ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 256–277.

УДК 517.98

© *Н. М. Хатамов*

ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ МЕР ГИББСА ДЛЯ *HC*-МОДЕЛИ БЛЮМА–КАПЕЛЯ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

В данной работе рассмотрены трансляционно-инвариантные меры Гиббса (ТИМГ) для *HC*-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» на дереве Кэли второго порядка. Найдено приближенное критическое значение θ_{cr} такое, что при $\theta \geqslant \theta_{cr}$ существует единственная ТИМГ, а при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ в случае «обобщенный жезл» для рассматриваемой модели. Кроме того, изучена задача (не)экстремальности для этих мер.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, *HC*-модель Блюма–Капеля, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры, экстремальность меры.

DOI: 10.35634/vm220207

Одна из основных проблем статистической физики — найти для данного гамильтониана все отвечающие ему меры Гиббса. Мера Гиббса — это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы. Она играет важную роль в определении существования фазового перехода той или иной физической системы, так как каждой предельной мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и происходит фазовый переход, когда мера Гиббса не единственна.

Кроме того, известно, что множество всех предельных мер Гиббса образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер, и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его экстремальным точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех экстремальных точек этого выпуклого множества, то есть экстремальных мер Гиббса (см. [1–4]).

В течение последних 10 лет фазовые диаграммы мер Гиббса на дереве Кэли изучались для многих моделей статистической физики. Например, в работах [5–7] изучали модель Изинга–Ваннименуса, модель Изинга со смешанными спинами и шаровую модель Изинга. В частности, еще в [8–11] рассматривается задача экстремальности для λ-модели, модели Поттса–*SOS* и модели Блюма–Капеля. В [12–14] изучались p-адические меры Гиббса для моделей Изинга и Поттса. В [15–17] исследуются основные состояния для λ-модели и модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями.

В работе Мазеля и Сухова была введена и изучена модель «hard core» (*HC*-модель) на d-мерной решетке Z^d (см. [18]). Работы [19–23] посвящены изучению мер Гиббса для *HC*-модели с двумя состояниями на дереве Кэли. В частности, в работе [21] дано полное описание слабо периодических мер Гиббса для *HC*-модели при любых значениях параметров в случае нормального делителя индекса 2.

В работе [24] выделены плодородные *HC*-модели, соответствующие графам «петля», «свисток», «жезл» и «ключ». Работы [25–28] посвящены изучению мер Гиббса для плодородных *HC*-моделей с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k > 1$. В частности, в работах [26] и [27] в случаях графов «петля» и «жезл» дано полное описание ТИМГ на дереве Кэли порядка $k = 2$ и $k = 3$ соответственно, а в работе [28] в этих случаях доказано существование не менее трех ТИМГ на дереве Кэли произвольного порядка и изучена экстремальность ТИМГ при $k = 2$.

Модель Блюма–Капеля — это двумерная спиновая система, где спин может принимать три значения: $-1, 0, 1$. Первоначально она была введена для изучения $He^3 - He^4$ фазового перехода (см. [29]). Можно думать о ней как о системе частиц со спином. Значение $\sigma(x) = 0$ спина на узле решетки (или на узле дерева) x будет соответствовать отсутствию частиц (вакансия), в то время как значения $\sigma(x) = \pm 1$ будут соответствовать присутствию на узле x частицы со спином ± 1 соответственно (см. [29–31]). По поводу других результатов по модели Блюма–Капеля см., например, [32–35]. В частности, в работе [32] рассмотрены ТИМГ для модели Блюма–Капеля на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$. Найдено приближенное критическое значение температуры T_{cr} такое, что при $T \geqslant T_{cr}$ существует единственная ТИМГ, а при $T < T_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ для рассматриваемой модели. Кроме того, изучена задача (не)экстремальности для единственной меры Гиббса. В работе [33] рассмотрены ТИМГ для модели Блюма–Капеля в случае «жезл» на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$. Найдено точное критическое значение $\theta_{cr} = 1$ такое, что при $\theta \geqslant \theta_{cr}$ существует единственная ТИМГ, а при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ в случае «жезл» для рассматриваемой модели. Кроме того, изучена задача (не)экстремальности для этих мер.

В настоящей работе рассмотрены ТИМГ для *HC*-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» на дереве Кэли порядка $k = 2$. Найдено приближенное критическое значение θ_{cr} такое, что при $\theta \geqslant \theta_{cr}$ существует единственная ТИМГ, а при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ в случае «обобщенный жезл» для рассматриваемой модели. Кроме того, изучена задача (не)экстремальности для этих мер.

Структура работы такова: в первом параграфе даны предварительные сведения и система функциональных уравнений; во втором параграфе найдено приближенное критическое значение θ_{cr}, что при $\theta \geqslant \theta_{cr}$ существует единственная ТИМГ, а при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ; в третьем и четвертом параграфе изучена (не)экстремальность этих мер.

§ 1. Предварительные сведения и система функциональных уравнений

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geqslant 1$ — это бесконечное дерево, то есть граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V есть множество вершин Γ^k, L — его множество ребер. Пусть i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются через $\langle x, y\rangle$. Пусть $d(x, y)$, $x, y \in V$, есть расстояние между вершинами x, y, то есть количество ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y.

