МЕХАНИКА 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 298–318.

УДК 531.38

 А. В. Зыза, Т. В. Хомяк, Е. С. Платонова

НОВЫЕ КЛАССЫ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА

В статье исследованы условия существования двух новых классов полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Общая особенность структуры этих классов заключается в том, что функции, задающие инвариантные соотношения для компонент единичного вектора оси симметрии действующих силовых полей, являются либо рациональными функциями от первой компоненты указанного вектора, либо от вспомогательной переменной. Построены три новых частных решения рассматриваемых полиномиальных классов. Эти решения описываются функциями, полученными обращением гиперэллиптических интегралов. Доказано, что еще одно построенное решение исследуемых полиномиальных структур, для которого движение гиростата обладает свойством прецессионности, является частным случаем известного решения.

Ключевые слова: уравнения Кирхгофа–Пуассона, эффект Барнетта–Лондона, гиростат, полиномиальное решение, инвариантное соотношение.

DOI: 10.35634/vm220209

Введение

Классическая задача о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [1, 2] не только имеет многочисленные обобщения в динамике твердого тела [3], но и стала уникальной фундаментальной частью аналитической механики для формирования новых теоретических и практических направлений исследования механических систем.

Система связанных твердых тел, моделируемая гиростатом, является важной в аналитической механике, поскольку она используется во многих задачах динамики сложных механических объектов (роботов, манипуляторов, спутников).

Постановка задачи о движении гиростата впервые рассматривалась в работах [4–7]. В монографии [8] гиростат характеризуется как система связанных твердых тел, распределение масс которой не изменяется с течением времени. В. В. Румянцев [9] и П. В Харламов [10] обобщили данное понятие и рассматривали случай, когда несомые тела динамически симметричны относительно своих осей вращения. Динамика гиростата изучается во многих задачах механики, которые являются обобщениями классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Поскольку дифференциальные уравнения, описывающие движение гиростата, не интегрируемы в квадратурах, то в научных публикациях применяется метод инвариантных соотношений Т. Леви-Чивиты [8] и П. В. Харламова [11]. Этот метод используется, например, в статьях [12–16].

Большое число работ посвящено исследованию движений спутника-гиростата, в которых применяются различные подходы и методы. В статьях А. В. Дорошина [17,18] рассмотрена динамика космического аппарата (гиростата с одним ротором) в постоянном магнитном поле при наличии собственного магнитного дипольного момента. В. С. Асланов [19] обратил внимание на некоторые особенности статей А. В. Дорошина. Статья [20] посвящена изучению регулярных прецессий намагниченного спутника-гиростата в гравитационном и магнитном полях. Следует отметить, что в некоторых работах (см. например, [21]) применяются и приближенные методы исследования исходных дифференциальных уравнений. В статьях Х. М. Яхьи и его учеников [22–25] рассматриваются не только условия существования первых интегралов уравнений движения твердого тела и гиростата, но и устанавливаются аналоги решений В. А. Стеклова, Д. К. Бобылева и А. И. Докшевича, полученных в классической задаче. Примером использования приближенных методов (Боголюбова–Крылова–Митропольского) может служить статья [26]; примером, в котором применяется теория эллиптических функций для интегрирования уравнений движения спутника-гиростата, — статья [27]. Хаотические движения свободного гиростата рассматриваются в статье [28].

Одним из обобщений классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [29–31], применение которой обусловлено усовершенствованием широко используемых в современной технике бесконтактных подвесов быстровращающихся гироскопов, конструированием высокоскоростных поездов и созданием приборов, работающих в сильных магнитных полях.

Математической моделью задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона является система из шести дифференциальных уравнений, содержащая двадцать параметров, которая допускает только два первых интеграла [3]. Задача Коши для этих дифференциальных уравнений имеет решение, но получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно, так как при произвольных значениях параметров уравнения такого движения, как и уравнения класса Кирхгофа, не интегрируемы в квадратурах по Якоби [32]. Поскольку интеграл энергии для системы дифференциальных уравнений такой задачи отсутствует, то наличие дополнительного интеграла, исключая случаи В. А. Самсонова [33] и В. В. Козлова [34], полученного при определенных условиях на параметры задачи, также не позволяет получить решение в квадратурах. Поэтому изучение свойств движения гиростата с неподвижной точкой может быть основано на построении частных решений [35, 36]. Возможность построения частных решений уравнений динамики твердого тела связана с тем, что благодаря применению теоремы Пуансо [2] к исследованию движения тела, появилась возможность классификации движений тела единым методом. С математической точки зрения важность такого подхода состоит в том, что появилась перспектива исследования окрестности частных решений. При помощи теории возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений и первого метода Ляпунова можно изучить свойства интегральных многообразий уравнений динамики твердого тела, в частности, обнаружить либо хаотический, либо регулярный характер в поведении интегральных траекторий.

В задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона построено определенное количество частных решений различной полиномиальной структуры [37–39]. Отметим и решения, которые имеют отличие от перечисленных выше (см., например, [40]).

Данная статья посвящена изучению условий существования двух новых классов полиномиальных решений рассматриваемой выше задачи. Для одного класса таких решений исследования проводились в случае, когда вектор гиростатического момента и вектор обобщенного центра масс находились на одной главной оси эллипсоида инерции для неподвижной точки. Условия существования частных решений другого класса изучались, когда указанные векторы лежали в одной главной плоскости эллипсоида инерции. В работе построено три новых частных решения, которые описываются гиперэллиптическими функциями времени. Показано, что для найденного четвертого решения исследуемых полиномиальных структур движение гиростата обладает свойством прецессионности и описывается частным случаем решения А. В. Мазнева, указанного в [3].

§ 1. Постановка задачи. Преобразование уравнений движения гиростата. Структура новых классов полиномиальных решений

Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Как известно, при вращении в магнитном поле нейтральный ферромагнетик становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта [29, 31]). Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{B} = B \cdot \boldsymbol{\omega}$, где B — симметричный тензор третьего порядка). Эффект Лондона [30, 31] относится к явлению, имеющему место при вращении ненамагниченного сверхпроводящего твердого тела в магнитном поле. В обоих случаях механизм намагничивания обусловлен различными физическими причинами, но формулы для магнитного момента у них одинаковы. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремится к направлению вектора напряженности магнитного поля, что приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля.

При математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, обусловленный эффектом Барнетта–Лондона. Это обстоятельство приводит к тому, что уравнения такого движения, в отличие от уравнений Эйлера–Пуассона классической задачи динамики [1, 2] и уравнений класса Кирхгофа, не допускают интеграл энергии из-за диссипации энергии: «перекачки» энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения гиростата. Поэтому для интегрирования дифференциальных уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона недостаточно построить дополнительный первый интеграл.

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона в векторном виде таковы [3, 33, 34, 37]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1.1}$$

Эти уравнения допускают только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \kappa_0. \tag{1.2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением:

$$\left[\frac{1}{2}(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\right]^{\bullet} = (B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) обозначения таковы:

$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ — угловая скорость гиростата;

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — орт, характеризующий направление магнитного поля;

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ — гиростатический момент;

$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, 0)$ — вектор обобщенного центра масс;

$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке;

матрица $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ характеризует магнитный момент гиростата $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$;

$C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$ — матрица, характеризующая ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром;

κ_0 — постоянная интеграла площадей;

точка над переменными обозначает относительную производную.

Отметим, что уравнения (1.1)–(1.3) рассматриваются в случае, когда векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{s}$ лежат в главной плоскости эллипсоида инерции гиростата.

Если для динамического уравнения из системы (1.1) имеет место равенство $B = \gamma^* \cdot E$ (E — единичная матрица, γ^* — некоторый параметр), то из соотношения (1.3) вытекает интеграл энергии для уравнения движения гиростата (1.1). Тогда уравнения (1.1) по своей структуре будут совпадать с уравнениями задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [3] и относится к уравнениям класса Кирхгофа. То есть в этом случае полученные для уравнений (1.1) результаты следует сопоставлять с результатами [3].

Запишем уравнения (1.1) и первые интегралы (1.2) в скалярном виде:

$$\begin{cases} A_1\dot{p} = (A_2 - A_3)qr + B_2 q\nu_3 - B_3 r\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 + \lambda_2 r + s_2\nu_3, \\ A_2\dot{q} = (A_3 - A_1)pr + B_3 r\nu_1 - B_1 p\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 - \lambda_1 r - s_1\nu_3, \\ A_3\dot{r} = (A_1 - A_2)pq + B_1 p\nu_2 - B_2 q\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \lambda_1 q - \lambda_2 p + s_1\nu_2 - s_2\nu_1; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \tag{1.5}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \qquad (A_1 p + \lambda_1)\nu_1 + (A_2 q + \lambda_2)\nu_2 + A_3 r\nu_3 = \kappa_0. \tag{1.6}$$

Поставим задачу об исследовании условий существования для уравнений (1.4), (1.5) двух новых классов частных решений полиномиальной структуры.

Первый полиномиальный класс решений существует при условиях $\lambda_2 = 0$, $s_2 = 0$ и имеет вид:

$$\begin{gathered} q^2 = Q(p) = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i, \qquad r^2 = R(p) = \sum_{j=0}^{m} c_j p^j, \\ \nu_1 = \varphi(p) = \sum_{k=0}^{l} a_k p^k, \qquad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p^2}\sqrt{Q(p)}, \qquad \nu_3 = \frac{æ(p)}{p}\sqrt{R(p)}, \\ \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \qquad æ(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где n, m, l, n_1, m_1 — целые неотрицательные числа; b_i, c_j, a_k, g_i, f_j — параметры, подлежащие определению. Если для свободного члена полинома $\psi(p)$ выполнено $g_0 \neq 0$, то указанный в (1.7) класс решений является обобщением класса полиномиальных решений, изучаемого в [37].

Если же для многочленов $\psi(p), æ(p)$ из (1.7) имеют место условия $g_0^2 + f_0^2 = 0$ и $g_1 = 0$, то указанным классом описываются обобщенные частными решениями полиномиальной структуры В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева решения классической задачи динамики твердого тела с неподвижной точкой [2] и решения обобщенных уравнений Н. Ковалевского рассматриваемой задачи [38].

