интеграла Римана–Стилтьеса. Хорошо известно, что интеграл Римана–Стилтьеса $(RS)\displaystyle\int_a^b f\,dg$ существует в двух случаях: когда $(f, g) \in \mathrm{C}([a, b]) \times \mathrm{BV}([a, b])$, или когда $(f, g) \in \mathrm{G}([a, b]) \times \mathrm{CBV}([a, b])$. Через $\mathrm{C}([a, b])$, $\mathrm{BV}([a, b])$, $\mathrm{CBV}([a, b])$ обозначены пространства непрерывных функций, функций ограниченной вариации, непрерывных функций ограниченной вариации соответственно. Во многих практических и теоретических задачах возникает потребность интегрирования правильной функции $f \in \mathrm{G}([a, b])$ по функции $g \in \mathrm{BV}([a, b]) \subset \mathrm{G}([a, b])$ (функции, однако, могут иметь общие точки разрыва; в этом случае интеграл заведомо не существует). В работе [3] для пары $(f, g) \in \mathrm{G}([a, b]) \times \mathrm{BV}([a, b])$ в терминах правильных функций переопределено понятие интеграла Перрона–Стилтьеса $(PS)\displaystyle\int_a^b f\,dg$. В [9] в этих же терминах переопределены понятия интегралов Юнга–Стилтьеса, Душника–Стилтьеса, Курцвейля–Стилтьеса. Получены соотношения между интегралами.

В статьях [10–13] в терминах интеграла Курцвейля–Стилтьеса приведены доказательства ряда известных утверждений. В них получены новые результаты о решениях дифференциальных уравнений, ассоциированных с интегральными уравнениями, порожденными операторами вольтеррового типа, заданными через интеграл Курцвейля–Стилтьеса. Ряд работ посвящен исследованию уравнений, порожденных операторами фредгольмового типа, заданных через интеграл Курцвейля–Стилтьеса, например, в [14] фигурирует квадратичное интегральное уравнение Гаммерштейна.

Оператор Немыцкого (оператор суперпозиции $F\colon x(\cdot) \to f(\cdot, x(\cdot))$), порожденный фиксированной функцией f, определенный в пространстве правильных функций, изучается в работах [15, 16]. Доказано существование решений нелинейных функционально-интегральных уравнений частного вида.

В статье [17] исследованы вопросы существования и выбора правильных функций в качестве решений для достаточно общего типа дифференциальных включений.

В [18, 19] правильные функции многих переменных определены как функции, имеющие в каждой точке области определения пределы по всем направлениям, порожденным точками единичной сферы. Авторы настоящей работы предлагают иное определение: понятие правильной функции многих переменных $f\colon X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$, вводится на базе третьего пункта утверждения 1. В основе определения лежит понятие специального разбиения множества X и понятие колебания функции f на элементах разбиения. Показано, что всякая функция, заданная и непрерывная на замыкании X открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, является правильной (принадлежит пространству $\langle \mathrm{G}(X), \|\cdot\|\rangle$). Доказана полнота пространства $\mathrm{G}(X)$ по $\sup$-норме $\|\cdot\|$. Оно является замыканием пространства ступенчатых функций.

Во второй части работы определено и исследовано пространство $\mathrm{G}^J(X)$, отличающееся от пространства $\mathrm{G}(X)$ тем, что в его определении вместо разбиений используются J-разбиения, элементы которых — измеримые по Жордану открытые множества. Перечисленные выше свойства пространства $\mathrm{G}(X)$ переносятся на пространство $\mathrm{G}^J(X)$.

В заключительной части работы определено понятие J-интегрируемости функций многих переменных. Доказано, что если X — это измеримое по Жордану замыкание открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то она J-интегрируема. При этом значения интегралов совпадают. Все функции $f \in \mathrm{G}^J(X)$ являются J-интегрируемыми.

§ 1. Основные определения и примеры

Через $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность всех непустых открытых множеств, определенных в пространстве $\mathbb{R}^n$. Замыкание множеств $X \subseteq \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\overline{X}$.

Определение 1. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Система $\{X_1, \ldots, X_m\}$ множеств из $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ называется *$\mathcal{O}$-разбиением* множества X, если

(1) $X_i \cap X_j = \varnothing$ для всех $i, j = 1, \ldots, m$ таких, что $i \neq j$;

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{X}_i = \overline{X}$.

Замечание 1. $\mathcal{O}$-разбиения $\{X_1, \ldots, X_m\}$ и $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ множества X порождают множества $Z_{ij} \doteq X_i \cap Y_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r$. Через $\mathcal{S}$ обозначим совокупность всех пар (i, j) таких, что $Z_{ij} \neq \varnothing$. Легко убедиться, что система $\{Z_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{S}}$ также является $\mathcal{O}$-разбиением множества X.

Определение 2. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $h\colon X \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-постоянной* (*ступенчатой*), если существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_m\}$ множества X такое, что при всех $i = 1, \ldots, m$ сужение функции h на множество X_i является функцией-константой на X_i.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $X_1 \doteq \{(u, v) \in X \colon v < 0\}$, $X_2 \doteq \{(u, v) \in X \colon v > 0\}$, а функция $h\colon X \to \mathbb{R}$ такова, что $h(u, v) = 0$ для всех $(u, v) \in X_1$, $h(u, v) = 1$ для всех $(u, v) \in X_2$ и, наконец, $h(u, 0) = \varphi(u)$ для всех $u \in \mathbb{R}$ (где $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — это какая-нибудь ограниченная функция). Множества $\{X_1, X_2\}$ составляют $\mathcal{O}$-разбиение множества X такое, что сужения $h_1\colon X_1 \to \mathbb{R}$ и $h_2\colon X_2 \to \mathbb{R}$ функции h являются функциями-константами. Следовательно, h — ступенчатая функция (независимо от выбора функции φ). Функция h имеет «любопытный» вид в случае, когда φ — это функция Дирихле, то есть $\varphi(u) = 1$ при рациональном $u \in \mathbb{R}$ и $\varphi(u) = 0$ — при иррациональном.

Определение 3. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *правильной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_m\}$ множества X такое, что

$$\max_{i=1,\ldots,m} \omega(f; X_i) < \varepsilon,$$

где $\omega(f; X_i) \doteq \sup\limits_{x,y \in X_i} |f(x) - f(y)|$ — это *колебание* функции f на множестве X_i.

Замечание 2. Пусть $X_0, Y_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множества X, Y таковы, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$ и $Y_0 \subseteq$ $\subseteq Y \subseteq \overline{Y}_0$, причем $X \cap Y = \varnothing$. Функция $f\colon X \cup Y \to \mathbb{R}$ является правильной тогда и только тогда, когда ее сужения $f_X\colon X \to \mathbb{R}$ и $f_Y\colon Y \to \mathbb{R}$ — правильные функции.