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A.

Рассмотрим граф с тремя вершинами $-1, 0, 1$ (на множестве значений $\sigma(x)$), который имеет следующий вид (см. [4, 24]):

обобщенный жезл: $\{0, -1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, -1\}$, $\{-1, 1\}$, $\{1, 1\}$.

Гамильтониан модели Блюма–Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle,\ x,y\in V} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1.1}$$

где $J \in R$.

Пусть $x^0 \in V$ — фиксированная точка. Будем писать $x \prec y$, если путь от x^0 до y проходит через x.

Обозначим:

$$W_n = \{x \in V \colon d(x^0, x) = n\}, \qquad V_n = \{x \in V \colon d(x^0, x) \leqslant n\}.$$

Точка y называется *«прямым потомком»* точки x, если $x \prec y$ и $d(x, y) = 1$.

Обозначим через $S(x)$ множество *«прямых потомков»* точки $x \in V$.

Пусть $O = \{$*обобщенный жезл*$\}$, $G \in O$. Конфигурация σ называется *G-допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ — ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega^G_{V_n}$).

Пусть $h \colon x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{1,x})$ — вектор-функция от $x \in V \setminus \{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на $\Omega^G_{V_n}$:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\}, \tag{1.2}$$

где $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$, $Z_n = \sum\limits_{\overline{\sigma}_n \in \Omega^G_{V_n}} \exp\{-\beta H(\overline{\sigma}_n) + \sum\limits_{x \in W_n} h_{\overline{\sigma}(x),x}\}$ и $h_{\overline{\sigma},x} \in R$.

Говорят, что вероятностные распределения $\mu^{(n)}$, $n \geqslant 1$, согласованы, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{1.3}$$

для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^G_{V_{n-1}}$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω^G_V такая, что

$$\mu(\{\sigma\,|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$.

Пусть $L(G)$ — множество ребер графа G. Обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=-1,0,+1}$ матрицу смежности G, то есть

$$a_{ij} \equiv a^G_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{i,x}$, при которых выполняется (1.3).

Теорема 1 (см. [33]). *Пусть $k \geqslant 2$. Вероятностные распределения $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, в (1.2) согласованы тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:*

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \frac{a_{1,-1}\theta^4 z_{-1,y} + a_{1,0}\theta + a_{1,1} z_{1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,1}\theta z_{1,y}}, \\ z_{-1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \frac{a_{-1,-1} z_{-1,y} + a_{-1,0}\theta + a_{-1,1}\theta^4 z_{1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,1}\theta z_{1,y}}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $\theta = \exp\{-J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $z_{i,x} = \exp(h_{i,x} - h_{0,x})$, $i = -1, 1$.

§ 2. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса

ТИМГ соответствуют решениям (1.4) с $z_{i,x} = z_i$ при всех $x \in V$ и $i = -1, 1$. Для удобства, обозначим $z_1 = z_1$, $z_{-1} = z_2$. Тогда система уравнений (1.4) в случае «обобщенный жезл» имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta+z_1+\theta^4 z_2}{\theta z_1+\theta z_2}\right)^k, \\ z_2 = \left(\frac{\theta+\theta^4 z_1+z_2}{\theta z_1+\theta z_2}\right)^k, \end{cases} \tag{2.1}$$

Пусть $z_1 = z_2 = z$. Тогда из (2.1) получим

$$z = \left(\frac{\theta + (1+\theta^4)z}{2\theta z}\right)^k, \tag{2.2}$$

и справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $k \geqslant 2$. Для любого $\theta > 0$ уравнение (2.2) имеет единственное решение.*

Доказательство. Запишем уравнение (2.2) в виде

$$z = f(z), \tag{2.3}$$

где

$$f(z) = \left(\frac{\theta + (1+\theta^4)z}{2\theta z}\right)^k.$$

Заметим, что производная функции $f(z)$

$$f'(z) = k\left(\frac{\theta + (1+\theta^4)z}{2\theta z}\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{2z^2}\right) < 0,$$

то есть функция $f(z)$ является убывающей при $z > 0$. Значит, уравнение (2.3) имеет единственное решение $z^* = z^*(k,\theta)$ для любой $\theta > 0$. □

Далее, вычитая из первого уравнения системы (2.1) второе, получаем

$$(z_1 - z_2)\left[1 - (1-\theta^4)\frac{(\theta + z_1 + \theta^4 z_2)^{k-1} + \ldots + (\theta + \theta^4 z_1 + z_2)^{k-1}}{(\theta z_1 + \theta z_2)^k}\right] = 0. \tag{2.4}$$

Следовательно, $z_1 = z_2$ или

$$\theta^k (z_1+z_2)^k = (1-\theta^4)\left((\theta + z_1 + \theta^4 z_2)^{k-1} + \ldots + (\theta + \theta^4 z_1 + z_2)^{k-1}\right). \tag{2.5}$$

Для $z_1 = z_2 = z$ из леммы 1 получим, что система (2.1) имеет единственное решение (z^*, z^*).