Второй полиномиальный класс частных решений таков:

$$p = \sigma^3, \qquad q = \widetilde{Q}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\widetilde{n}} \widetilde{b}_k \sigma^k, \qquad r^2 = \widetilde{R}(\sigma) = \sum_{i=0}^{\widetilde{m}} \widetilde{c}_i \sigma^i,$$
$$\nu_1 = \widetilde{\varphi}(\sigma) = \sum_{j=0}^{\widetilde{l}} \widetilde{a}_j \sigma^j, \qquad \nu_2 = \widetilde{\psi}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\widetilde{n}_1} \widetilde{g}_k \sigma^k, \qquad \nu_3 = \frac{\widetilde{æ}(\sigma)}{\sigma}\sqrt{\widetilde{R}(\sigma)}, \tag{1.8}$$
$$\widetilde{æ}(\sigma) = \sum_{i=0}^{\widetilde{m}_1} \widetilde{f}_i \sigma^i.$$

Здесь $\widetilde{n}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{l}$, $\widetilde{n}_1$ — натуральные числа или нули; $\widetilde{b}_k$, $\widetilde{c}_i$, $\widetilde{a}_j$, $\widetilde{g}_k$, $\widetilde{f}_i$ — неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Рассматриваемый в (1.8) класс решений имеет одинаковую полиномиальную структуру по вспомогательной переменной с классом частных решений работ [37, 39], в которых она задается в виде квадратного корня из первой компоненты вектора угловой скорости гиростата, а в решении (1.8) — кубическим корнем из указанной компоненты вектора.

§ 2. Новые решения первого полиномиального класса (1.7) дифференциальных уравнений (1.4), (1.5)

Подставим выражения (1.7) в уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона (1.4), (1.5) и геометрический интеграл из (1.6):

$$\dot{p} = \Omega(p)(p^2\varphi'(p))^{-1}\sqrt{Q(p)R(p)}, \quad \Omega(p) = \psi(p) - p\,æ(p); \tag{2.1}$$
$$\begin{cases} \left(Q(p)\psi^2(p)p^{-4}\right)'\Omega(p) = 2\varphi'(p)\psi(p)(æ(p) - \varphi(p)), \\ \left(R(p)æ^2(p)p^{-2}\right)'\Omega(p) = 2\varphi'(p)æ(p)(p\varphi(p) - \psi(p)); \end{cases} \tag{2.2}$$
$$A_1\Omega(p)p = \varphi'(p)\left[(C_3 - C_2)\psi(p)æ(p) + (B_2pæ(p) - B_3\psi(p))p + (A_2 - A_3)p^3\right]; \tag{2.3}$$
$$\begin{cases} A_2Q'(p)\Omega(p) = 2\varphi'(p)p\left[(C_1 - C_3)\varphi(p)æ(p) - æ(p)(B_1p + s_1) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + (B_3\varphi(p) - \lambda_1)p + (A_3 - A_1)p^2\right], \\ A_3R'(p)\Omega(p) = 2\varphi'(p)\left[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_1p + s_1) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - (B_2\varphi(p) - \lambda_1)p^2 + (A_1 - A_2)p^3\right]; \end{cases} \tag{2.4}$$
$$(\varphi^2(p) - 1)p^4 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)æ^2(p)p^2 = 0. \tag{2.5}$$

В уравнениях (2.1)–(2.4) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной p. После нахождения функций $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $æ(p)$ зависимость $p = p(t)$ устанавливается из дифференциального уравнения (2.1).

Одной из первоочередных задач дальнейшего исследования является оценка значений максимальных степеней многочленов $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $æ(p)$ в решении (1.7). Эта задача решается путем рассмотрения редуцированных уравнений (2.2)–(2.4) в виде многочленов правой и левой частей этих уравнений и требованием равенства максимальных степеней данных полиномов.

В результате такой оценки и анализа установлен один важный для динамики твердого тела вариант значений степеней полиномов решения (1.7).

Полагая $\deg Q = n$, $\deg R = m$, $\deg\varphi = l$, $\deg\psi = n_1$, $\deg æ = m_1$, укажем этот случай:

$$n = 6,\ m = 6,\ l = 3,\ n_1 = 2,\ m_1 = 1. \tag{2.6}$$

Следующий этап исследования — это изучение варианта (2.6) при условии $g_0 \neq 0$.

Для него полиномы решения (1.7) имеют вид

$$
\begin{gathered}
Q(p) = b_6p^6 + b_5p^5 + b_4p^4 + b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0,\\
R(p) = c_6p^6 + c_5p^5 + c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0,\\
\varphi(p) = a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0, \qquad \psi(p) = g_2p^2 + g_1p + g_0, \qquad æ(p) = f_1p + f_0.
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

Подставим многочлены $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $æ(p)$ из (2.7) в динамическое уравнение (2.3). Полученное равенство может быть тождеством по p при $a_1 \neq 0$, например, при выполнении условий

$$
\begin{gathered}
(\alpha g_2 + B_2)f_1 - B_3g_2 + A_2 - A_3 = 0, \quad \alpha(g_1f_1 + g_2f_0) + B_2f_0 - B_3g_1 = 0,\\
\alpha = C_3 - C_2.
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Тогда, в силу (2.8), динамическое уравнение (2.3) упрощается

$$
\begin{gathered}
\Omega(p) = \varphi'(p)(A_1p)^{-1}(d_1p + d_0),\\
d_1 = \alpha(g_0f_1 + g_1f_0) - B_3g_0, \quad d_0 = \alpha g_0f_0.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Соотношение (2.9) позволяет упростить другие уравнения исследуемой системы. Сначала исключим функцию $\Omega(p)$ из уравнений (2.2), (2.4). Затем подставим в упрощенные уравнения, в уравнение (2.9) и в геометрический интеграл (2.5) полиномы из (2.7). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (1.7), (2.7):

$$
\begin{gathered}
A_1(g_2 - f_1) - 3a_3d_1 = 0, \quad A_1(g_1 - f_0) - 2a_2d_1 - 3a_3d_0 = 0, \quad a_1d_0 = 0,\\
A_1g_0 - a_1d_1 - 2a_2d_0 = 0, \quad 3b_6g_2d_1 + A_1a_3 = 0,\\
6b_6g_2d_0 + (4b_6g_1 + 5b_5g_2)d_1 + 2A_1a_2 = 0,\\
(4b_6g_1 + 5b_5g_2)d_0 + (2b_6g_0 + 3b_5g_1 + 4b_4g_2)d_1 + 2A_1(a_1 - f_1) = 0,\\
(2b_6g_0 + 3b_5g_1 + 4b_4g_2)d_0 + (b_5g_0 + 2b_4g_1 + 3b_3g_2)d_1 + 2A_1(a_0 - f_0) = 0,\\
(b_5g_0 + 2b_4g_1 + 3b_3g_2)d_0 + (b_3g_1 + 2b_2g_2)d_1 = 0, \quad b_0g_0d_0 = 0,\\
(b_3g_1 + 2b_2g_2)d_0 + (-b_3g_0 + b_1g_2)d_1 = 0, \quad (b_3g_0 - b_1g_2)d_0 + (2b_2g_0 + b_1g_1)d_1 = 0,\\
(2b_2g_0 + b_1g_1)d_0 + (3b_1g_0 + 2b_0g_1)d_1 = 0, \quad (3b_1g_0 + 2b_0g_1)d_0 + 4b_0g_0d_1 = 0,\\
3c_6f_1d_1 - A_1a_3 = 0, \quad 6c_6f_1d_0 + (4c_6f_0 + 5c_5f_1)d_1 - 2A_1a_2 = 0,\\
(4c_6f_0 + 5c_5f_1)d_0 + (3c_5f_0 + 4c_4f_1)d_1 + 2A_1(g_2 - a_1) = 0,\\
(3c_5f_0 + 4c_4f_1)d_0 + (2c_4f_0 + 3c_3f_1)d_1 + 2A_1(g_1 - a_0) = 0,\\
(2c_4f_0 + 3c_3f_1)d_0 + (c_3f_0 + 2c_2f_1)d_1 + 2A_1g_0 = 0, \quad (c_3f_0 + 2c_2f_1)d_0 + c_1f_1d_1 = 0,\\
c_1(f_1d_0 - f_0d_1) = 0, \quad f_0(c_1d_0 + 2c_0d_1) = 0, \quad c_0f_0d_0 = 0, \quad \beta = C_1 - C_3,\\
3b_6A_2d_1 - A_1(B_3 + \beta f_1)a_3 = 0, \quad A_2(6b_6\, d_0 + 5b_5d_1) - 2A_1\left(\beta(a_3f_0 + a_2f_1) + a_2B_3\right) = 0,\\
A_2(5b_5d_0 + 4b_4d_1) - 2A_1\left(\beta(a_2f_0 + a_1f_1) + a_1B_3 - f_1B_1 + A_3 - A_1\right) = 0,\\
A_2(4b_4d_0 + 3b_3d_1) - 2A_1\left(\beta(a_1f_0 + a_0f_1) + a_0B_3 - f_0B_1 - f_1s_1 - \lambda_1\right) = 0,\\
A_2(3b_3d_0 + 2b_2d_1) - 2A_1(\beta a_0 - s_1)f_0 = 0, \qquad 2b_2d_0 + b_1d_1 = 0, \qquad b_1d_0 = 0,\\
3c_6A_3d_1 + A_1\left((\alpha + \beta)g_2 + B_2\right)a_3 = 0,\\
A_3(6c_6d_0 + 5c_5d_1) + 2A_1\left((\alpha + \beta)(a_3g_1 + a_2g_2) + a_2B_2\right) = 0,\\
A_3(5c_5d_0 + 4c_4d_1) + 2A_1\left((\alpha + \beta)(a_3g_0 + a_2g_1 + a_1g_2) + a_1B_2 - g_2B_1 + A_2 - A_1\right) = 0,\\
A_3(4c_4d_0 + 3c_3d_1) + 2A_1\left((\alpha + \beta)(a_2g_0 + a_1g_1 + a_0g_2) + a_0B_2 - g_1B_1 - g_2s_1 - \lambda_1\right) = 0,\\
A_3(3c_3d_0 + 2c_2d_1) + 2A_1\left((\alpha + \beta)(a_1g_0 + a_0g_1) - g_0B_1 - g_1s_1\right) = 0,\\
A_3(2c_2d_0 + c_1d_1) + 2A_1\left((\alpha + \beta)a_0 - s_1\right)g_0 = 0, \qquad c_1d_0 = 0,\\
(b_4g_0 + 2b_3g_1)g_0 + b_2(2g_2g_0 + g_1^2) + (2b_1g_1 + b_0g_2)g_2 + (c_2f_0 + 2c_1f_1)f_0 + c_0f_1^2 + a_0^2 = 1.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Исследуем условия разрешимости системы (2.8), (2.10).