Замечание 3. В соответствии с замечанием 1 сумма $f + g$ и произведение fg двух правильных функций $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ также являются правильными. (Аналогичное утверждение справедливо и для ступенчатых функций.) Пространство (алгебру) правильных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathrm{G}(X)$. В нем определена норма

$$\|f\| \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{1}$$

Пусть $f \in \mathrm{G}(X)$ и $f_k \in \mathrm{G}(X)$, $k = 1, 2, \ldots$. Сходимость $f_k \to f$ по норме $\|\cdot\|$ эквивалентна равномерной (на X) сходимости $f_k \rightrightarrows f$, $k \to \infty$.

Примером правильной функции может служить любая непрерывная функция, заданная на компактном множестве, которое является замыканием открытого ограниченного множества.

Утверждение 2. *Пусть ограниченные множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является правильной.*

Доказательство. Утверждение об ограниченности функции f хорошо известно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как f — непрерывная функция, то для любого $x \in X$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ для всех $y \in B_\delta(x) \cap X$ (где $B_\delta(x)$ — это открытый шар радиуса δ с центром в точке x). Как следствие, справедлива оценка $\omega(f; B_\delta(x) \cap X) < \varepsilon$. Совокупность $\{B_{\delta(\varepsilon,x)}(x)\}_{x\in X}$ является покрытием компактного множества X, следовательно, существует конечное подпокрытие $\{B_{\delta_i}(x_i)\}_{i\in I}$ этого множества, причем $\omega(f; B_{\delta_i}(x_i) \cap X) < \varepsilon$ для всех $i \in I \doteq \{1, \ldots, m\}$. Уместно также отметить следующее важное обстоятельство: для любого $x \in X$ существует $i \in I$ такое, что $x \in B_{\delta_i}(x_i)$.

Для любого $i \in I$ обозначим $Y_i \doteq B_{\delta_i}(x_i) \cap \operatorname{int} X$ (где $\operatorname{int} X$ — это совокупность всех внутренних точек компакта X). Очевидно, $Y_i \subseteq \operatorname{int} X$, $Y_i \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\omega(f; Y_i) < \varepsilon$. Кроме того, для любого $x \in \operatorname{int} X$ существует $i \in I$ такое, что $x \in Y_i$.

Через 2^I обозначим совокупность всех подмножеств $\alpha \subseteq I$, и пусть

$$X_\alpha \doteq \Big(\bigcap_{i\in\alpha} Y_i\Big)\backslash\Big(\bigcup_{i\in I\backslash\alpha} Y_i\Big), \quad \alpha \in 2^I.$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим совокупность всех тех $\alpha \in 2^I$, для которых $X_\alpha \neq \varnothing$. Поскольку $\omega(f; Y_i) < \varepsilon$ для всех $i \in I$, то $\omega(f; X_\alpha) < \varepsilon$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Из определения множеств X_α следует, что если $\alpha \in \mathcal{A}$ и $x \in X_\alpha$, то $x \in Y_i$ для всех $i \in \alpha$ и $x \notin Y_i$ для всех $i \in I\backslash\alpha$.

Покажем, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ таковы, что $\alpha \neq \beta$, то $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$. Допустим противное, и пусть $x \in X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing$. Так как $\alpha \neq \beta$, то найдется индекс $i \in I$, принадлежащий одному из подмножеств и не принадлежащий другому. Без ограничения общности считаем, что $i \in \alpha$ и $i \notin \beta$ (то есть $i \in I\backslash\beta$). С одной стороны, $x \in X_\alpha$ и $i \in \alpha$, поэтому $x \in Y_i$, а с другой стороны, $x \in X_\beta$ и $i \in I\backslash\beta$, поэтому $x \notin Y_i$. Противоречие.

Так как $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, то $\operatorname{int} X_\alpha \cap \operatorname{int} X_\beta = \varnothing$. Также легко убедиться, что при $\alpha \in \mathcal{A}$ неравенство $X_\alpha \neq \varnothing$ влечет $\operatorname{int} X_\alpha \neq \varnothing$, а из неравенства $\omega(f; X_\alpha) < \varepsilon$ следует, что $\omega(f; \operatorname{int} X_\alpha) < \varepsilon$. Покажем, что система $\{\operatorname{int} X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ является $\mathcal{O}$-разбиением X.

Для всех $i \in I$ обозначим $Y_i' \doteq (\operatorname{int} X)\backslash Y_i$ (напомним, что $Y_i \subseteq \operatorname{int} X$). Для всех $k \in I$ определим множества $I_k \doteq \{1, \ldots, k\}$ и

$$X_\alpha^k \doteq \Big(\bigcap_{i\in\alpha} Y_i\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{i\in I_k\backslash\alpha} Y_i'\Big), \quad \alpha \in 2^{I_k}. \tag{2}$$

Понятно, что $I_m = I$, а в силу общей теории множеств справедливо равенство $X_\alpha^m = X_\alpha$.

Пусть, далее, $Z_k \doteq \bigcup\limits_{\alpha\subseteq I_k} X_\alpha^k$, $k \in I$. Индукцией по k покажем равенство $Z_k = \operatorname{int} X$.

При $k = 1$ справедливо $I_1 = \{1\}$ и $Z_1 = \bigcup\limits_{\alpha\subseteq\{1\}} X_\alpha^1 = X_\varnothing^1 \cup X_{\{1\}}^1 = Y_1' \cup Y_1 = \operatorname{int} X$.

Зафиксируем $k \geqslant 2$. Справедливо равенство $Z_k = Z_k' \cup Z_k''$, где

$$Z_k' \doteq \bigcup_{\alpha\subseteq I_k\colon k\notin\alpha} X_\alpha^k, \qquad Z_k'' \doteq \bigcup_{\alpha\subseteq I_k\colon k\in\alpha} X_\alpha^k = \bigcup_{\alpha\subseteq I_k\colon k\notin I_k\backslash\alpha} X_\alpha^k = \bigcup_{\beta\subseteq I_k\colon k\notin\beta} X_{I_k\backslash\beta}^k.$$

В последнем равенстве заменили переменную α на $\beta \doteq I_k\backslash\alpha$. Следовательно,

$$Z_k = \bigcup_{\alpha\subseteq I_k\colon k\notin\alpha} \big[\, X_\alpha^k \cup X_{I_k\backslash\alpha}^k\big] = \bigcup_{\alpha\subseteq I_{k-1}} \big[\, X_\alpha^k \cup X_{I_k\backslash\alpha}^k\big]. \tag{3}$$