Рассмотрим случай, когда $k = 2$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для НС-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» существует $\theta_{cr} \approx \approx 0.6589252$, такое, что при $\theta \geqslant \theta_{cr}$ существует единственная ТИМГ μ_0; при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют три ТИМГ μ_0, μ_1, μ_2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.4) при $k=2$ получим

$$(z_1-z_2)\left(1-(1-\theta^4)\frac{2\theta+(z_1+z_2)+\theta^4(z_1+z_2)}{\theta^2(z_1+z_2)^2}\right)=0.$$

Из леммы 1 известно, что в случае $z_1=z_2$ при любых $\theta>0$ для модели (1.2) существует единственная ТИМГ μ_0.

Пусть $z_1\neq z_2$. Тогда

$$\theta^2(z_1+z_2)^2=(1-\theta^4)(2\theta+(z_1+z_2)+\theta^4(z_1+z_2)).$$

Отсюда

$$\theta^2(z_1+z_2)^2-(1-\theta^8)(z_1+z_2)+2\theta(\theta^4-1)=0.$$

Решив это уравнение относительно z_1+z_2, получим

$$(z_1+z_2)_{1,2}=\frac{1-\theta^8\pm\sqrt{D(\theta)}}{2\theta^2}=\varphi_{1,2}(\theta), \tag{2.6}$$

где

$$D(\theta)=\theta^{16}-2\theta^8-8\theta^7+8\theta^3+1.$$

По известной теореме Декарта о количестве положительных корней многочлена многочлен $D(\theta)$ имеет не более двух положительных корней (см. [36]). Разложим многочлен $D(\theta)$ на множители

$$D(\theta)=(\theta-1)(\theta+1)(\theta^2+1)(\theta^{12}+\theta^8-\theta^4-8\theta^3-1).$$

Отсюда один из корней $\theta=1$, а второй корень является корнем многочлена

$$\theta^{12}+\theta^8-\theta^4-8\theta^3-1,$$

то есть $\theta\approx 1.23842$. Это также можно увидеть из рис. 1, *а*.

Тогда $D(\theta)>0$, если $\theta\in(0;1)\bigcup(1.23842;+\infty)$ (см. рис. 1, *а*).

Очевидно, что при $\theta\in(0;1)$ функция $\varphi_1(\theta)=\frac{1-\theta^8+\sqrt{D(\theta)}}{2\theta^2}>0$.

Пусть $\theta\in(1.23842;+\infty)$. Тогда покажем, что $\varphi_1(\theta)=\frac{1-\theta^8+\sqrt{D(\theta)}}{2\theta^2}<0$. Действительно, из последнего неравенства получим $\sqrt{D(\theta)}<\theta^8-1$. Отсюда $D(\theta)<(\theta^8-1)^2$, так как $\theta^8-1>0$ при $\theta\in(1.23842;+\infty)$. Тогда из неравенства $D(\theta)=(\theta^8-1)^2-8\theta^3(\theta^4-1)<$ $<(\theta^8-1)^2$ получим неравенство $\theta^4-1>0$, которое верно при всех $\theta\in(1.23842;+\infty)$.

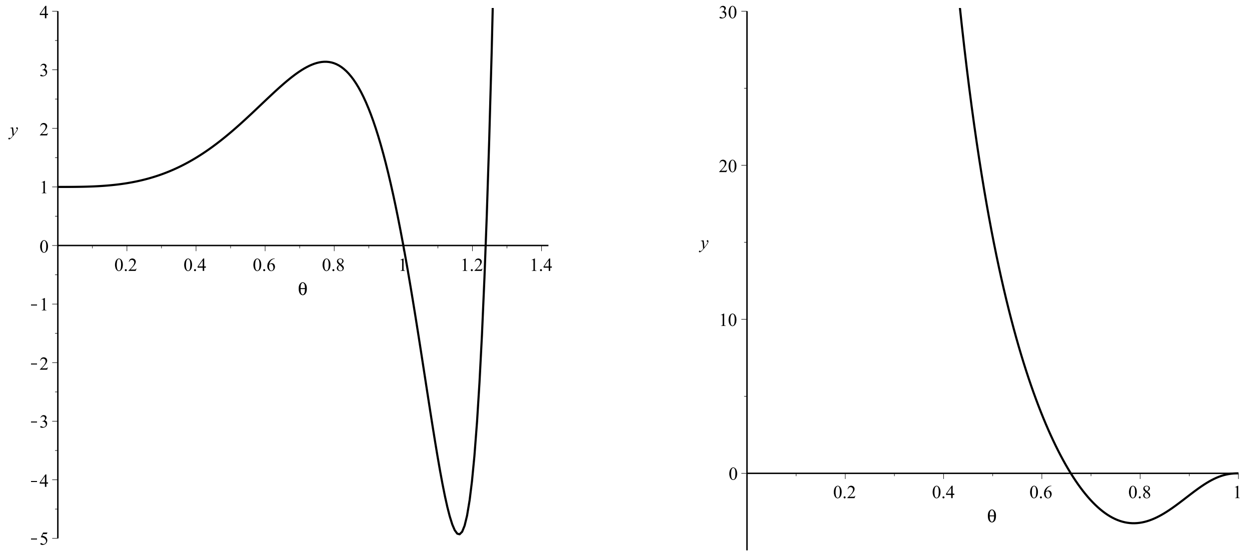
При $\theta\in(0;1)\bigcup(1.23842;+\infty)$ $\varphi_2(\theta)=\frac{1-\theta^8-\sqrt{D(\theta)}}{2\theta^2}<0$. Проверим $\varphi_2(\theta)<0$. Это неравенство очевидно при $\theta\in(1.23842;+\infty)$. Пусть $\theta\in(0;1)$. Тогда из неравенства $\varphi_2(\theta)<0$ получим $1-\theta^8-\sqrt{D(\theta)}<0$. Так как $\theta\in(0;1)$, то $(1-\theta^8)^2<D(\theta)=(\theta^8-1)^2-8\theta^3(\theta^4-1)$. Тогда получим $1-\theta^4>0$ — верное неравенство.