Случай 1. Пусть в системе алгебраических уравнений (2.8), (2.10) $f_0 \neq 0$. Тогда указанная система уравнений совместна относительно ненулевых параметров A_3, B_3. Обозначая $A_3 = a$, $B_3 = b$ $(a > 0,\ b > 0)$, запишем значения параметров рассматриваемой задачи и решение (1.7), (2.7):

$$
\begin{gathered}
A_1 = \frac{5}{3}a, \qquad A_2 = A_3 = a, \qquad B_1 = \frac{13}{5}b, \qquad B_2 = -2b, \qquad B_3 = b, \\
C_2 = C_3, \qquad C_1 - C_3 = -\frac{12}{25}\frac{b^2}{a}, \qquad \eta = \sqrt{1110}, \\
\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{\eta}{185}b, 0, 0\right), \qquad \boldsymbol{s} = \left(\frac{24\eta}{925}\frac{b^2}{a}, 0, 0\right);
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{gathered}
q = p^2\sqrt{Q^*(p)}\frac{a}{b}, \qquad r = p\sqrt{R^*(p)}, \\
Q^*(p) = -\frac{855625a^2}{69984b^2}p^2 + \frac{4625\eta a}{116640b}p + \frac{6475}{1296}, \\
R^*(p) = -\frac{855625a^4}{34992b^4}p^4 + \frac{4625\eta a^3}{5832b^3}p^3 + \frac{4625a^2}{216b^2}p^2 - \frac{5\eta a}{18b}p - 3, \\
\nu_1 = -\frac{4625a^3}{648b^3}p^3 + \frac{25\eta a^2}{72b^2}p^2 - \frac{5a}{3b}p - \frac{2\eta}{37}, \\
\nu_2 = \left(-\frac{5a^2}{3b^2}p^2 + \frac{2\eta a}{37b}p - \frac{36}{185}\right)\sqrt{Q^*(p)}, \\
\nu_3 = \left(\frac{5a}{6b}p - \frac{\eta}{37}\right)\sqrt{R^*(p)}.
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

Зависимость $p = p(t)$ найдем из (2.1)

$$
\dot{p} = \frac{108b}{925a}p\sqrt{Q^*(p)R^*(p)},
\tag{2.13}
$$

при

$$
p \in \left(-\frac{593}{2000}\frac{b}{a}; -\frac{479}{2000}\frac{b}{a}\right) \cup \left(\frac{27}{50}\frac{b}{a}; \frac{3\sqrt{74}\,(6+\sqrt{15})\,b}{185a}\right).
$$

На указанных интервалах подкоренные функции $Q^*(p)$, $R^*(p)$ принимают положительные значения. Следовательно, действительность решения (2.12), (2.13) уравнений (1.4), (1.5) с параметрами задачи из (2.11) установлена.

В построенном решении (2.11)–(2.13) присутствуют положительные произвольные параметры a и b. Это решение описывается функциями времени, полученными в результате обращения гиперэллиптического интеграла, вытекающего из (2.13).

Случай 2. Пусть теперь в системе уравнений (2.8), (2.10) $f_0 = 0$. Считая независимыми ненулевые параметры A_1, A_3, B_2, B_3, g_0, запишем решение этой системы:

$$
\begin{gathered}
b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_5 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \\
b_6 = -\frac{2\xi_2\xi_3A_1^2}{3(g_0\xi_5B_2)^2}, \qquad c_6 = -\frac{2\xi_2\xi_3^2A_1^2}{3(g_0B_2)^2\xi_5^3}, \\
b_4 = -\frac{\xi_1\xi_3A_1}{g_0\xi_5B_2A_3}, \qquad c_4 = -\frac{\xi_3^2(3A_1 - 5A_3)A_1}{g_0\xi_5^2B_2A_3}, \qquad c_2 = \frac{3\xi_3\xi_4}{\xi_5A_3}, \\
c_0 = \frac{9(\xi_5B_2A_3 + \xi_1\xi_3g_0A_1)\xi_4^2B_2}{\xi_5A_1^2A_3^3}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_0 = 0,
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

$$a_3 = \frac{2\xi_2\xi_3 A_1^2 A_3}{3\xi_4\xi_5^2 g_0 B_2^2}, \qquad a_1 = \frac{\xi_3 A_1}{\xi_5 B_2}, \qquad g_2 = \frac{\xi_3 A_1 A_3}{3\xi_4\xi_5 B_2}, \qquad g_1 = 0,$$
$$f_1 = -\frac{A_1 A_3}{3\xi_4 B_2}, \qquad A_2 = A_3, \qquad B_1 = \frac{3\xi_4(5A_1 - 8A_3)B_2}{A_1 A_3}, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad s_1 = 0,$$
$$\alpha = -\frac{3(\xi_5 B_2 + \xi_3 B_3)\xi_4 B_2}{\xi_3 A_1 A_3}, \qquad \beta = \frac{3(3\xi_4\xi_5 B_2 + \xi_3 B_3 A_1)\xi_4 B_2}{\xi_3 A_1^2 A_3}.$$

Здесь

$$\xi_1 = A_1 - A_3, \quad \xi_2 = A_1 - 2A_3, \quad \xi_3 = A_1 - 3A_3, \quad \xi_4 = 2A_1 - 3A_3, \quad \xi_5 = 5A_1 - 9A_3.$$

Решение (1.7), (2.7) при условиях (2.14) будет действительным, например, при выполнении неравенств

$$b_4 > 0, \qquad c_0 > 0. \tag{2.15}$$

Зависимость p от времени получим из дифференциального уравнения (2.1)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d_1}{A_1 p^2}\sqrt{Q(p)R(p)}, \qquad d_1 = \frac{\xi_5 g_0 B_2}{\xi_3}. \tag{2.16}$$

Рассмотрим числовой пример решения (1.7), (2.7), (2.14), (2.16) при условиях (2.15). Пусть

$$A_1 = \frac{31}{20}a, \quad A_3 = a, \quad B_2 = -\frac{31}{30}b, \quad B_3 = 3b, \quad g_0 = \frac{b}{a}, \quad (a > 0,\ b > 0). \tag{2.17}$$

Тогда из (1.7), (2.7), (2.14), (2.16) получим:

$$A_2 = a, \quad B_1 = \frac{b}{20}, \quad \alpha = C_3 - C_2 = \frac{367b^2}{870a}, \quad \beta = C_1 - C_3 = -\frac{82b^2}{145a}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{s} = \mathbf{0}; \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered} q = p^2\sqrt{\hat{Q}(p)}\frac{a}{b}, \qquad r = \sqrt{R(p)}, \\ \hat{Q}(p) = -\frac{783a^2}{1250b^2}p^2 + \frac{957}{1000}, \\ R(p) = -\frac{22707a^4}{31250b^4}p^6 - \frac{17661a^2}{25000b^2}p^4 + \frac{87}{250}p^2 + \frac{43b^2}{25000a^2}, \\ \nu_1 = \frac{783a^3}{125b^3}p^3 - \frac{87a}{50b}p, \qquad \nu_2 = \left(-\frac{29a^2}{5b^2}p^2 + 1\right)\sqrt{\hat{Q}(p)}, \qquad \nu_3 = \frac{5a}{b}\sqrt{R(p)}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{50b}{87a}\sqrt{\hat{Q}(p)R(p)}. \tag{2.20}$$

Построенное решение (2.19), (2.20) с параметрами задачи из (2.17), (2.18) зависит от двух положительных параметров a, b и описывается гиперэллиптическими функциями времени.

Действительность решения (2.17)–(2.20) вытекает из того, что подкоренные функции $\hat{Q}(p)$ и $R(p)$ из (2.20) при $p = 0$ принимают положительные значения. После того как функция $p = p(t)$ будет найдена, из (2.19) получим зависимость всех переменных задачи от времени.

Полиномиальное решение (2.17)–(2.20) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением $r - f_1^{-1}\nu_3 = 0$, на котором производная в силу уравнений (1.4), (1.5) тождественно не обращается в ноль.

Тем самым для варианта (2.6) значений максимальных степеней полиномов решения (1.7) построены два новых частных решения задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта—Лондона.

Одно новое решение (2.11)–(2.13) содержит два независимых параметра A_3, B_3 и описывается функциями, полученными обращением гиперэллиптического интеграла.

Другое решение (1.7), (2.7), (2.14)–(2.16) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением, содержит пять независимых параметров A_1, A_3, B_2, B_3, g_0 и выражается через гиперэллиптические функции времени.

§ 3. Частные решения второго полиномиального класса (1.8) уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона (1.4), (1.5)

Исследуем условия существования частных решений полиномиальной структуры вида (1.8) у дифференциальных уравнений (1.4), (1.5). Преобразуем эти уравнения и первые интегралы (1.6), подставив в них выражения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ из (1.8). Имеем