В силу (2) для любых $\alpha \subseteq I_{k-1}$ справедливы равенства

$$X_\alpha^k = \big(\bigcap_{i\in\alpha} Y_i\big) \bigcap \big(\bigcap_{i\in I_{k-1}\setminus\,\alpha} Y_i'\big) \cap Y_k' = X_\alpha^{k-1} \cap Y_k',$$

$$X_{I_k\setminus\alpha}^k = \big(\bigcap_{i\in I_k\setminus\alpha} Y_i\big) \bigcap \big(\bigcap_{i\in\alpha} Y_i'\big) = Y_k \cap \big(\bigcap_{i\in I_{k-1}\setminus\,\alpha} Y_i\big) \bigcap \big(\bigcap_{i\in\alpha} Y_i'\big) = Y_k \cap X_{I_{k-1}\setminus\,\alpha}^{k-1},$$

а в силу (3) имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} Z_k = \Big[\bigcup_{\alpha\subseteq I_{k-1}} \big(X_\alpha^{k-1} \cap Y_k'\big)\Big] \cup \Big[\bigcup_{\alpha\subseteq I_{k-1}} \big(Y_k \cap X_{I_{k-1}\setminus\,\alpha}^{k-1}\big)\Big] = \\ = \Big[Y_k' \cap \bigcup_{\alpha\subseteq I_{k-1}} X_\alpha^{k-1}\Big] \cup \Big[Y_k \cap \bigcup_{\beta\subseteq I_{k-1}} X_\beta^{k-1}\Big] = \big[Y_k' \cap Z_{k-1}\big] \cup \big[Y_k \cap Z_{k-1}\big] = \\ = \big[Y_k' \cup Y_k\big] \cap Z_{k-1} = \operatorname{int} X \cap Z_{k-1} = Z_{k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $Z_k = \operatorname{int} X$ для всех $k \in I$. В частности, $Z_m = \operatorname{int} X$, поэтому

$$\overline{X} = \overline{\operatorname{int} X} = \overline{Z_m} = \bigcup_{\alpha\subseteq I_m} \overline{X_\alpha^m} = \bigcup_{\alpha\subseteq I} \overline{X_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{X_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{\operatorname{int} X_\alpha}.$$

Следовательно, система $\{\operatorname{int} X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества X таким, что $\omega(f; \operatorname{int} X_\alpha) < \varepsilon$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, поэтому $f \in \mathrm{G}(X)$. □

Существуют непрерывные правильные функции, определенные не только на компактных множествах, но и на открытых (даже неограниченных) множествах.

Пример 2. Пусть $X \doteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u+v > 1\}$, а функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ такова, что $f(u,v) = \frac{1}{u+v}$. Пусть $a \doteq \inf f(u,v)$ и $b \doteq \sup f(u,v)$ при $(u,v) \in X$. Очевидно, $a = 0$ и $b = 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть натуральное число m таково, что $m\varepsilon > 1$. Обозначим $h \doteq 1/m < \varepsilon$. Определим числа $c_i \doteq ih$, $i = 0,1,\dots,m$, и множества

$$X_i \doteq \{(u,v) \in X \colon f(u,v) \in (c_{i-1}, c_i)\}, \quad i \in I \doteq \{1,\dots,m\}.$$

Легко убедиться, что X_1 — это полуплоскость $\{(u,v)\colon u+v > m\}$, а для всех остальных $i = 2,\dots,m$ множество X_i — это неограниченная полоса $\{(u,v)\colon \frac{m}{i} < u+v < \frac{m}{i-1}\}$. Очевидно, система $\{X_1,\dots,X_m\}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества X. Для всех $i \in I$ и $(u,v) \in X_i$ справедливо $c_{i-1} < f(u,v) < c_i$, поэтому колебание функции f на любом множестве X_i не превосходит разности $c_i - c_{i-1} = h < \varepsilon$, следовательно, $f \in \mathrm{G}(X)$.

Ниже приведены два примера разрывных правильных функций, первая из них определена на ограниченном множестве, а вторая — на неограниченном.

Пример 3. Пусть $X \doteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u^2+v^2 \leqslant 1\}$, а функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ такова, что $f(0,0) = 0$ и $f(u,v) = (u^2+v^2)\big\{\frac{1}{u^2+v^2}\big\}$ при $(u,v) \neq (0,0)$ (выражение $\{\sigma\}$ обозначает дробную часть числа $\sigma \in \mathbb{R}$). Зафиксируем $k = 1,2,\dots$. Для всех $(u,v) \in X$ таких, что $u^2+v^2 \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, справедливо $k \leqslant \frac{1}{u^2+v^2} < k+1$, поэтому $\big\{\frac{1}{u^2+v^2}\big\} = \frac{1}{u^2+v^2} - k$. Следовательно, для всех пар (u,v) из кольца $R_k \doteq \big\{(u,v) \in X \colon \frac{1}{k+1} < u^2+v^2 \leqslant \frac{1}{k}\big\}$ имеет место равенство $f(u,v) = 1 - k(u^2+v^2)$. Таким образом, функция f непрерывна в каждом кольце R_k. Она разрывна во всех точках семейства концентрических окружностей $\Gamma_k \doteq \big\{(u,v) \in X \colon u^2+v^2 = \frac{1}{k+1}\big\}$, $k = 1,2,\dots$. В точке $(0,0)$ функция непрерывна.

Покажем, что $f \in \mathrm{G}(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть натуральное число m таково, что $(m+1)\varepsilon > 1$. Имеет место равенство $X = R_1 \cup \ldots \cup R_m \cup \overline{C}$, где

$$C \doteq \big\{(u,v) \in X \colon u^2+v^2 < \tfrac{1}{m+1}\big\}.$$

Для любых $(u,v) \in C\backslash\{(0,0)\}$ справедливо $0 < u^2+v^2 < \frac{1}{m+1} < \varepsilon$ и $0 \leqslant \left\{\frac{1}{u^2+v^2}\right\} < 1$, следовательно, $0 \leqslant f(u,v) < \varepsilon$, поэтому $\omega(f;C) < \varepsilon$. Зафиксируем $k = 1,\ldots,m$. Сужение $f_k\colon R_k \to \mathbb{R}$ функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ есть функция непрерывная. Если $\overline{R}_k$ — замыкание множества R_k, то $\overline{R}_k = R_k \cup \Gamma_k$ — компакт, на котором определена непрерывная функция $g_k\colon \overline{R}_k \to \mathbb{R}$ такая, что $g_k(u,v) = 1-k\,(\,u^2+v^2)$, $(u,v) \in \overline{R}_k$. Очевидно, функции g_k и f_k совпадают на множестве R_k. В силу утверждения 2 существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1^{(k)},\ldots,X_{r_k}^{(k)}\}$ множества $\overline{R}_k$ такое, что $\omega(g_k;X_i^{(k)}) < \varepsilon$ (при всех $i = 1,\ldots,r_k$). Эта же совокупность является $\mathcal{O}$-разбиением множества R_k, причем $\omega(f_k;X_i^{(k)}) < \varepsilon$. Таким образом, колебание функции f на каждом из множеств

$$C, X_1^{(1)},\ldots,X_{r_1}^{(1)}, X_1^{(2)},\ldots,X_{r_2}^{(2)},\ldots,X_1^{(m)},\ldots,X_{r_m}^{(m)}$$

не превосходит ε. Так как эта совокупность является $\mathcal{O}$-разбиением X, то $f \in \mathrm{G}(X)$.