Таким образом, $z_1+z_2=\varphi_1(\theta)$ при $\theta\in(0;1)$. Отсюда с учетом первого из уравнений (2.1) получим квадратное уравнение относительно z_1, то есть

$$(1-\theta^4)^2z_1^2+(2(\theta+\theta^4\varphi_1(\theta))(1-\theta^4)-\theta^2\varphi_1^2(\theta))z_1+(\theta+\theta^4\varphi_1(\theta))^2=0. \tag{2.7}$$

Здесь

$$D_1(\theta)=[2(\theta+\theta^4\varphi_1(\theta))(1-\theta^4)-\theta^2\varphi_1^2(\theta)]^2-4(1-\theta^4)^2(\theta+\theta^4\varphi_1(\theta))^2>0,$$



(a) (b)

Рис. 1. (a) график функции $D(\theta)$; (b) график функции $D_1(\theta)$

т. е.

$$D_1(\theta) = \theta^2\varphi_1^2(\theta)(1-\theta^4)((1-3\theta^4)\varphi_1(\theta)-2\theta) > 0,$$

при $0 < \theta < \theta_{cr} \approx 0.6589252$ (см. рис. 1, *b*).

Значит, уравнение (2.7) имеет два положительных решения при $0 < \theta < \theta_{cr} \approx 0.6589252$:

$$z_1^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2}\varphi_1(\theta) + \frac{\sqrt{D_1(\theta)}}{2(1-\theta^4)^2}, \qquad z_1^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2}\varphi_1(\theta) - \frac{\sqrt{D_1(\theta)}}{2(1-\theta^4)^2}. \tag{2.8}$$

Компьютерный и громоздкий аналитический анализ показывает, что

$$\lim_{\theta\to+\infty} z_1^{(1)}(\theta) = +\infty, \quad \lim_{\theta\to+\infty} z_1^{(2)}(\theta) = 0, \quad \lim_{\theta\to\theta_{cr}} z_1^{(1)}(\theta) = \lim_{\theta\to\theta_{cr}} z_1^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2}\varphi_1(\theta_{cr}) \approx 1.5166642,$$

и $z_1^{(1)} > 0$, $z_1^{(2)} > 0$ (см. рис. 2, *a*).

Так как $z_1 + z_2 = \varphi_1(\theta)$, то

$$z_2^{(1)} = z_1^{(2)}, \qquad z_1^{(1)} = z_2^{(2)},$$

то есть решения системы (z_1, z_2) и (z_2, z_1) симметричны. Этим решениям соответствуют, по теореме 1, ТИМГ μ_1, μ_2. □

§ 3. Условия не экстремальности мер μ_0, μ_1, μ_2

Чтобы проверить не экстремальность меры, воспользуемся методом из работ [37–39]. Для этого рассмотрим цепы Маркова с состояниями $\{-1, 0, 1\}$ и матрицу P_μ вероятностных переходов $P_{\sigma(x)\sigma(y)}$, определенную данной ТИМГ μ, то есть $P_{\sigma(x)\sigma(y)}$ — вероятность сдвига от состояния $\sigma(x)$ к состоянию $\sigma(y)$.

Достаточным условием не экстремальности меры Гиббса, соответствующей матрице P_μ является то, что $k\lambda_2^2 > 1$, где λ_2 — это второе по модулю максимальное собственное значение матрицы P_μ (условие Кестена–Стигума).

Чтобы проверить это условие, надо знать явный вид решения системы (2.1). Точные решения мы знаем пока только при $k = 2$.

Ясно, что при $k = 2$ система уравнений (2.1) при $\theta \geqslant \theta_{cr} \approx 0.6589252$ имеет единственное решение (z^*, z^*), где z^* — единственное решение уравнения

$$z = \left(\frac{\theta + (1+\theta^4)z}{2\theta z}\right)^2, \tag{3.1}$$

и при $0 < \theta < \theta_{cr} \approx 0.6589252$ имеет три решения (z^*, z^*), (z_1, z_2), (z_2, z_1), где z_1 и z_2 определены следующими формулами:

$$z_1 = \frac{1}{2}\varphi_1(\theta) + \frac{\sqrt{D_1}}{2(1-\theta^4)^2}, \qquad z_2 = \frac{1}{2}\varphi_1(\theta) - \frac{\sqrt{D_1}}{2(1-\theta^4)^2}. \tag{3.2}$$