$$\dot{\sigma} = \frac{P(\sigma)}{\psi'(\sigma)}\sqrt{\widetilde{R}(\sigma)}, \qquad P(\sigma) = \sigma^2\widetilde{æ}(\sigma) - \widetilde{\varphi}(\sigma); \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}'(\sigma)\left(\sigma\widetilde{\psi}(\sigma) - \widetilde{Q}(\sigma)\widetilde{æ}(\sigma)\right) = \widetilde{\varphi}'(\sigma)P(\sigma)\sigma, \\ \left(\widetilde{R}(\sigma)\widetilde{æ}^2(\sigma)\sigma^{-2}\right)' P(\sigma)\sigma = 2\widetilde{\psi}'(\sigma)\widetilde{æ}(\sigma)\left(\widetilde{Q}(\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma) - \sigma^3\widetilde{\psi}(\sigma)\right); \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} 3A_1\sigma^3P(\sigma) = \widetilde{\psi}'(\sigma)\Big\{\widetilde{æ}(\sigma)\Big[(C_3 - C_2)\widetilde{\psi}(\sigma) + B_2\widetilde{Q}(\sigma) + s_2\Big] + \\ \qquad +(A_2 - A_3)\widetilde{Q}(\sigma)\sigma - B_3\widetilde{\psi}(\sigma)\sigma + \lambda_2\sigma\Big\}, \\ A_2\widetilde{Q}'(\sigma)P(\sigma)\sigma = \widetilde{\psi}'(\sigma)\{\widetilde{æ}(\sigma)[(C_1 - C_3)\widetilde{\varphi}(\sigma) - B_1\sigma^3 - s_1] + \\ \qquad +(A_3 - A_1)\sigma^4 + B_3\widetilde{\varphi}(\sigma)\sigma - \lambda_1\sigma\}, \\ A_3\widetilde{R}'(\sigma)P(\sigma) = 2\widetilde{\psi}'(\sigma)\Big\{\widetilde{\psi}(\sigma)[(C_2 - C_1)\widetilde{\varphi}(\sigma) + B_1\sigma^3 + s_1] + \\ \qquad +\widetilde{Q}(\sigma)\{-B_2\widetilde{\varphi}(\sigma) + (A_1 - A_2)\sigma^3 + \lambda_1\} - \lambda_2\sigma^3 - s_2\widetilde{\varphi}(\sigma)\Big\}; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} \left(\widetilde{\varphi}^2(\sigma) + \widetilde{\psi}^2(\sigma) - 1\right)\sigma^2 + \widetilde{R}(\sigma)\widetilde{æ}^2(\sigma) = 0, \\ (A_1\sigma^3 + \lambda_1)\widetilde{\varphi}(\sigma)\sigma + (A_2\widetilde{Q}(\sigma) + \lambda_2)\widetilde{\psi}(\sigma)\sigma + A_3\widetilde{R}(\sigma)\widetilde{æ}(\sigma) = \kappa_0\sigma. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Анализ значений максимальных степеней полиномов решения (1.8) дает два возможных варианта. Считая $\deg\widetilde{Q} = \widetilde{n}$, $\deg\widetilde{R} = \widetilde{m}$, $\deg\widetilde{\varphi} = \widetilde{l}$, $\deg\widetilde{\psi} = \widetilde{n}_1$, $\deg\widetilde{æ} = \widetilde{m}_1$, укажем эти варианты:

$$\textbf{1.}\ \widetilde{n} = 3,\ \widetilde{m} = 6,\ \widetilde{l} = 2,\ \widetilde{n}_1 = 3,\ \widetilde{m}_1 = 1; \tag{3.5}$$

$$\textbf{2.}\ \widetilde{n} = 3,\ \widetilde{m} = 6,\ \widetilde{l} = 2,\ \widetilde{n}_1 = 2,\ \widetilde{m}_1 = 0. \tag{3.6}$$

Изучим вариант (3.5). Будем считать, что функции, задающие инвариантные соотношения в (1.8), таковы

$$\widetilde{Q}(\sigma)=\widetilde{b}_3\sigma^3+\widetilde{b}_2\sigma^2+\widetilde{b}_1\sigma+\widetilde{b}_0,$$
$$\widetilde{R}(\sigma)=\widetilde{c}_6\sigma^6+\widetilde{c}_5\sigma^5+\widetilde{c}_4\sigma^4+\widetilde{c}_3\sigma^3+\widetilde{c}_2\sigma^2+\widetilde{c}_1\sigma+\widetilde{c}_0, \tag{3.7}$$
$$\widetilde{\varphi}(\sigma)=\widetilde{a}_2\sigma^2+\widetilde{a}_1\sigma+\widetilde{a}_0,\quad \widetilde{\psi}(\sigma)=\widetilde{g}_3\sigma^3+\widetilde{g}_2\sigma^2+\widetilde{g}_1\sigma+\widetilde{g}_0,\quad \widetilde{\ae}(\sigma)=\widetilde{f}_1\sigma+\widetilde{f}_0.$$

Подставим многочлены из (3.7) в уравнения (3.2), (3.3), геометрический интеграл из (3.4) и потребуем их тождественность при всех σ. Получим условия на параметры рассматриваемой задачи и коэффициенты полиномов (3.7), записанные в виде системы алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
A_2=A_3,\qquad (\alpha\widetilde{g}_1+B_2\widetilde{b}_1)\widetilde{f}_1-B_3\widetilde{g}_1=0,\\
(\alpha\widetilde{g}_0+B_2\widetilde{b}_0+s_2)\widetilde{f}_1-B_3\widetilde{g}_1+\lambda_2=0,\qquad A_1\widetilde{f}_1-\widetilde{g}_3\widetilde{d}_1=0,\\
\widetilde{g}_1\widetilde{d}_0+3A_1\widetilde{a}_0=0,\qquad 2\widetilde{g}_2\widetilde{d}_0+\widetilde{g}_1\widetilde{d}_1+3A_1\widetilde{a}_1=0,\\
3\widetilde{g}_3\widetilde{d}_0+2\widetilde{g}_2\widetilde{d}_1+3A_1\widetilde{a}_2=0,\qquad \widetilde{g}_3-\widetilde{b}_3\widetilde{f}_1=0,\\
3A_1(\widetilde{g}_2-\widetilde{b}_2\widetilde{f}_1)-2\widetilde{a}_2\widetilde{d}_1=0,\qquad 3A_1(\widetilde{g}_1-\widetilde{b}_1\widetilde{f}_1)-2\widetilde{a}_2\widetilde{d}_0-\widetilde{a}_1\widetilde{d}_1=0,\\
3A_1(\widetilde{g}_0-\widetilde{b}_0\widetilde{f}_1)-\widetilde{a}_1\widetilde{d}_0=0,\qquad \widetilde{c}_6\widetilde{f}_1\widetilde{d}_1+A_1\widetilde{g}_3=0,\\
6\widetilde{c}_6\widetilde{f}_1\widetilde{d}_0+5\widetilde{c}_5\widetilde{d}_1\widetilde{f}_1-6A_1(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_2-\widetilde{g}_2)=0,\\
\widetilde{f}_1(5\widetilde{c}_5\widetilde{d}_0+4\widetilde{c}_4\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_1+\widetilde{b}_2\widetilde{a}_2-\widetilde{g}_1)=0,\\
\widetilde{f}_1(4\widetilde{c}_4\widetilde{d}_0+3\widetilde{c}_3\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_0+\widetilde{b}_2\widetilde{a}_1+\widetilde{b}_1\widetilde{a}_2-\widetilde{g}_0)=0,\\
\widetilde{f}_1(3\widetilde{c}_3\widetilde{d}_0+2\widetilde{c}_2\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{b}_2\widetilde{a}_0+\widetilde{b}_1\widetilde{a}_1+\widetilde{b}_0\widetilde{a}_2)=0,\\
\widetilde{f}_1(2\widetilde{c}_2\widetilde{d}_0+\widetilde{c}_1\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{b}_1\widetilde{a}_0+\widetilde{b}_0\widetilde{a}_1)=0,\qquad \widetilde{c}_1\widetilde{f}_1\widetilde{d}_0-6A_1\widetilde{b}_0\widetilde{a}_0=0,\qquad \widetilde{f}_0=0,\\
A_3\widetilde{b}_3\widetilde{d}_1+A_1(\Delta_3\widetilde{f}_1+\delta_3)=0,\qquad A_3(3\widetilde{b}_3\widetilde{d}_0+2\widetilde{b}_2\widetilde{d}_1)-3A_1\widetilde{a}_2(B_3+\beta\widetilde{f}_1)=0,\\
A_3(2\widetilde{b}_2\widetilde{d}_0+\widetilde{b}_1\widetilde{d}_1)-3A_1\widetilde{a}_1(B_3+\beta\widetilde{f}_1)=0,\quad A_3\widetilde{b}_1\widetilde{d}_0-3A_1\Big((\beta\widetilde{a}_0-s_1)\widetilde{f}_1+B_3\widetilde{a}_0-\lambda_1\Big)=0,\\
A_3\widetilde{c}_6\widetilde{d}_1-A_1(\widetilde{g}_3\Delta_3+\widetilde{b}_3\delta_3)=0,\quad A_3(6\widetilde{c}_6\widetilde{d}_0+5\widetilde{c}_5\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{g}_3\Delta_2+\widetilde{g}_2\Delta_3+\widetilde{b}_3\delta_2+\widetilde{b}_2\delta_3)=0,\\
A_3(5\widetilde{c}_5\widetilde{d}_0+4\widetilde{c}_4\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{g}_3\Delta_1+\widetilde{g}_2\Delta_2+\widetilde{g}_1\Delta_3+\widetilde{b}_3\delta_1+\widetilde{b}_2\delta_2+\widetilde{b}_1\delta_3)=0,\\
A_3(4\widetilde{c}_4\widetilde{d}_0+3\widetilde{c}_3\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{g}_3\Delta_0+\widetilde{g}_2\Delta_1+\widetilde{g}_1\Delta_2+\widetilde{g}_0\Delta_3+\\
+\widetilde{b}_3\delta_0+\widetilde{b}_2\delta_1+\widetilde{b}_1\delta_2+\widetilde{b}_0\delta_3-\lambda_2)=0,\\
A_3(3\widetilde{c}_3\widetilde{d}_0+2\widetilde{c}_2\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{g}_2\Delta_0+\widetilde{g}_1\Delta_1+\widetilde{g}_0\Delta_2+\widetilde{b}_2\delta_0+\widetilde{b}_1\delta_1+\widetilde{b}_0\delta_2-s_2\widetilde{a}_2)=0,\\
A_3(2\widetilde{c}_2\widetilde{d}_0+\widetilde{c}_1\widetilde{d}_1)-6A_1(\widetilde{g}_1\Delta_0+\widetilde{g}_0\Delta_1+\widetilde{b}_1\delta_0+\widetilde{b}_0\delta_1-s_2\widetilde{a}_1)=0,\\
A_3\widetilde{c}_1\widetilde{d}_0-6A_1(\widetilde{g}_0\Delta_0+\widetilde{b}_0\delta_0-s_2\widetilde{a}_0)=0,\qquad \widetilde{a}_0^2+\widetilde{g}_0^2-1+\widetilde{c}_0\widetilde{f}_1^2=0.
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\alpha=C_3-C_2,\qquad \beta=C_1-C_3,\\
\widetilde{d}_1=(\alpha\widetilde{g}_3+B_2\widetilde{b}_3)\widetilde{f}_1-B_3\widetilde{g}_3,\qquad \widetilde{d}_0=(\alpha\widetilde{g}_2+B_2\widetilde{b}_2)\widetilde{f}_1-B_3\widetilde{g}_2,\\
\Delta_3=B_1,\qquad \Delta_2=-(\alpha+\beta)\widetilde{a}_2,\qquad \Delta_1=-(\alpha+\beta)\widetilde{a}_1,\qquad \Delta_0=s_1-(\alpha+\beta)\widetilde{a}_0,\\
\delta_3=A_1-A_3,\qquad \delta_2=-B_2a_2,\qquad \delta_1=-B_2\widetilde{a}_1,\qquad \delta_0=\lambda_1-B_2\widetilde{a}_0.
\end{gathered}
$$