Пример 4. Пусть $X \doteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon u \geqslant 1,\, v > 0,\, uv < 1\}$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ имеет вид $f(u,v) = \frac{1}{[u]}$ (выражение $[\sigma]$ обозначает целую часть числа $\sigma \in \mathbb{R}$). Зафиксируем $k = 1,2,\ldots.$ При $u \in (k,k+1)$ имеем $[u] = k$, следовательно, $f(u,v) = \frac{1}{k}$ для всех $(u,v) \in X_k$, где $X_k \doteq \bigl\{(u,v) \in X\colon k < u < k+1\bigr\}$. Очевидно, $\omega(f;X_k) = 0$.

Покажем, что $f \in \mathrm{G}(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть натуральное число m таково, что $(m+1)\varepsilon > 1$. Пусть $M \doteq \bigl\{(u,v) \in X\colon m+1 < u\bigr\}$. Для всех $(u,v) \in M$ справедливо $[u] \geqslant m+1$ и $0 < f(u,v) = \frac{1}{[u]} \leqslant \frac{1}{m+1} < \varepsilon$, поэтому $\omega(f;M) < \varepsilon$.

Так как система $\{X_1,\ldots,X_m,M\}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества X, то $f \in \mathrm{G}(X)$.

Заметим, что функция f «похожа» на ступенчатую, однако таковой не является.

§ 2. Топологические свойства пространства правильных функций

Очевидно, всякая кусочно-постоянная функция является правильной. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является правильной тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом некоторой последовательности $\{h_k\}$, состоящей из ступенчатых функций $h_k\colon X \to \mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $f \in \mathrm{G}(X)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1,\ldots,X_m\}$ множества X такое, что

$$\max_{i=1,\ldots,m}\ \sup_{x,y\in X_i} |f(x)-f(y)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Для каждого $i \in I \doteq \{1,\ldots,m\}$ зафиксируем какую-нибудь точку $x_i \in X_i$ и составим функцию $h\colon X \to \mathbb{R}$ такую, что

(1) $h(x) \doteq f(x_i)$ для всех $x \in X_i$ (при каждом $i \in I$);

(2) $h(x) \doteq f(x)$ для всех $x \in X\backslash \bigcup\limits_{i\in I} X_i$.

Очевидно, $h(t)$ — ступенчатая функция. При $x \in X\backslash \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ имеем $|h(x)-f(x)| = 0$, а в силу (4) для всех $i \in I$ и $x \in X_i$ справедливо $|h(x)-f(x)| = |f(x_i)-f(x)| < \varepsilon$, поэтому $\|h-f\| < \varepsilon$. Придавая параметру ε значения $\varepsilon_k \doteq \frac{1}{k}$, $k = 1,2,\ldots$, получим последовательность $\{h_k\}$ ступенчатых функций $h_k\colon X \to \mathbb{R}$ такую, что $\|h_k - f\| < \varepsilon_k \to 0$.

Достаточность. Пусть последовательность $\{h_k\}$ ступенчатых функций $h_k\colon X \to \mathbb{R}$ и функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ таковы, что $h_k \rightrightarrows f$, $k \to \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется

k такое, что $|h_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех $x \in X$, поэтому из ограниченности функции h_k следует ограниченность функции f. Для данного k найдется $\mathcal{O}$-разбиение $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ множества X такое, что $h_k(x) = \mathrm{const}$ на каждом из множеств Y_j, $j \in J \doteq \{1, \ldots, r\}$.

Для всех $j \in J$ и $x, y \in Y_j$ справедливо $|f(x) - f(y)| \leqslant \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где

$$\sigma_1 \doteq |f(x) - h_k(x)| < \varepsilon, \qquad \sigma_2 \doteq |h_k(x) - h_k(y)| = 0, \qquad \sigma_3 \doteq |h_k(y) - f(y)| < \varepsilon,$$

следовательно, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$, поэтому $f \in \mathrm{G}(X)$. □

Следствие 1. *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Если существует равномерный предел последовательности $\{f_k\}$, состоящей из правильных функций $f_k\colon X \to \mathbb{R}$, то он является правильной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем, что функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ и последовательность $\{f_k\}$ правильных функций $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ таковы, что $f_k \rightrightarrows f$, $k \to \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется N такое, что $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $k > N$ и $x \in X$. Зафиксируем $k > N$. Так как $f_k \in \mathrm{G}(X)$, то в силу теоремы 1 существует ступенчатая функция $h_k\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $|h_k(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$. Следовательно, $|h_k(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ при всех $x \in X$. Таким образом, последовательность $\{h_k\}$ ступенчатых функций равномерно на X сходится к функции f. В силу теоремы 1 справедливо включение $f \in \mathrm{G}(X)$. □

Теорема 2. *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пространство $\langle \mathrm{G}(X), \|\cdot\| \rangle$ является полным по норме* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем какую-нибудь фундаментальную последовательность $\{f_k\}$, $f_k \in \mathrm{G}(X)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех k и r, больших N, выполняется неравенство $\|f_k - f_r\| < \varepsilon$. Следовательно, для дюбого $x \in X$ справедливо

$$|f_k(x) - f_r(x)| \leqslant \sup_{y \in X} |f_k(y) - f_r(y)| = \|f_k - f_r\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Таким образом, в каждой точке $x \in X$ последовательность $\{f_k(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, поэтому она сходится и, следовательно, определена функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x) \doteq \lim f_k(x). \tag{6}$$

В заключительной части доказательства покажем сначала, что f — правильная функция, а затем установим, что последовательность $\{f_k\}$ сходится к f равномерно на X. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу (5) существует N такое, что $|f_k(x) - f_r(x)| < \varepsilon/3$ для всех $k > N$, $r > N$ и $x \in X$. Зафиксируем этот номер N и какой-нибудь индекс $r > N$. Так как $f_r \in \mathrm{G}(X)$, то существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_m\}$ множества X такое, что

$$\sup_{x, y \in X_i} |f_r(x) - f_r(y)| < \varepsilon/3 \tag{7}$$

при любом $i \in I \doteq \{1, \ldots, m\}$. Для всех $i \in I$ и $k > N$ имеет место неравенство

$$\sup_{x, y \in X_i} |f_k(x) - f_k(y)| \leqslant \sup_{x \in X_i} |f_k(x) - f_r(x)| + \sup_{x, y \in X_i} |f_r(x) - f_r(y)| + \sup_{y \in X_i} |f_r(y) - f_k(y)|,$$

а в силу (7) для всех $k > N$ (в том числе и для $k = r$) справедливо

$$\max_{i \in I} \omega(f_k; X_i) = \max_{i \in I} \sup_{x, y \in X_i} |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существуют номер N и $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_m\}$ множества X такие, что для всех $k > N$ справедлива оценка $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \omega(f_k; X_i) < \varepsilon$.