Найдем условия не экстремальности мер, соответствующим этим решениям. Для этого рассмотрим

$$P_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{a_{\sigma(x),\sigma(y)} \exp\{-J\beta(\sigma(x)-\sigma(y))^2 + h_{\sigma(y)}\}}{\sum_{\widetilde{\sigma}(y)\in\{-1,0,1\}} a_{\sigma(x),\widetilde{\sigma}(y)} \exp\{-J\beta(\sigma(x)-\widetilde{\sigma}(y))^2 + h_{\widetilde{\sigma}(y)}\}}.$$

В этом случае $G =$ «обобщенный жезл»,

$$\begin{gathered} a_{-1,-1} = 1, \quad a_{-1,0} = 1, \quad a_{-1,1} = 1, \\ a_{0,-1} = 1, \quad a_{0,0} = 0, \quad a_{0,1} = 1, \\ a_{1,-1} = 1, \quad a_{1,0} = 1, \quad a_{1,1} = 1. \end{gathered}$$

Отсюда, получаем

$$\begin{gathered} P_{-1,-1} = \frac{z_2}{z_2+\theta+\theta^4 z_1}, \qquad P_{-1,0} = \frac{\theta}{z_2+\theta+\theta^4 z_1}, \qquad P_{-1,1} = \frac{\theta^4 z_1}{z_2+\theta+\theta^4 z_1}, \\ P_{0,-1} = \frac{z_2}{z_2+z_1}, \qquad P_{0,0} = 0, \qquad P_{0,1} = \frac{z_1}{z_2+z_1}, \\ P_{1,-1} = \frac{\theta^4 z_2}{\theta^4 z_2+\theta+z_1}, \qquad P_{1,0} = \frac{\theta}{\theta^4 z_2+\theta+z_1}, \qquad P_{1,1} = \frac{z_1}{\theta^4 z_2+\theta+z_1}. \end{gathered}$$

Следовательно,

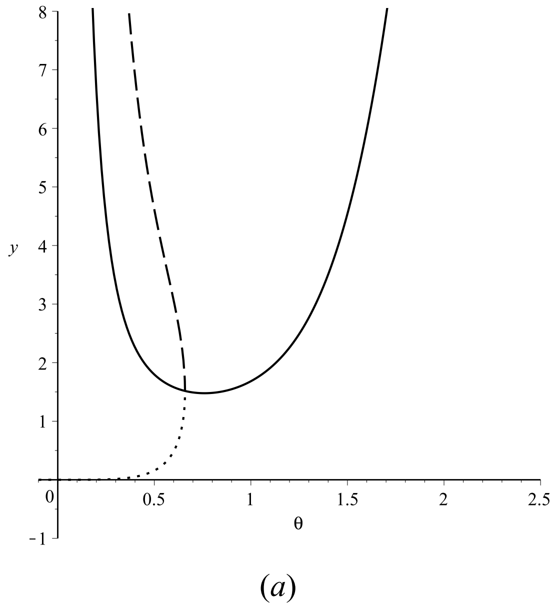
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{z_2}{z_2+\theta+\theta^4 z_1} & \frac{\theta}{z_2+\theta+\theta^4 z_1} & \frac{\theta^4 z_1}{z_2+\theta+\theta^4 z_1} \\ \frac{z_2}{z_2+z_1} & 0 & \frac{z_1}{z_2+z_1} \\ \frac{\theta^4 z_2}{\theta^4 z_2+\theta+z_1} & \frac{\theta}{\theta^4 z_2+\theta+z_1} & \frac{z_1}{\theta^4 z_2+\theta+z_1} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Ясно, что одно из собственных значений этой матрицы $s_3 = 1$. Найдем s_1 и s_2:

$$\begin{gathered} \det(P - sE) = 0 \Rightarrow \\ (s-1)((z_1+z_2)(\theta^4 z_1+\theta+z_2)(\theta^4 z_2+\theta+z_1)s^2 + \\ + (z_1+z_2)((\theta^8-1)z_1z_2 + \theta^5(z_1+z_2)+\theta^2)s + 2\theta z_1 z_2(\theta^4-1)) = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Сначала проверим условие не экстремальности мер μ_1, μ_2 соответствующих решениям (z_1, z_2), (z_2, z_1) соответственно. Для этого, разделив левую часть последнего уравнения на $s-1$, получим квадратное уравнение

$$\begin{gathered} (z_1+z_2)(\theta^4 z_1+\theta+z_2)(\theta^4 z_2+\theta+z_1)s^2 + \\ + (z_1+z_2)((\theta^8-1)z_1z_2 + \theta^5(z_1+z_2)+\theta^2)s + 2\theta z_1 z_2(\theta^4-1) = 0. \end{gathered}$$