Запишем решение системы (3.8), считая свободными параметры A_3, B_3, $\widetilde{g}_2$, $\widetilde{b}_3$, $\widetilde{b}_0$, $\widetilde{f}_1$:

$$
\begin{gathered}
A_1=\frac{2}{3}A_3,\qquad A_2=A_3,\qquad B_1=-\frac{2A_3}{3\widetilde{f}_1},\qquad B_2=-\frac{3A_3}{2\widetilde{f}_1},\\
s_1=-\frac{2A_3\widetilde{b}_0}{3\widetilde{f}_1\widetilde{b}_3},\quad s_2=-\frac{2A_3\widetilde{b}_0}{3\widetilde{f}_1\widetilde{b}_3^2},\quad \lambda_1=\frac{2A_3\widetilde{b}_0}{3\widetilde{b}_3},\quad \lambda_2=0,\\
\alpha=\frac{3\widetilde{b}_3^2(3A_3+2\widetilde{f}_1B_3)+4A_3}{6(\widetilde{f}_1\widetilde{b}_3)^2},\quad \beta=-\frac{9\widetilde{b}_3^2(A_3+\widetilde{f}_1B_3)+4A_3}{(3\widetilde{f}_1\widetilde{b}_3)^2},\\
\widetilde{b}_2=\frac{\widetilde{g}_2(9\widetilde{b}_3^2+4)}{9\widetilde{f}_1\widetilde{b}_3^2},\quad \widetilde{b}_1=0,\\
\widetilde{c}_6=-\widetilde{b}_3^2,\qquad \widetilde{c}_5=-\frac{2\widetilde{g}_2\widetilde{b}_3}{\widetilde{f}_1},\qquad \widetilde{c}_4=-\frac{\widetilde{g}_2^2(9\widetilde{b}_3^2+4)}{(3\widetilde{f}_1\widetilde{b}_3)^2},\\
\widetilde{c}_3=-2\widetilde{b}_3\widetilde{b}_0,\qquad \widetilde{c}_2=-\frac{2\widetilde{g}_2\widetilde{b}_0}{\widetilde{f}_1},\qquad \widetilde{c}_1=0,\qquad \widetilde{c}_0=\frac{1-\widetilde{f}_1^2\widetilde{b}_0^2}{\widetilde{f}_1^2},\\
\widetilde{a}_2=-\frac{2\widetilde{g}_2}{3\widetilde{b}_3},\quad \widetilde{a}_1=0,\quad \widetilde{a}_0=0,\quad \widetilde{g}_3=\widetilde{b}_3\widetilde{f}_1,\quad \widetilde{g}_1=0,\quad \widetilde{g}_0=\widetilde{f}_1\widetilde{b}_0,\quad \widetilde{f}_0=0.
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени t установим из дифференциального уравнения (3.1)

$$
\dot{\sigma}=\frac{\sigma}{3\widetilde{b}_3}\sqrt{\widetilde{R}(\sigma)}.
\tag{3.10}
$$

Укажем числовой пример действительности решения (1.8), (3.7), (3.10) при выполнении условий (3.9).

Пусть

$$
A_3=a,\quad B_3=b,\quad \widetilde{g}_2=b,\quad \widetilde{b}_3=f,\quad \widetilde{b}_0=\frac{b}{2a},\quad \widetilde{f}_1=\frac{a}{b},\quad (a>0,\ b>0,\ f>0).
\tag{3.11}
$$

Тогда параметры задачи и решения (1.8), (3.10) таковы:

$$
\begin{gathered}
A_1=\frac{2}{3}a,\qquad A_2=a,\qquad B_1=-\frac{2}{3}b,\qquad B_2=-\frac{3}{2}b,\\
\alpha=\frac{(15f^2+4)b^2}{6af^2},\qquad \beta=-\frac{2(9f^2+2)b^2}{9af^2},\\
\boldsymbol{\lambda}=\left(\frac{b}{3f};\ 0;\ 0\right),\qquad \boldsymbol{s}=-\frac{b^2}{3af}\left(1;\ \frac{1}{f};\ 0\right);\\
p=\sigma^3,\qquad q=\widetilde{Q}(\sigma)=f\sigma^3+\frac{(9f^2+4)b^2}{9af^2}\sigma^2+\frac{b}{2a};\\
r^2=\widetilde{R}(\sigma)=-f^2\sigma^6-\frac{2fb^2}{a}\sigma^5-\frac{(9f^2+4)b^4}{(3af)^2}\sigma^4-\frac{fb}{a}\sigma^3-\frac{b^3}{a^2}\sigma^2+\frac{3b^2}{4a^2},\\
\nu_1=\widetilde{\varphi}(\sigma)=-\frac{2b}{3f}\sigma^2,\quad \nu_2=\widetilde{\psi}(\sigma)=\frac{af}{b}\sigma^3+b\sigma^2+\frac{1}{2},\quad \nu_3=\frac{a}{b}\sqrt{\widetilde{R}(\sigma)},\\
\dot{\sigma}=\frac{\sigma}{3f}\sqrt{\widetilde{R}(\sigma)}.
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

Действительность решения (3.11)–(3.12) вытекает из того, что функция $\widetilde{R}(\sigma)$ из (3.12) в точке $\sigma=0$ принимает положительное значение.

Построенное решение характеризуется тремя произвольными положительными параметрами a, b, f и описывается функциями, полученными обращением гиперэллиптического интеграла.

Это решение обладает примечательным свойством: $\sigma \to 0$ при $t \to \infty$, следовательно, в силу формул (3.12), движение гиростата асимптотически стремится к состоянию покоя.

Решение (1.8), (3.7), (3.10) характеризуется тремя линейными инвариантными соотношениями

$$p + \frac{\widetilde{g}_2}{\widetilde{a}_2\widetilde{g}_3}\nu_1 - \frac{1}{\widetilde{g}_3}\nu_2 + \frac{\widetilde{g}_0}{\widetilde{g}_{\ 3}} = 0,$$

$$q + \frac{(\widetilde{b}_3\widetilde{g}_2 - \widetilde{b}_2\widetilde{g}_3)}{\widetilde{a}_2\widetilde{g}_3}\nu_1 - \frac{\widetilde{b}_3}{\widetilde{g}_3}\nu_2 + \frac{(\widetilde{b}_3\widetilde{g}_0 - \widetilde{g}_3\widetilde{b}_0)}{\widetilde{g}_3} = 0, \qquad r - \widetilde{f}_1^{-1}\nu_3 = 0,$$

производные от которых в силу уравнений (1.4), (1.5) не обращаются тождественно в нуль на данных инвариантных соотношениях.

Изучим теперь вариант (3.6). Полиномы решения (1.8) для этого варианта таковы

$$\begin{gathered}
\widetilde{Q}(\sigma) = \widetilde{b}_3\sigma^3 + \widetilde{b}_2\sigma^2 + \widetilde{b}_1\sigma + \widetilde{b}_0, \\
\widetilde{R}(\sigma) = \widetilde{c}_6\sigma^6 + \widetilde{c}_5\sigma^5 + \widetilde{c}_4\sigma^4 + \widetilde{c}_3\sigma^3 + \widetilde{c}_2\sigma^2 + \widetilde{c}_1\sigma + \widetilde{c}_0, \\
\widetilde{\varphi}(\sigma) = \widetilde{a}_2\sigma^2 + \widetilde{a}_1\sigma + \widetilde{a}_0, \quad \widetilde{\psi}(\sigma) = \widetilde{g}_2\sigma^2 + \widetilde{g}_1\sigma + \widetilde{g}_0, \quad \widetilde{æ}(\sigma) = \widetilde{f}_0.
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Коэффициенты алгебраических многочленов из (3.13) — параметры, подлежащие определению.

Подставим полиномы из (3.13) в уравнения движения гиростата (1.4), (1.5) и потребуем их выполнения при всех σ. Получим систему условий на параметры рассматриваемой задачи и искомые коэффициенты решения (1.8), (3.13):