Для сходящейся числовой последовательности $\{z_k\}$, $z_k \in \mathbb{R}$, справедлива импликация $\bigl(z_k \to z \Rightarrow |z_k| \to |z|\bigr)$, поэтому $\lim |z_k| = |\lim z_k|$. Следовательно, в соответствии с (6) для всех $i \in I$ и $x, y \in X_i$ справедливы равенства

$$|f(x) - f(y)| = \bigl|\lim_k \bigl(f_k(x) - f_k(y)\bigr)\bigr| = \lim_k |f_k(x) - f_k(y)| = \lim_{N<k\to\infty} |f_k(x) - f_k(y)|.$$

Так как $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$ при всех $k > N$, то $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$\max_{i=1,\dots,m} \omega(f; X_i) = \max_{i=1,\dots,m} \sup_{x,y\in X_i} |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

и, следовательно, $f \in \mathrm{G}(X)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу (5) существует N такое, что $|f_k(x) - f_r(x)| < \varepsilon$ для всех $k > N$, $r > N$ и $x \in X$. Устремим в последнем неравенстве индекс r в бесконечность (при фиксированных значениях $k > N$ и $x \in X$), тогда $|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, $|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $k > N$ и $x \in X$, поэтому $\|f_k - f\| \leqslant \varepsilon$ для всех $k > N$. □

§ 3. Пространство J-правильных функций

Через $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ обозначим подсемейство в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из измеримых по Жордану (по жордановой мере μ) множеств. Меру множества X обозначаем через μX или $\mu(X)$.

Замечание 4. 1. Все множества $X \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ открыты, ограничены и $\mu(\partial X) = 0$ (см., например, [20, с. 293]), а дизъюнктное объединение $\overline{X} = X \cup \partial X$ порождает равенство $\mu\overline{X} = \mu X$. (Уместно отметить, что множества ∂X и $\overline{X}$ измеримы и ограничены.)

2. Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Так как $X \backslash X_0 \subseteq \partial X_0$ и $\mu(\partial X_0) = 0$, то $\mu(X \backslash X_0) = 0$, следовательно, $\mu X = \mu X_0$ $(= \mu\overline{X}_0)$.

В настоящем параграфе определено пространство $\mathrm{G}^J(X)$, отличающееся от пространства $\mathrm{G}(X)$ тем, что в его определении вместо $\mathcal{O}$-разбиений фигурируют J-разбиения, элементы которых — измеримые по Жордану открытые множества.

Определение 4. Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Система $\{X_1, \dots, X_m\}$ множеств из $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ называется *J-разбиением* множества X, если

(1) $X_i \cap X_j = \varnothing$ для всех $i, j = 1, \dots, m$ таких, что $i \neq j$;

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{X}_i = \overline{X}$.

Замечание 5. J-разбиения $\{X_1, \dots, X_m\}$ и $\{Y_1, \dots, Y_r\}$ множества X порождают множества $Z_{ij} \doteq X_i \cap Y_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r$. Через $\mathcal{S}$ обозначим совокупность всех пар (i, j) таких, что $Z_{ij} \neq \varnothing$. Легко убедиться, что система $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}$ также является J-разбиением множества X.

Определение 5. Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $h\colon X \to \mathbb{R}$ называется *J-ступенчатой*, если существует J-разбиение $\{X_1, \dots, X_m\}$ множества X такое, что при всех $i = 1, \dots, m$ сужение функции h на множество X_i является функцией-константой на X_i.

Определение 6. Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *J-правильной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует J-разбиение $\{X_1, \dots, X_m\}$ множества X такое, что $\max\limits_{i=1,\dots,m} \omega(f; X_i) < \varepsilon$.

Замечание 6. Пусть $X_0, Y_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множества X, Y таковы, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$ и $Y_0 \subseteq \subseteq Y \subseteq \overline{Y}_0$, причем $X \cap Y = \varnothing$. Функция $f \colon X \cup Y \to \mathbb{R}$ является J-правильной тогда и только тогда, когда ее сужения $f_X \colon X \to \mathbb{R}$ и $f_Y \colon Y \to \mathbb{R}$ — J-правильные функции.

Замечание 7. В соответствии с замечанием 5 сумма $f+g$ и произведение $f\,g$ двух J-правильных функций $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ также являются J-правильными. (Аналогичное утверждение имеет место и для J-ступенчатых функций.) Пространство (алгебру) J-правильных функций $f \colon X \to \mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathrm{G}^J(X)$. В нем определена норма (1). Пусть $f \in \mathrm{G}^J(X)$ и $f_k \in \mathrm{G}^J(X)$, $k = 1, 2, \ldots$. Сходимость $f_k \to f$ по этой норме эквивалентна равномерной (на X) сходимости $f_k \rightrightarrows f$, $k \to \infty$.

Доказательство каждого из перечисленных ниже четырех утверждений во многом повторяет доказательство аналогичных утверждений из параграфов 1 и 2. Следует лишь заменить термины «$\mathcal{O}$-разбиение», «ступенчатая функция» и «правильная функция» на термины «J-разбиение», «J-ступенчатая функция» и «J-правильная функция» соответственно, множество $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ — на $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а пространство $\mathrm{G}(X)$ — на $\mathrm{G}^J(X)$.

Утверждение 3. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая непрерывная функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ является J-правильной.*

Теорема 3. *Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ является J-правильной тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом некоторой последовательности $\{h_k\}$, состоящей из J-ступенчатых функций $h_k \colon X \to \mathbb{R}$.*

Следствие 2. *Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Если существует равномерный предел последовательности $\{f_k\}$, состоящей из J-правильных функций $f_k \colon X \to \mathbb{R}$, то он является J-правильной функцией.*

Теорема 4. *Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пространство $\langle \mathrm{G}^J(X), \|\cdot\| \rangle$ является полным по норме* (1).