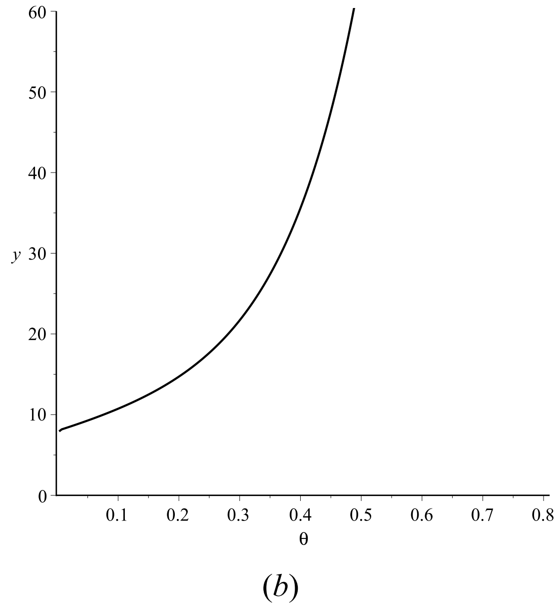


Рис. 2. (a) графики функций $z^*(\theta)$ (непрерывная кривая), $z_1(\theta)$ (штрихованная кривая), $z_2(\theta)$ (пунктирная кривая); (b) график функции D_2

Решения этого квадратного уравнения имеют вид

$$s_{1,2} = \frac{-(z_1+z_2)((\theta^8-1)z_1z_2+\theta^5(z_1+z_2)+\theta^2) \pm \sqrt{D_2}}{2(z_1+z_2)(\theta^4z_1+\theta+z_2)(\theta^4z_2+\theta+z_1)},$$

где

$$D_2 = \left[(z_1+z_2)((\theta^8-1)z_1z_2+\theta^5(z_1+z_2)+\theta^2)\right]^2 - \\ - 8\theta z_1z_2(\theta^4-1)(z_1+z_2)(\theta^4z_1+\theta+z_2)(\theta^4z_2+\theta+z_1) > 0$$

при $\theta > 0$ (см. рис. 2, *b*).

При $0 < \theta < \theta_{cr}$ с помощью программы Maple можно увидеть, что

$$\max\{|s_1|, |s_2|\} = |s_1|$$

(см. рис. 3, *a*).

Отсюда следует, что $|s_2| < |s_1| < s_3 = 1$. Теперь проверим условие: $ks_1^2 > 1$. С помощью программы Maple можно увидеть, что последнее неравенство выполняется при $\theta \in (0.3716768; \theta_{cr})$ (см. рис. 3, *b*).

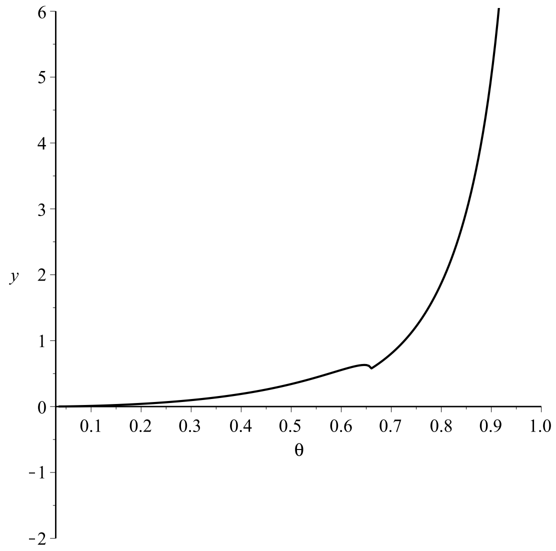
Но неравенство $|s_1| < 1$ верно при $0 < \theta < 0.4782031$ (см. рис. 4, *a*). Следовательно, при $0.3716768 < \theta < 0.4782031$ меры μ_1, μ_2 не являются экстремальными.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

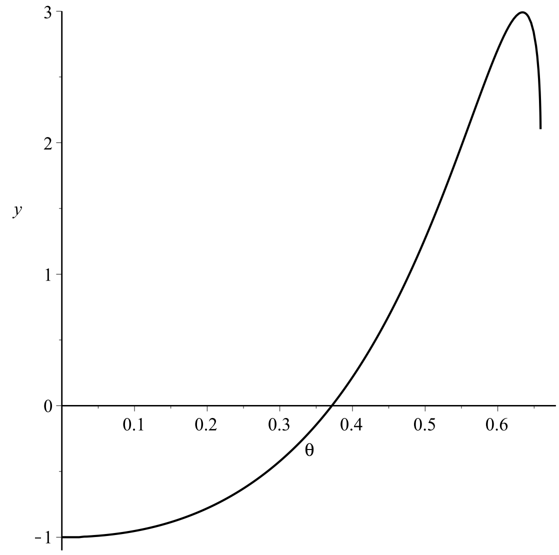
Теорема 3. *Пусть $k = 2$. Тогда для НС-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» меры μ_1, μ_2 при $\theta \in (0.3716768; 0.4782031)$ не являются экстремальными.*

Далее, при $k = 2$ проверим условие не экстремальности единственной меры μ_0, соответствующей единственному решению уравнения (2.2). В этом случае уравнение (3.4), после деления его на $s - 1$, превратится в квадратное уравнение

$$2z(\theta^4z+\theta+z)^2s^2 + 2z(\theta^4z+\theta-z)(\theta^4z+\theta+z)s + 2\theta(\theta^4-1)z^2 = 0,$$



(a)



(b)

Рис. 3. (a) график функции $|s_1| - |s_2|$; (b) график функции $2s_1^2 - 1$

т. е.