$$\begin{gathered}
3A_1(\widetilde{f}_0 - \widetilde{a}_2) - 2\widetilde{g}_2\hat{d}_4 = 0, \quad 3A_1\widetilde{a}_1 + \widetilde{g}_1\hat{d}_4 + 2\widetilde{g}_2\hat{d}_3 = 0, \quad \widetilde{g}_1\hat{d}_0 = 0, \\
3A_1\widetilde{a}_0 + \widetilde{g}_1\hat{d}_3 + 2\widetilde{g}_2\hat{d}_2 = 0, \quad \widetilde{g}_1\hat{d}_2 + 2\widetilde{g}_2\hat{d}_1 = 0, \quad \widetilde{g}_1\hat{d}_1 + 2\widetilde{g}_2\hat{d}_0 = 0, \\
3A_1(\widetilde{g}_2 - \widetilde{b}_3\widetilde{f}_0) - 2\widetilde{a}_2\hat{d}_4 = 0, \quad 3A_1(\widetilde{g}_1 - \widetilde{b}_2\widetilde{f}_0) - \widetilde{a}_1\hat{d}_4 - 2\widetilde{a}_2\hat{d}_3 = 0, \\
3A_1(\widetilde{g}_0 - \widetilde{b}_1\widetilde{f}_0) - \widetilde{a}_1\hat{d}_3 - 2\widetilde{a}_2\hat{d}_1 = 0, \quad 3A_1\widetilde{b}_0\widetilde{f}_0 + \widetilde{a}_1\hat{d}_2 + 2\widetilde{a}_2\hat{d}_0 = 0, \\
\widetilde{a}_1\hat{d}_0 = 0, \qquad 2\widetilde{c}_6\widetilde{f}_0\hat{d}_4 - 3A_1(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_2 - \widetilde{g}_2) = 0, \\
f_0(4\widetilde{c}_6\hat{d}_3 + 3\widetilde{c}_5\hat{d}_4) - 6A_1(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_2\widetilde{a}_2 - \widetilde{g}_1) = 0, \\
f_0(4\widetilde{c}_6\hat{d}_2 + 3\widetilde{c}_5\hat{d}_3 + 2\widetilde{c}_4\hat{d}_4) - 6A_1(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_0 + \widetilde{b}_2\widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_1\widetilde{a}_2 - \widetilde{g}_0) = 0, \\
\widetilde{f}_0(4\widetilde{c}_6\hat{d}_1 + 3\widetilde{c}_5\hat{d}_2 + 2\widetilde{c}_4\hat{d}_3 + \widetilde{c}_3\hat{d}_4) - 6A_1(\widetilde{b}_2\widetilde{a}_0 + \widetilde{b}_1\widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_0\widetilde{a}_2) = 0, \quad \widetilde{c}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_0 = 0, \\
\widetilde{f}_0(4\widetilde{c}_6\hat{d}_0 + 3\widetilde{c}_5\hat{d}_1 + 2\widetilde{c}_4\hat{d}_2 + \widetilde{c}_3\hat{d}_3) - 6A_1(\widetilde{b}_1\widetilde{a}_0 + \widetilde{b}_0\widetilde{a}_1) = 0, \qquad (3.14) \\
\widetilde{f}_0(3\widetilde{c}_5\hat{d}_0 + 2\widetilde{c}_4\hat{d}_1 + c_3\hat{d}_2) - 6A_1\widetilde{b}_0\widetilde{a}_0 = 0, \quad \widetilde{f}_0(2\widetilde{c}_4\hat{d}_0 + \widetilde{c}_3\hat{d}_1) = 0, \quad \widetilde{f}_0\widetilde{c}_3\hat{d}_0 = 0, \\
A_2\widetilde{b}_3\hat{d}_4 - A_1(A_3 - A_1) = 0, \quad A_2(3\widetilde{b}_3\hat{d}_3 + 2\widetilde{b}_2\hat{d}_4) + 3A_1(B_1\widetilde{f}_0 - B_3\widetilde{a}_2) = 0, \\
A_2(3\widetilde{b}_3\hat{d}_2 + 2\widetilde{b}_2\hat{d}_3 + \widetilde{b}_1\hat{d}_4) - 3A_1(\beta\widetilde{f}_0\widetilde{a}_2 + B_3\widetilde{a}_1) = 0, \\
A_2(3\widetilde{b}_3\hat{d}_1 + 2\widetilde{b}_2\hat{d}_2 + \widetilde{b}_1\hat{d}_3) - 3A_1(\beta\widetilde{f}_0\widetilde{a}_1 + B_3\widetilde{a}_0 - \lambda_1) = 0, \\
A_2(3\widetilde{b}_3\hat{d}_0 + 2\widetilde{b}_2\hat{d}_1 + \widetilde{b}_1\hat{d}_2) - 3A_1\widetilde{f}_0(\beta\widetilde{a}_0 - s_1) = 0, \quad 2\widetilde{b}_2\hat{d}_0 + \widetilde{b}_1\hat{d}_1 = 0, \quad \widetilde{b}_1\hat{d}_0 = 0, \\
A_3\widetilde{c}_6\hat{d}_4 - A_1(A_1 - A_2)\widetilde{b}_3 = 0, \\
A_3(6\widetilde{c}_6\hat{d}_3 + 5\widetilde{c}_5\hat{d}_4) - 6A_1\left((A_1 - A_2)\widetilde{b}_2 + B_1\widetilde{g}_2 - B_2\widetilde{b}_3\widetilde{a}_2\right) = 0,
\end{gathered}$$

$$A_3(6\widetilde{c}_6\hat{d}_2 + 5\widetilde{c}_5\hat{d}_3 + 4\widetilde{c}_4\hat{d}_4) - 6A_1\Big((A_1 - A_2)\widetilde{b}_1 + B_1\widetilde{g}_1 -$$
$$-B_2(\widetilde{b}_3\widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_2\widetilde{a}_2) - (\alpha+\beta)\widetilde{a}_2\widetilde{g}_2\Big) = 0,$$
$$A_3(6\widetilde{c}_6\hat{d}_1 + 5\widetilde{c}_5\hat{d}_2 + 4\widetilde{c}_4\hat{d}_3 + 3\widetilde{c}_3\hat{d}_4) - 6A_1\Big((A_1 - A_2)\widetilde{b}_0 + B_1\widetilde{g}_0 -$$
$$- B_2(\widetilde{b}_2\widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_1\widetilde{a}_2) - (\alpha+\beta)(\widetilde{a}_2\widetilde{g}_1 + \widetilde{a}_1\widetilde{g}_2) + \eta\widetilde{b}_3 - \lambda_2\Big) = 0,$$
$$A_3(6\widetilde{c}_6\hat{d}_0 + 5\widetilde{c}_5\hat{d}_1 + 4\widetilde{c}_4\hat{d}_2 + 3\widetilde{c}_3\hat{d}_3 + 2\widetilde{c}_2\hat{d}_4) + 6A_1\Big(B_2(\widetilde{b}_1\widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_0\widetilde{a}_2) +$$
$$+ (\alpha+\beta)(\widetilde{a}_2\widetilde{g}_0 + \widetilde{a}_1\widetilde{g}_1 + \widetilde{a}_0\widetilde{g}_2) - \eta\widetilde{b}_2 + s_2\widetilde{a}_2 - s_1\widetilde{g}_2\Big) = 0,$$
$$A_3(5\widetilde{c}_5\hat{d}_0 + 4\widetilde{c}_4\hat{d}_1 + 3\widetilde{c}_3\hat{d}_2 + 2\widetilde{c}_2\hat{d}_3) + 6A_1\Big(B_2\widetilde{b}_0\widetilde{a}_1 + (\alpha+\beta)(\widetilde{a}_1\widetilde{g}_0 + \widetilde{a}_0\widetilde{g}_1) -$$
$$- \eta\widetilde{b}_1 + s_2\widetilde{a}_1 - s_1\widetilde{g}_1\Big) = 0,$$
$$A_3(4\widetilde{c}_4\hat{d}_0 + 3\widetilde{c}_3\hat{d}_1 + 2\widetilde{c}_2\hat{d}_2) + 6A_1\Big((\alpha+\beta)\widetilde{a}_0\widetilde{g}_0 - \eta\widetilde{b}_0 + s_2\widetilde{a}_0 - s_1\widetilde{g}_0\Big) = 0,$$
$$3\widetilde{c}_3\hat{d}_0 + 2\widetilde{c}_2\hat{d}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_2\hat{d}_0 = 0, \quad \widetilde{a}_0^2 + \widetilde{g}_0^2 + \widetilde{c}_2\widetilde{f}_0^2 - 1 = 0.$$

Здесь

$$\alpha = C_3 - C_2, \qquad \beta = C_1 - C_3, \qquad \eta = \lambda_1 - B_2\widetilde{a}_0, \hat{d}_4 = (A_2 - A_3)\widetilde{b}_3,$$
$$\hat{d}_3 = (A_2 - A_3)\widetilde{b}_2 - B_3\widetilde{g}_2 + B_2\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0, \qquad \hat{d}_2 = (A_2 - A_3)\widetilde{b}_1 - B_3\widetilde{g}_1 + (\alpha\widetilde{g}_2 + B_2\widetilde{b}_2)\widetilde{f}_0,$$
$$\hat{d}_1 = (A_2 - A_3)\widetilde{b}_0 - B_3\widetilde{g}_0 + (\alpha\widetilde{g}_1 + B_2\widetilde{b}_1)\widetilde{f}_0 + \lambda_2, \quad \hat{d}_0 = (\alpha\widetilde{g}_0 + B_2\widetilde{b}_0 + s_2)\widetilde{f}_0.$$

Запишем решение системы (3.14) считая свободными параметры A_1, B_1, $\widetilde{b}_3$, $\widetilde{f}_0$, α:

$$A_2 = A_3 = A_1, \quad B_2 = B_3 = B_1, \quad \beta = \alpha\widetilde{b}_3^2,$$
$$\lambda_1 = -\frac{2\alpha B_1\widetilde{b}_3^2\widetilde{f}_0^3}{3A_1}, \quad \lambda_2 = \frac{2\alpha B_1\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3}{3A_1},$$
$$s_1 = -\frac{9A_1^2 + \left(2\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2\left(2\widetilde{b}_3^2 - 1\right)}{18A_1\widetilde{f}_0^3}, \quad s_2 = \frac{\left(2\widetilde{b}_3^2\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2 - 9A_1^2}{6A_1\widetilde{f}_0^3\widetilde{b}_3},$$
$$\widetilde{b}_2 = 0, \quad \widetilde{b}_1 = \frac{9A_1^2 - \left(2\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2\left(\widetilde{b}_3^2 + 1\right)}{6A_1\widetilde{f}_0^4\widetilde{b}_3\alpha}, \quad \widetilde{b}_0 = 0, \tag{3.15}$$
$$\widetilde{c}_6 = -\left(\widetilde{b}_3^2 + 1\right), \quad \widetilde{c}_5 = 0, \quad \widetilde{c}_4 = \frac{\left(2\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2\left(\widetilde{b}_3^2 + 1\right) - 9A_1^2}{3A_1\widetilde{f}_0^4\alpha}, \quad \widetilde{c}_3 = 0,$$
$$\widetilde{c}_2 = \frac{\left(9A_1^2 - \left(2\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2\right)\left(\left(2\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2\left(\widetilde{b}_3^2 + 1\right) - 9A_1^2\right)}{\left(6A_1\widetilde{f}_0^4\widetilde{b}_3\alpha\right)^2}, \quad \widetilde{c}_1 = 0, \quad \widetilde{c}_0 = 0,$$
$$\widetilde{a}_2 = \widetilde{f}_0, \quad \widetilde{a}_1 = 0, \quad \widetilde{a}_0 = -\frac{2\widetilde{b}_3^2\widetilde{f}_0^3\alpha}{3A_1},$$
$$\widetilde{g}_2 = \widetilde{b}_3\widetilde{f}_0, \quad \widetilde{g}_1 = 0, \quad \widetilde{g}_0 = \frac{9A_1^2 - \left(2\widetilde{b}_3^2\widetilde{f}_0^3\alpha\right)^2}{6A_1\widetilde{b}_3\widetilde{f}_0^3\alpha}.$$

Решение (1.8), (3.13) при выполнении условий (3.15) будет действительным, например, при

$$\widetilde{c}_2 > 0. \tag{3.16}$$

Зависимость σ от времени найдем из дифференциального уравнения (3.1):

$$\dot{\sigma} = \frac{\hat{d}_2}{3A_1}\sqrt{\widetilde{R}^*(\sigma)}, \tag{3.17}$$

где $\widetilde{R}^*(\sigma) = \widetilde{c}_6\sigma^4 + \widetilde{c}_4\sigma^2 + \widetilde{c}_2$.

Приведем численный пример решения (1.8), (3.13), (3.17) при выполнении условий (3.15), (3.16).