§ 4. J-интегрирование функций

Замечание 8. Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пусть, далее, $I \doteq \{1, \ldots, m\}$, $I_0 \doteq \{0\} \cup I$ и $\{X_i\}_{i \in I}$ — J-разбиение множества X. Для всех $i \in I_0$ справедливо $X_i \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $X_i \cap \partial X_i = \varnothing$ и $X_i \cup \partial X_i = \overline{X}_i$. Кроме того,

$$\overline{X}_0 = \bigcup_{i \in I} \overline{X}_i = \bigcup_{i \in I} X_i \cup \bigcup_{i \in I} \partial X_i = \Big[\bigcup_{i \in I} X_i\Big] \cup \Gamma,$$

где $\Gamma \doteq \bigcup\limits_{i \in I} \partial X_i$. В соответствии с замечанием 4 справедливо следующее утверждение. Поскольку $\mu(\partial X_i) = 0$ для всех $i \in I$, то $\mu\Gamma = 0$, следовательно,

$$\mu X_0 = \mu X = \mu \overline{X}_0 = \mu\Big[\bigcup_{i \in I} X_i\Big] = \sum_{i \in I} \mu X_i.$$

Замечание 9. Для любого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ определено число $\operatorname{diam} X \doteq \sup \varrho(x, y)$ (как элемент расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$), где $x, y \in X$, а ϱ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пусть, далее, $m \in \mathbb{N}$ и $I \doteq \{1, \ldots, m\}$. Зафиксируем функцию $f \colon X \to \mathbb{R}$, J-разбиение $\{X_i\}_{i \in I}$ множества X, точки $\{x_i\}_{i \in I}$ такие, что $x_i \in X_i$, и составим *J-интегральную* сумму

$$\sigma\big(f, \{X_i\}_{i \in I}, \{x_i\}_{i \in I}\big) \doteq \sum_{i \in I} f(x_i) \mu X_i.$$

Определение 7. Пусть $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Число $F \in \mathbb{R}$ называется *J-интегралом* от функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\sigma\big(f, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big) - F\right| < \varepsilon,$$

каково бы ни было J-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\max\limits_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$, и каковы бы ни были точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$. В этом случае функцию f называем *J-интегрируемой* на множестве X и пишем

$$F = (J)\int_X f(x)\,dx.$$

Теорема 5. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Если функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то она J-интегрируема. При этом значения интегралов совпадают.*

Доказательство. Через F обозначим кратный интеграл Римана $\int_X f(x)\,dx$ (см. [20, с. 305]). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется $\delta > 0$ такое, что $\Big|\sum\limits_{i\in I} f(x_i)\mu X_i - F\Big| < \varepsilon$, каково бы ни было разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\max\limits_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$, и каковы бы ни были точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$. (Напомним, что система $\{X_i\}_{i\in I}$ непустых измеримых по жордановой мере множеств называется разбиением множества X, если, во-первых, $\mu(X_i \cap X_j) = 0$ для всех $i, j \in I$ таких, что $i \neq j$, а во-вторых, $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$).

Зафиксируем J-разбиение $\{Y_k\}_{k\in K}$ множества X такое, что $\max\limits_{k\in K} \operatorname{diam} Y_k < \delta$. Оно порождает систему $\{\overline{Y}_k\}_{k\in K}$, состоящую из непустых замкнутых измеримых по Жордану множеств. Понятно, что $\max\limits_{k\in K} \operatorname{diam} \overline{Y}_k < \delta$.

Пусть $i, j \in K$ таковы, что $i \neq j$ (поэтому $Y_i \cap Y_j = \varnothing$). Так как $\partial Y_i \cap \overline{Y}_j \subseteq \partial Y_i$, то $\mu(\partial Y_i \cap \overline{Y}_j) = 0$, следовательно, $\mu(\overline{Y}_i \cap \overline{Y}_j) = \mu(Y_i \cap \overline{Y}_j)$. Включение $Y_i \cap \partial Y_j \subseteq \partial Y_j$ влечет равенства $\mu(Y_i \cap \partial Y_j) = 0$ и $\mu(Y_i \cap \overline{Y}_j) = \mu(Y_i \cap Y_j) = 0$, поэтому $\mu(\overline{Y}_i \cap \overline{Y}_j) = 0$.

Для элементов систем $\{Y_k\}_{k\in K}$ и $\{\overline{Y}_k\}_{k\in K}$ справедливо равенство $\bigcup\limits_{k\in K} \overline{Y}_k = X$.

Таким образом, $\{\overline{Y}_k\}_{k\in K}$ — это разбиение множества X, причем $\max\limits_{k\in K} \operatorname{diam} \overline{Y}_k < \delta$.

Зафиксируем точки $\{y_k\}_{k\in K}$ такие, что $y_k \in Y_k$. Очевидно, $y_k \in \overline{Y}_k$. Следовательно,

$$\Big|\sum_{k\in K} f(y_k)\mu\overline{Y}_k - F\Big| < \varepsilon, \qquad \Big|\sum_{k\in K} f(y_k)\mu Y_k - F\Big| < \varepsilon, \qquad (J)\int_X f(x)\,dx = F. \qquad \square$$

Теорема 6. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая J-ступенчатая функция $h\colon X \to \mathbb{R}$ является J-интегрируемой на X.*

Доказательство. Существует J-разбиение $\{X_1, \ldots, X_m\}$ компакта X такое, что при каждом $i \in I \doteq \{1, \ldots, m\}$ сужение $h_i\colon X_i \to \mathbb{R}$ функции h является функцией-константой. Следовательно, если $Y \doteq \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, то функция-сужение $h_Y\colon Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке области ее определения. В силу замечания 8 справедливы равенства $X \backslash Y = \Gamma$ (где $\Gamma \doteq \bigcup\limits_{i\in I} \partial X_i$) и $\mu\Gamma = 0$.

Таким образом, у ограниченной (по определению) функции $h\colon X \to \mathbb{R}$ множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль, поэтому h интегрируема по Риману (см., например, [20, с. 317]). В силу теоремы 5 эта функция J-интегрируема на X. $\square$

Теорема 7. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая J-правильная функция $f \in \mathrm{G}^J(X)$ является J-интегрируемой на X.*

Доказательство. В силу теоремы 3 существует последовательность $\{h_k\}$, состоящая из J-ступенчатых функций $h_k \colon X \to \mathbb{R}$, такая, что $\|h_k - f\| \to 0$.