$$(\theta^4 z + \theta + z)^2 s^2 + (\theta^4 z + \theta - z)(\theta^4 z + \theta + z)s + \theta(\theta^4 - 1)z = 0,$$

дискриминант и решения которого имеют следующий вид:

$$D_3 = (\theta^4 z + \theta + z)^2(\theta^4 z - \theta - z)^2, \qquad s_1 = -\frac{(\theta^4 - 1)z}{\theta^4 z + \theta + z}, \qquad s_2 = -\frac{\theta}{\theta^4 z + \theta + z},$$

где z — решение уравнения (3.1). Найдем $\max\{|s_1|, |s_2|\}$:

$$|s_1| - |s_2| = \frac{|\theta^4 - 1|z}{\theta^4 z + \theta + z} - \frac{\theta}{\theta^4 z + \theta + z} = \frac{|\theta^4 - 1|z - \theta}{\theta^4 z + \theta + z}.$$

С помощью программы Maple можно увидеть, что при $\theta \in (0; 0.8191721) \cup (1.1192526; +\infty)$ $\max\{|s_1|, |s_2|\} = |s_1|$, а при $\theta \in (0.8191721; 1.1192526)$ $\max\{|s_1|, |s_2|\} = |s_2|$ (см. рис. 4, *b*).

Пусть $\theta \in (0; 0.8191721) \cup (1.1192526; +\infty)$. В этом случае проверим условие Кестена–Стигума не экстремальности меры μ_0: $2s_1^2 > 1$. С помощью формулы Кардано решим уравнение (2.2). Оно имеет одно вещественное решение:

$$z = \frac{1}{12}\frac{\sqrt[3]{A + 24\sqrt{3}\sqrt{B}\theta^5 + C}}{\theta^2} + \frac{1}{12}\frac{E}{\theta^2\sqrt[3]{A + 24\sqrt{3}\sqrt{B}\theta^5 + C}} + \frac{1}{12}\frac{F}{\theta^2}, \tag{3.5}$$

где

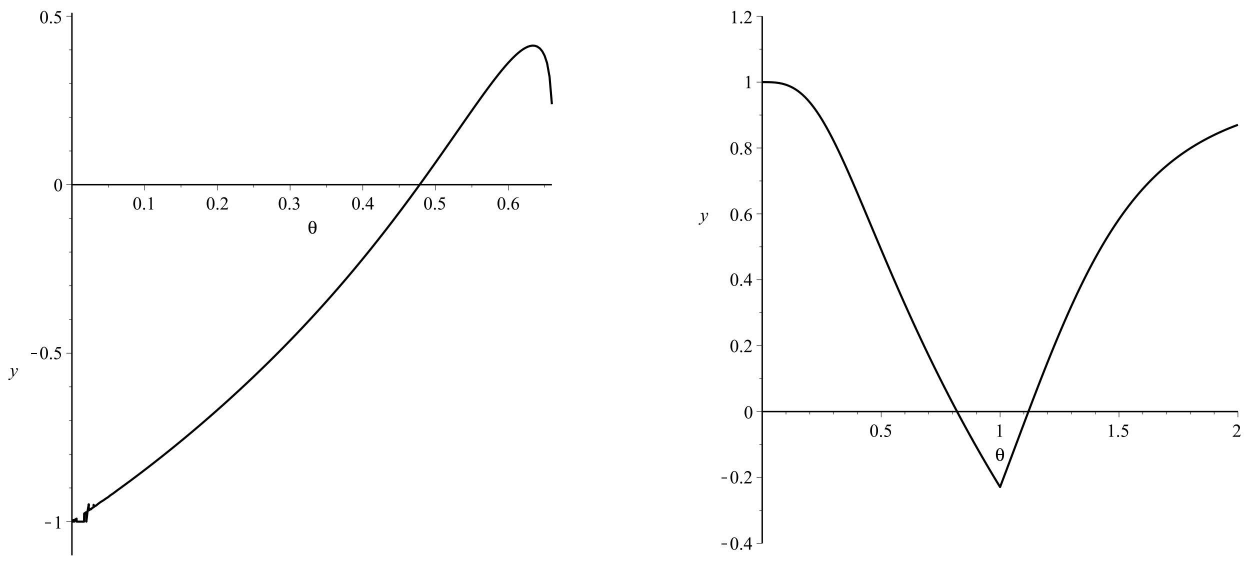
$$A = \theta^{24} + 6\theta^{20} + 15\theta^{16} + 36\theta^{15} + 20\theta^{12} + 108\theta^{11} + 15\theta^8,$$

$$B = \frac{\theta^{12} + 3\theta^8 + 3\theta^4 + 27\theta^3 + 1}{\theta},$$

$$C = 108\theta^7 + 216\theta^6 + 6\theta^4 + 36\theta^3 + 1,$$

$$E = \theta^{16} + 4\theta^{12} + 6\theta^8 + 24\theta^7 + 4\theta^4 + 24\theta^3 + 1,$$

$$F = \theta^8 + 2\theta^4 + 1.$$



(a) (b)

Рис. 4. (a) график функции $|s_1| - 1$; (b) график функции $|s_1| - |s_2|$

Чтобы определить интервал не экстремальности этой меры, проверим условие

$$2{s_1}^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{(\theta^4 - 1)z}{\theta^4 z + \theta + z} \right)^2 - 1 > 0,$$

где z имеет вид (3.5). С помощью программы Maple можно увидеть, что последнее неравенство верно при $\theta \in (0; 0.49329763) \cup (1.5955653; +\infty)$, то есть при этом условии мера μ_0 не является экстремальной (см. рис. 5, *a*).