Пусть

$$A_1 = a, \quad B_1 = b, \quad \widetilde{b}_3 = \frac{11}{10}, \quad \widetilde{f}_0 = \frac{a}{b}, \quad \alpha = C_3 - C_2 = \frac{b^3}{a^2} \quad (a > 0,\, b > 0). \tag{3.18}$$

Тогда на основании (3.15) получим

$$\begin{gathered} A_1 = A_2 = A_3 = a, \quad B_1 = B_2 = B_3 = b, \quad \beta = C_1 - C_3 = \frac{121}{100}\frac{b^3}{a^2}, \\ \boldsymbol{\lambda} = \frac{11b}{15}\left(-\frac{11}{10},\, 1,\, 0\right), \quad \boldsymbol{s} = -\frac{b^3}{1500a^2}\left(\frac{19841}{15},\, \frac{7859}{11},\, 0\right); \end{gathered} \tag{3.19}$$

$$p = \sigma^3, \quad q = \frac{11}{10}\sigma^3 - \frac{4241b}{16500a}\sigma, \quad r = \sigma\Phi(\sigma); \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} \nu_1 = \frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{121}{150}, \quad \nu_2 = \frac{11a}{10b}\sigma^2 + \frac{7859}{16500}, \quad \nu_3 = \frac{a}{b}\frac{r}{\sigma}, \\ \Phi(\sigma) = \sqrt{-\frac{221}{100}\sigma^4 + \frac{4241b}{7500a}\sigma^2 + \frac{33330019b^2}{27225\cdot 10^4 a^2}}; \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{11b}{30a}\Phi(\sigma). \tag{3.22}$$

При выполнении условий (3.18), (3.19) решение (3.20)–(3.22) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a, b и описывается функциями времени, полученными обращением эллиптического интеграла, вытекающего из (3.22).

Из соотношений для моментов инерции и диагональных элементов матрицы B в (3.19) следует, что эллипсоид инерции гиростата является сферой, а уравнения (1.1) переходят в дифференциальные уравнения задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [3].

Для характеристики решения (3.20)–(3.22) важными являются вид и значения вектора гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ и вектора обобщенного центра масс гиростата $\boldsymbol{s}$ из (3.19).

Покажем, что движение гиростата в решении (3.20)–(3.22) является прецессионным. Для этого проверим условие прецессионности, которое описывается инвариантным соотношением [3]

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu} = b_0, \quad (\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)), \tag{3.23}$$

где вектор $\boldsymbol{b}$ неизменно связан с телом-носителем, $b_0 = \cos\gamma_0$ ($\gamma_0 = \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\nu})$) — постоянный параметр. Внесем компоненты ν_1, ν_2, ν_3 из равенств (3.21) в уравнение (3.23) и потребуем его тождественности при всех значениях переменной σ. Тогда получим

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{221}}(11, -10, 0), \quad b_0 = -\frac{150}{11\sqrt{221}}, \tag{3.24}$$

следовательно, движение тела-носителя — прецессия относительно вертикали.

В динамике твердого тела прецессионные движения изучены для многих классов решений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [3]. Поэтому представляются актуальными задачи: является ли прецессия (3.23) новой в динамике твердого тела и какому типу прецессий, согласно классификации [3], она принадлежит.

При решении данных задач будем использовать второе соотношение для прецессий гиростата [3], которое следует из (3.23) в силу уравнения Пуассона системы (1.1). Запишем его так

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{b} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{3.25}$$

где $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ — скорость собственного вращения гиростата и скорость прецессии.

Преобразуем уравнение (3.25) на основании условия (3.24)

$$(p, q, r) = \frac{1}{\sqrt{221}}\,(11, -10, 0)\,\dot{\varphi} + \dot{\psi}(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \tag{3.26}$$

Внесем в левую часть уравнения (3.26) p, q, r из (3.20), а в правую часть значения для компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ из (3.21). Тогда получим

$$\dot{\varphi} = \frac{11\sqrt{221}b}{150a}\sigma, \quad \dot{\psi} = \frac{b}{a}\sigma. \tag{3.27}$$

Переменная $\sigma(t)$ в соотношениях (3.27) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.22). Следовательно, прецессия гиростата относится к прецессии общего вида [3], а величины (3.27) в силу (3.24) удовлетворяют уравнению

$$b_0\dot{\varphi} + \dot{\psi} = 0. \tag{3.28}$$

Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата со сферическим распределением масс ($A_1 = A_2 = A_3$) рассмотрены Г. В. Горром и А. В. Мазневым [3, с. 283–285]. А. В. Мазневым получены два класса таких прецессий. Метод получения этих классов основывался на первых интегралах уравнений Кирхгофа–Пуассона (в нашем случае третий интеграл — интеграл энергии вытекает из соотношения (1.3) в силу условия $B = \mathrm{diag}(B_1, B_1, B_1)$) и уравнения, которое следует из динамического уравнения в (1.1), преобразованного с помощью инвариантных соотношений (3.23), (3.25), при проецировании его левой и правой частей на вектор $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$. В книге [3] оно названо основным уравнением для прецессии гиростата.

Первый класс прецессий А. В. Мазнева характеризуется условием, что основное уравнение становится тождеством на инвариантных соотношениях (3.23), (3.25). На основании (3.18), (3.19) и формул (3.27) можно сделать заключение, что для исследуемой прецессии гиростата выполняется условие [3] для первого класса прецессий. Причем полученный здесь результат, в силу (3.28), относится к частному случаю прецессии общего вида [3]. Осталось выяснить, как векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{s}$ из (3.19) связаны с единичным вектором $\boldsymbol{b}$ из (3.24). Очевидно, $\boldsymbol{b}$ коллинеарен $\boldsymbol{\lambda}$ и неколлинеарен $\boldsymbol{s}$. Эти условия имеют место и в частном случае решения [3].

Таким образом доказано, что построенный пример полиномиального решения уравнений (1.1) характеризуется свойством прецессионности движения гиростата. Данное свойство представляет интерес в силу того, что оно в постановке данной статьи о полиномиальных решениях не рассматривалось.

Заключение

В статье изучены условия существования двух новых классов частных решений полиномиального вида дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Построено три новых решения рассматриваемых полиномиальных классов, которые описываются гиперэллиптическими функциями времени. Указано одно решение исследуемой полиномиальной структуры, для которого движение гиростата характеризуется свойством прецессионности относительно оси симметрии силового поля, являющееся частным случаем решения А. В. Мазнева.

Найденные в статье новые частные решения не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой и в задаче о движении тяжелого гиростата. Таким образом, они не являются некоторыми обобщениями известных результатов по исследованию решений уравнений динамики твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: изд-во Новосибирского ун-та, 1965.
2. Гашененко И. Н., Горр Г. В., Ковалёв А. М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012.
3. Горр Г. В., Мазнев А. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010.
4. Thomson W. On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1872. Vol. 7. P. 668–682. https://doi.org/10.1017/S0370164600042875
5. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Mathematica. 1899. Vol. 22. P. 201–357. https://doi.org/10.1007/bf02417877
6. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собрание сочинений. Т. 1. Общая механика. Математика и астрономия. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. С. 31–152.
7. Gray A. A treatise on gurostatics and rotational motion. New York: Dover, 1959.
8. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. Ч. 2. М.: ИЛ, 1951.
9. Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1970. № 2. С. 83–96. https://zbmath.org/?q=an:0207.23402
10. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Выпуск 4. Республиканский межведомственный сборник. Киев: Наукова думка, 1972. С. 52–73.
11. Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. Выпуск 6. Республиканский межведомственный сборник. Киев: Наукова думка, 1974. С. 15–24. https://zbmath.org/?q=an:0285.34031
12. Горр Г. В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214. https://doi.org/10.1134/s0032823519020061
13. Горр Г. В. Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 102–115. https://doi.org/10.35634/vm210108
14. Gorr G. V., Tkachenko D. N., Shchetinina E. K. Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. No. 3. P. 327–342. https://doi.org/10.20537/nd190310

15. Ol'shanskii V. Yu. Linear invariant relations of Kirchhoff's equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. Vol. 79. Issue 4. P. 334–349. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.01.004
16. Ольшанский В. Ю. Построение линейных инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 88–100. https://doi.org/10.1134/s0572329919010094
17. Doroshin A. V. Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 96. P. 64–74. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.08.004
18. Doroshin A. V. Regimes of regular and chaotic motion of gyrostats in the central gravity field // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 69. P. 416–431. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.10.004
19. Aslanov V. S. A note on the "Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites" // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. Vol. 58. P. 305–306. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.10.007
20. Yehia H. M., El-kenani H. N. Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7. Issue 4. P. 2120–2128. https://doi.org/10.22055/jacm.2021.37913.3113
21. El-Sabaa F. M., Amer T. S., Sallam A. A., Abady I. M. Modeling and analysis of the nonlinear rotatory motion of an electromagnetic gyrostat // Alexandria Engineering Journal. 2021. Vol. 61. Issue 2. P. 1625–1641. https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.06.066
22. Yehia H. M. New solvable problems in the dynamics of a rigid body about a fixed point in a potential field // Mechanics Research Communications. 2014. Vol. 57. P. 44–48. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2014.02.005
23. Yehia H. M., Saleh E., Megahid S. F. New solutions of classical problems in rigid body dynamics // Mechanics Research Communications. 2015. Vol. 69. P. 40–44. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.05.007
24. Yehia H. M., Elmandouh A. A. A new conditional integrable case in the dynamics of a rigid body-gyrostat // Mechanics Research Communications. 2016. Vol. 78. Part A. P. 25–27. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.09.007
25. Amer T. S., Amer W. S. Substantial condition for the fourth first integral of the rigid body problem // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. Vol. 23. Issue 8. P. 1237–1246. https://doi.org/10.1177/1081286517716733
26. Amer T. S., Farag A. M., Amer W. S. The dynamical motion of a rigid body for the case of ellipsoid inertia close to ellipsoid of rotation // Mechanics Research Communications. 2020. Vol. 108. 103583. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103583
27. Doroshin A. V. Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 50. P. 68–74. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.10.012
28. Aslanov V., Yudintsev V. Dynamics and chaos control of gyrostat satellite // Chaos, Solitons and Fractals. 2012. Vol. 45. Issues 9–10. P. 1100–1107. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2012.06.008
29. Barnett S. J. Gyromagnetic and electron-inertia effects // Reviews of Modern Physics. 1935. Vol. 7. Issue 2. P. 129–166. https://doi.org/10.1103/revmodphys.7.129
30. London F. Superfluids. Vol. 1. Macroscopic theory of superconductivity. New York: Wiley, 1950.
31. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
32. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 30–41. http://mi.mathnet.ru/faa1637
33. Самсонов В. А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1984. № 6. С. 32–34.
34. Козлов В. В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1985. № 6. С. 28–33.