Для любого k определены J-разбиение $\{X_r^{(k)}\}_{r \in I_k}$ множества X и числа $\{c_r^{(k)}\}_{r \in I_k}$ такие, что $h_k(x) = c_r^{(k)}$ для всех $x \in X_r^{(k)}$ (при каждом $r \in I_k \doteq \{1, \ldots, m_k\}$). Зафиксируем какие-либо индексы k, ℓ и определим множества $Z_{rs}^{(k\ell)} \doteq X_r^{(k)} \cap X_s^{(\ell)}$, $(r,s) \in I_k \times I_\ell$, где $I_\ell \doteq \{1, \ldots, m_\ell\}$. В соответствии с замечанием 8 справедливы следующие равенства:

$$\mu X_r^{(k)} = \sum_{s \in I_\ell} \mu Z_{rs}^{(k\ell)}, \quad r \in I_k; \qquad \mu X_s^{(\ell)} = \sum_{r \in I_k} \mu Z_{rs}^{(k\ell)}, \quad s \in I_\ell; \qquad \mu X = \sum_{(r,s) \in I_k \times I_\ell} \mu Z_{rs}^{(k\ell)}.$$

В силу теоремы 6 функции h_k и h_ℓ являются J-интегрируемыми, и для их J-интегралов H_k и H_ℓ справедливы равенства

$$H_k = \sum_{r \in I_k} c_r^{(k)} \mu X_r^{(k)}, \qquad H_\ell = \sum_{s \in I_\ell} c_s^{(\ell)} \mu X_s^{(\ell)},$$

поэтому

$$H_k - H_\ell = \sum_{r \in I_k} c_r^{(k)} \sum_{s \in I_\ell} \mu Z_{rs}^{(k\ell)} - \sum_{s \in I_\ell} c_s^{(\ell)} \sum_{r \in I_k} \mu Z_{rs}^{(k\ell)} = \sum_{(r,s) \in I_k \times I_\ell} \big[c_r^{(k)} - c_s^{(\ell)}\big] \mu Z_{rs}^{(k\ell)},$$
$$|H_k - H_\ell| \leqslant \|h_k - h_\ell\| \sum_{(r,s) \in I_k \times I_\ell} \mu Z_{rs}^{(k\ell)} = \|h_k - h_\ell\| \mu X.$$

Так как $\|h_k - f\| \to 0$, то $\|h_k - h_\ell\| \to 0$ и $|H_k - H_\ell| \to 0$ при $k, \ell \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{H_k\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, поэтому существует предел $F \doteq \lim H_k$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $E \doteq \varepsilon/(2 + \mu X)$. Так как $\|h_k - f\| \to 0$ и $H_k \to F$, то существует i такое, что $\|h_i - f\| < E$ и $|H_i - F| < E$.

Так как H_i — это J-интеграл от функции h_i на множестве X, то существует $\delta > 0$ такое, что $|\sigma_i - H_i| < E$, каково бы ни было J-разбиение $\{Y_j\}_{j \in J}$ множества X такое, что $\max\limits_{j \in J} \operatorname{diam} Y_j < \delta$, и точки $\{y_j\}_{j \in J}$ такие, что $y_j \in Y_j$ (при каждом $j \in J \doteq \{1, \ldots, m\}$). Здесь и далее используются интегральные суммы

$$\sigma_i \doteq \sum_{j \in J} h_i(y_j) \mu Y_j, \qquad \sigma \doteq \sum_{j \in J} f(y_j) \mu Y_j.$$

Поскольку $|\sigma - F| \leqslant |\sigma - \sigma_i| + |\sigma_i - H_i| + |H_i - F| < |\sigma - \sigma_i| + 2E$ и

$$|\sigma_i - \sigma| \leqslant \sum_{j \in J} \big|h_i(y_j) - f(y_j)\big| \mu Y_j \leqslant \|h_i - f\| \sum_{j \in J} \mu Y_j < E \mu X,$$

то $|\sigma - F| < (2 + \mu X)E = \varepsilon$, поэтому $(J)\displaystyle\int_X f(x)\,dx = F$. $\square$

Замечание 10. В развитие темы уместно отметить следующие аспекты. Имеется понимание необходимости построения примера J-интегрируемой, но не интегрируемой по Риману функции. Параллельный вопрос: существуют ли J-правильные функции (а они J-интегрируемы), не интегрируемые по Риману? Эти вопросы требуют проведения дополнительных исследований. Хорошо известно, что функция Дирихле $[0,1] \to \mathbb{R}$, равная 1 для рациональных и 0 для иррациональных $x \in [0,1]$, интегрируема по Лебегу, но не интегрируема по Риману. Легко убедиться, что она также не является J-интегрируемой. Это наблюдение дает основание полагать, что в построениях, фигурирующих в параграфах 3 и 4, мера Жордана может быть заменена на меру Лебега, и ожидать, что функция Дирихле интегрируема в этом новом смысле. Если ответ на этот вопрос положительный, то возникает естественный вопрос о том, как связан этот интеграл с интегралом Лебега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. https://zbmath.org/0252.00001
2. Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
3. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // Časopis Pro Pěstování Matematiky. 1989. Vol. 114. Issue 2. P. 187–209. https://doi.org/10.21136/CPM.1989.108713
4. Родионов В. И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 7–24. https://doi.org/10.20537/vm090402
5. Hönig Ch. S. Volterra Stieltjes-integral equations: functional analytic methods, linear constraints. Amsterdam: North-Holland, 1975. https://zbmath.org/0307.45002
6. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness and superposition operator in the space of regulated functions on an unbounded interval // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. 2020. Vol. 114. Issue 4. Article number: 168. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00900-9
7. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions on an unbounded interval // Annals of Functional Analysis. 2022. Vol. 13. Issue 4. Article number: 63. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00206-4
8. Баранов В. Н., Родионов В. И. О нелинейных метрических пространствах функций ограниченной вариации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 341–360. https://doi.org/10.35634/vm220301
9. Hanung U. M., Tvrdý M. On the relationships between Stieltjes type integrals of Young, Dushnik and Kurzweil // Mathematica Bohemica. 2019. Vol. 144. Issue 4. P. 357–372. https://doi.org/10.21136/MB.2019.0015-19
10. Federson M., Mesquita J. G., Slavík A. Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses // Mathematische Nachrichten. 2013. Vol. 286. Issues 2–3. P. 181–204. https://doi.org/10.1002/mana.201200006
11. Monteiro G. A., Slavík A. Extremal solutions of measure differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. Vol. 444. Issue 1. P. 568–597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035
12. Monteiro G. A., Hanung U. M., Tvrdý M. Bounded convergence theorem for abstract Kurzweil–Stieltjes integral // Monatshefte für Mathematik. 2016. Vol. 180. Issue 3. P. 409–434. https://doi.org/10.1007/s00605-015-0774-z
13. Di Piazza L., Marraffa V., Satco B. Closure properties for integral problems driven by regulated functions via convergence results // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 466. Issue 1. P. 690–710. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.012
14. Banaś J., Zając T. On a measure of noncompactness in the space of regulated functions and its applications // Advances in Nonlinear Analysis. 2019. Vol. 8. Issue 1. P. 1099–1110. https://doi.org/10.1515/anona-2018-0024
15. Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 476. Issue 2. P. 860–874. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.024
16. Olszowy L., Zając T. Some inequalities and superposition operator in the space of regulated functions // Advances in Nonlinear Analysis. 2020. Vol. 9. Issue 1. P. 1278–1290. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0050

17. Cichoń M., Cichoń K., Satco B. Measure differential inclusions through selection principles in the space of regulated functions // Mediterranean Journal of Mathematics. 2018. Vol. 15. Issue 4. Article number: 148. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1192-y
18. Estrada R. The set of singularities of regulated functions in several variables // Collectanea Mathematica. 2012. Vol. 63. Issue 3. P. 351–359. https://doi.org/10.1007/s13348-011-0042-z
19. Yang Y., Estrada R. The dual of the space of regulated functions in several variables // Sarajevo Journal of Mathematics. 2013. Vol. 9 (22). Issue 2. P. 197–216. https://doi.org/10.5644/SJM.09.2.05
20. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Высшая школа, 1988. https://zbmath.org/0485.26002

Поступила в редакцию 21.02.2023

Принята к публикации 10.08.2023

Баранов Виктор Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: v.n.baranov@gmail.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Родионова Алла Григорьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: alla041054@yandex.ru

Цитирование: В. Н. Баранов, В. И. Родионов, А. Г. Родионова. О банаховых пространствах правильных функций многих переменных. Аналог интеграла Римана // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 387–401.

MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 3. Pp. 387–401.

V. N. Baranov, V. I. Rodionov, A. G. Rodionova

On Banach spaces of regulated functions of several variables. An analogue of the Riemann integral

Keywords: step function, regulated function, Jordan measurability, Riemann integrability.

MSC2020: 46B99, 26B15

DOI: 10.35634/vm230301

The paper introduces the concept of a regulated function of several variables $f\colon X\to\mathbb{R}$, where $X\subseteq\mathbb{R}^n$. The definition is based on the concept of a special partition of the set X and the concept of oscillation of the function f on the elements of the partition. It is shown that every function defined and continuous on the closure X of the open bounded set $X_0\subseteq\mathbb{R}^n$, is regulated (belongs to the space $\langle \mathrm{G}(X), \|\cdot\|\rangle$). The completeness of the space $\mathrm{G}(X)$ in the sup-norm $\|\cdot\|$ is proved. This is the closure of the space of step functions. In the second part of the work, the space $\mathrm{G}^J(X)$ is defined and studied, which differs from the space $\mathrm{G}(X)$ in that its definition uses J-partitions instead of partitions, whose elements are Jordan measurable open sets. The properties of the space $\mathrm{G}(X)$ listed above carry over to the space $\mathrm{G}^J(X)$. In the final part of the paper, the notion of J-integrability of functions of several variables is defined. It is proved that if X is a Jordan measurable closure of an open bounded set $X_0\subseteq\mathbb{R}^n$, and the function $f\colon X\to\mathbb{R}$ is Riemann integrable, then it is J-integrable. In this case, the values of the integrals coincide. All functions $f\in\mathrm{G}^J(X)$ are J-integrable.

REFERENCES

1. Schwartz L. *Analyse mathématique. I*, Paris: Hermann, 1967. https://zbmath.org/0171.01301
Translated under the title *Analiz. Tom 1*, Moscow: Mir, 1972.
2. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York–London: Academic Press, 1960. https://zbmath.org/0100.04201
Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964.
3. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral, *Časopis Pro Pěstování Matematiky*, 1989, vol. 114, issue 2, pp. 187–209. https://doi.org/10.21136/CPM.1989.108713
4. Rodionov V. I. On family of subspaces of the space of regulated functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2009, issue 4, pp. 7–24 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm090402
5. Hönig Ch. S. *Volterra Stieltjes-integral equations: functional analytic methods, linear constraints*, Amsterdam: North-Holland, 1975. https://zbmath.org/0307.45002
6. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness and superposition operator in the space of regulated functions on an unbounded interval, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 2020, vol. 114, issue 4, article number: 168. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00900-9
7. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions on an unbounded interval, *Annals of Functional Analysis*, 2022, vol. 13, issue 4, article number: 63. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00206-4
8. Baranov V. N., Rodionov V. I. On nonlinear metric spaces of functions of bounded variation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 341–360 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220301
9. Hanung U. M., Tvrdý M. On the relationships between Stieltjes type integrals of Young, Dushnik and Kurzweil, *Mathematica Bohemica*, 2019, vol. 144, issue 4, pp. 357–372. https://doi.org/10.21136/MB.2019.0015-19
10. Federson M., Mesquita J. G., Slavík A. Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses, *Mathematische Nachrichten*, 2013, vol. 286, issues 2–3, pp. 181–204. https://doi.org/10.1002/mana.201200006

11. Monteiro G. A., Slavík A. Extremal solutions of measure differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 444, issue 1, pp. 568–597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035
12. Monteiro G. A., Hanung U. M., Tvrdý M. Bounded convergence theorem for abstract Kurzweil–Stieltjes integral, *Monatshefte für Mathematik*, 2016, vol. 180, issue 3, pp. 409–434. https://doi.org/10.1007/s00605-015-0774-z
13. Di Piazza L., Marraffa V., Satco B. Closure properties for integral problems driven by regulated functions via convergence results, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 466, issue 1, pp. 690–710. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.012
14. Banaś J., Zając T. On a measure of noncompactness in the space of regulated functions and its applications, *Advances in Nonlinear Analysis*, 2019, vol. 8, issue 1, pp. 1099–1110. https://doi.org/10.1515/anona-2018-0024
15. Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 476, issue 2, pp. 860–874. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.024
16. Olszowy L., Zając T. Some inequalities and superposition operator in the space of regulated functions, *Advances in Nonlinear Analysis*, 2020, vol. 9, issue 1, pp. 1278–1290. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0050
17. Cichoń M., Cichoń K., Satco B. Measure differential inclusions through selection principles in the space of regulated functions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2018, vol. 15, issue 4, article number: 148. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1192-y
18. Estrada R. The set of singularities of regulated functions in several variables, *Collectanea Mathematica*, 2012, vol. 63, issue 3, pp. 351–359. https://doi.org/10.1007/s13348-011-0042-z
19. Yang Y., Estrada R. The dual of the space of regulated functions in several variables, *Sarajevo Journal of Mathematics*, 2013, vol. 9 (22), issue 2, pp. 197–216. https://doi.org/10.5644/SJM.09.2.05
20. Kudryavtsev L. D. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 2* (A course in mathematical analysis. Vol. 2), Moscow: Vysshaya Shkola, 1988.

Received 21.02.2023

Accepted 10.08.2023

Viktor Nikolaevich Baranov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: v.n.baranov@gmail.com

Vitalii Ivanovich Rodionov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Alla Grigor'evna Rodionova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: alla041054@yandex.ru

Citation: V. N. Baranov, V. I. Rodionov, A. G. Rodionova. On Banach spaces of regulated functions of several variables. An analogue of the Riemann integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 387–401.