35. Харламов П. В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. 2000. Вып. 30. С. 1–12.
36. Klen F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. Heft 4. Leipzig: Teubner, 1965.
37. Зыза А. В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерное исследование и моделирование. 2018. Т. 10. № 1. С. 7–25. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25
38. Зыза А. В. Об обобщенных уравнениях Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 73–83. https://doi.org/10.20537/vm190107
39. Зыза А. В., Хомяк Т. В. Об одном случае интегрируемости уравнений движения твердого тела в магнитном поле // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. 2012. Вып. 2. С. 31–35.
40. Borisov A. V., Tsiganov A. V. The motion of a nonholonomic Chaplygin sphere in a magnetic field, the Grioli problem, and the Barnett–London effect // Doklady Physics. 2020. Vol. 65. Issue 3. P. 90–93. https://doi.org/10.1134/s1028335820030052

Поступила в редакцию 02.03.2022

Принята к публикации 11.05.2022

Зыза Александр Васильевич, д. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и методики преподавания математики, Донецкий национальный университет, 83001, Украина, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
E-mail: z9125494@mail.ru

Хомяк Татьяна Валерьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра системного анализа и управления, Национальный технический университет «Днепровская политехника», 49005, Украина, г. Днепр, пр. Д. Яворницкого, 19.
E-mail: khomyak.t.v@gmail.com

Платонова Елена Сергеевна, старший преподаватель, кафедра прикладной математики и теории систем управления, Донецкий национальный университет, 83001, Украина, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
E-mail: elenasergeevna9@mail.ru

Цитирование: А. В. Зыза, Т. В. Хомяк, Е. С. Платонова. Новые классы частных решений одной задачи о движении гиростата // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 298–318.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MECHANICS 2022. Vol. 32. Issue 2. Pp. 298–318.

A. V. Zyza, T. V. Khomyak, E. S. Platonova

New classes of particular solutions to one problem on gyrostat motion

Keywords: Kirchhoff–Poisson equations, Barnett–London effect, gyrostat, polynomial solution, invariance relation.

MSC2020: 70E05, 70E17, 70E40

DOI: 10.35634/vm220209

The paper studies the existence of two new classes of polynomial solutions to differential equations related to the problem of the gyrostat motion with a fixed point in the magnetic field, taking into account the Barnett-London effect. A common feature of the structure of these classes is that the functions that set the invariance relations for the unit vector components of the symmetry axis of the active force fields are either rational functions of the first component of the specified vector or of the auxiliary variable. Three new particular solutions to the polynomial classes under consideration are constructed. These solutions are described by the functions obtained by the inversion of hyperelliptic integrals. It has been proved that another constructed solution of the polynomial structures under study, for which the movement of the gyrostat has the property of precession, is a particular case of a known solution.

REFERENCES

1. Kharlamov P. V. *Lektsii po dinamike tverdogo tela* (Lectures on solid dynamics), Novosibirsk: Novosibirsk State University, 1965.
2. Gashenenko I. N., Gorr G. V., Kovalev A. M. *Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela* (Classical problems of solid dynamics), Kiev: Naukova Dumka, 2012.
3. Gorr G. V., Maznev A. V. *Dinamika girostata, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku* (Dynamics of a gyrostat with a fixed point), Donetsk: Donetsk National University, 2010.
4. Thomson W. On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1872, vol. 7, pp. 668–682. https://doi.org/10.1017/S0370164600042875
5. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes, *Acta Mathematica*, 1899, vol. 22, pp. 201–357. https://doi.org/10.1007/bf02417877
6. Zhukovskii N. E. On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid, *Sobranie sochinenii. Tom 1* (Collected works, vol. 1), Moscow: Gostekhteorizdat, 1949, pp. 31–152 (in Russian).
7. Gray A. *A treatise on gurostatics and rotational motion*, New York: Dover, 1959.
8. Levi-Civita T., Amaldi U. *Lezioni di meccanica razionale. Volume secondo. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertá. Parte Seconda*, Bologna: Nicola Zanichelli, 1927.
9. Rumyantsev V. V. On orientation control and satellite stabilization by rotors, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 1970, no. 2, pp. 83–96 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0207.23402
10. Kharlamov P. V. On the equations of motion of a system of solids, *Mekhanika Tverdogo Tela. Issue 4. Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik*, Kiev: Naukova dumka, 1972, pp. 52–73 (in Russian).
11. Kharlamov P. V. On the invariant relations of a system of differential equations, *Mekhanika Tverdogo Tela. Issue 6. Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik*, Kiev: Naukova dumka, 1974, pp. 15–24 (in Russian).
12. Gorr G. V. On three invariant relations of the equations of motion of a body in a potential field of force, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 234–244. https://doi.org/10.3103/S0025654419030105
13. Gorr G. V. An approach in studying gyrostat motion with variable gyrostatic moment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 102–115 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210108

14. Gorr G. V., Tkachenko D. N., Shchetinina E. K. Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, p. 327–342. https://doi.org/10.20537/nd190310
15. Ol'shanskii V. Yu. Linear invariant relations of Kirchhoff's equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, issue 4, pp. 334–349. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.01.004
16. Ol'shanskii V. Yu. Construction of linear invariant relations of Kirchhoff equations, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 1, pp. 70–80. https://doi.org/10.3103/S0025654419010060
17. Doroshin A. V. Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 96, pp. 64–74. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.08.004
18. Doroshin A. V. Regimes of regular and chaotic motion of gyrostats in the central gravity field, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 69, pp. 416–431. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.10.004
19. Aslanov V. S. A note on the "Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 58, pp. 305–306. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.10.007
20. Yehia H. M., El-kenani H. N. Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, issue 4, pp. 2120–2128. https://doi.org/10.22055/jacm.2021.37913.3113
21. El-Sabaa F. M., Amer T. S., Sallam A. A., Abady I. M. Modeling and analysis of the nonlinear rotatory motion of an electromagnetic gyrostat, *Alexandria Engineering Journal*, 2021, vol. 61, issue 2, pp. 1625–1641. https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.06.066
22. Yehia H. M. New solvable problems in the dynamics of a rigid body about a fixed point in a potential field, *Mechanics Research Communications*, 2014, vol. 57, pp. 44–48. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2014.02.005
23. Yehia H. M., Saleh E., Megahid S. F. New solutions of classical problems in rigid body dynamics, *Mechanics Research Communications*, 2015, vol. 69, pp. 40–44. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.05.007
24. Yehia H. M., Elmandouh A. A. A new conditional integrable case in the dynamics of a rigid body-gyrostat, *Mechanics Research Communications*, 2016, vol. 78, part A, pp. 25–27. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.09.007
25. Amer T. S., Amer W. S. Substantial condition for the fourth first integral of the rigid body problem, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2018, vol. 23, issue 8, pp. 1237–1246. https://doi.org/10.1177/1081286517716733
26. Amer T. S., Farag A. M., Amer W. S. The dynamical motion of a rigid body for the case of ellipsoid inertia close to ellipsoid of rotation, *Mechanics Research Communications*, 2020, vol. 108, 103583. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103583
27. Doroshin A. V. Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 50, pp. 68–74. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.10.012
28. Aslanov V., Yudintsev V. Dynamics and chaos control of gyrostat satellite, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2012, vol. 45, issues 9–10, pp. 1100–1107. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2012.06.008
29. Barnett S. J. Gyromagnetic and electron-inertia effects, *Reviews of Modern Physics*, 1935, vol. 7, issue 2, pp. 129–166. https://doi.org/10.1103/revmodphys.7.129
30. London F. *Superfluids. Vol. 1. Macroscopic theory of superconductivity*, New York: Wiley, 1950.
31. Kittel Ch. *Introduction to solid state physics*, New York: Wiley, 2005.
32. Ziglin S. L. Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I, *Functional Analysis and Its Applications*, 1982, vol. 16, issue 3, pp. 181–189. https://doi.org/10.1007/BF01081586
33. Samsonov V. A. On the rotation of a solid in a magnetic field, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1984, no. 6, pp. 32–34 (in Russian).

34. Kozlov V. V. To the problem of rotation of a solid body in a magnetic field, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1985, no. 6, pp. 28–33 (in Russian).
35. Kharlamov P. V. The current state and prospects for the development of the classical problems of solid state dynamics, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2000, issue 30, pp. 1–12 (in Russian).
36. Klen F., Sommerfeld A. *Über die Theorie des Kreisels. Heft 4*, Leipzig: Teubner, 1965.
37. Zyza A. V. Computer studies of polynomial solutions for gyrostat dynamics, *Komp'yuternye Issledovaniya i Modelirovanie*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 7–25 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25
38. Zyza A. V. On generalized N. Kovalevski equations in two problems of rigid body dynamics, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 73–83 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190107
39. Zyza A. V., Khomyak T. V. On one case of integrability of the motion equations of a rigid body in magnetic field, *Vestnik Donetskogo Natsional'nogo Universiteta. Seriya A: Estestvennye Nayki*, 2012, issue 2, pp. 31–35 (in Russian).
40. Borisov A. V., Tsiganov A. V. The motion of a nonholonomic Chaplygin sphere in a magnetic field, the Grioli problem, and the Barnett–London effect, *Doklady Physics*, 2020, vol. 65, issue 3, pp. 90–93. https://doi.org/10.1134/s1028335820030052

Received 02.03.2022

Accepted 11.05.2022

Aleksandr Vasil'evich Zyza, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Mathematical Education, Donetsk National University, ul. Universitetskaya, 24, Donetsk, 83001, Ukraine.
E-mail: z9125494@mail.ru

Tat'yana Valer'evna Khomyak, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Systems Analysis and Management, National Technical University "Dnipro Polytechnic", pr. D. Yavornicky, 19, Dnepr, 49005, Ukraine.
E-mail: khomyak.t.v@gmail.com

Elena Sergeevna Platonova, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Management Systems Theory, Donetsk National University, ul. Universitetskaya, 24, Donetsk, 83001, Ukraine.
E-mail: elenasergeevna9@mail.ru

Citation: A. V. Zyza, T. V. Khomyak, E. S. Platonova. New classes of particular solutions to one problem on gyrostat motion, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 298–318.