Пусть теперь $0.8191721 < \theta < 1.1192526$. В этом случае $|s_1| < |s_2| < s_3 = 1$. Тогда условие не экстремальности меры μ_0: $2s_2^2 > 1$.

Чтобы определить интервал не экстремальности меры μ_0 в случае двойного неравенства $0.8191721 < \theta < 1.1192526$, проверим условие

$$2s_2^2 - 1 = 2 \left(\frac{\theta}{\theta^4 z + \theta + z} \right)^2 - 1 > 0,$$

где z имеет вид (3.5). С помощью программы Maple можно увидеть, что последнее неравенство не имеет решений, то есть при $0.8191721 < \theta < 1.1192526$ мера μ_0 заведомо является экстремальной (см. рис. 5, *b*). Это мы проверим в наших дальнейших исследованиях.

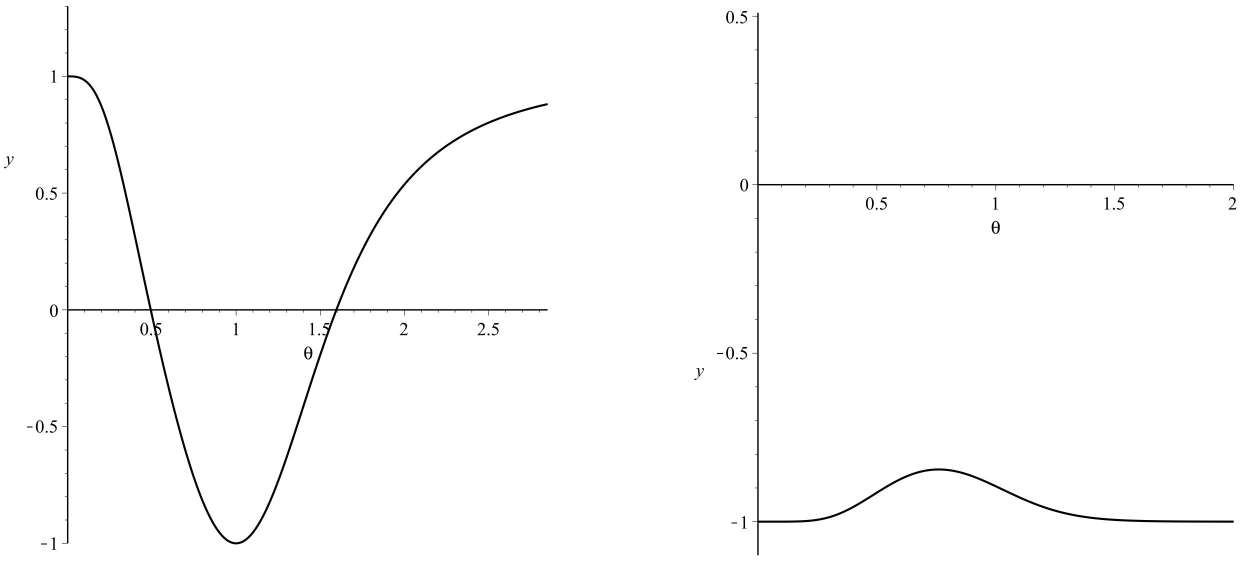
Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $k = 2$. *Тогда для НС-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» мера* μ_0 *при* $\theta \in (0; 0.49329763) \bigcup (1.5955653; +\infty)$ *не является экстремальной.*

§ 4. Условия экстремальности мер μ_0, μ_1, μ_2

Для исследования экстремальности известны методы из работы [38]. Проведем необходимые определения из работы [38]. Если удалить произвольное ребро $\langle x^0, x^1 \rangle = l \in L$ из дерева Кэли Γ^k, то оно разбивается на две компоненты $\Gamma^k_{x^0}$ и $\Gamma^k_{x^1}$, каждая из которых называется полубесконечным деревом или полудеревом Кэли.

Рассмотрим конечное полное поддерево $\Im$, которое содержит все начальные точки полудерева $\Gamma^k_{x^0}$. Граница $\partial\Im$ поддерева $\Im$ состоит из ближайших соседей его вершин, которые



(*a*) (*b*)

Рис. 5. (a) график функции $2s_1^2-1$; (b) график функции $2s_2^2-1$

лежат в $\Gamma^k_{x^0}\setminus\Im$. Мы отождествляем поддерево $\Im$ с множеством его вершин. Через $E(A)$ обозначим множество всех ребер A и ∂A.

В работе [38] введены две ключевые величины: κ и γ, которые играют важную роль для исследования экстремальности ТИМГ. Эти величины являются свойствами множества мер Гиббса $\{\mu^\tau_\Im\}$, где граничное условие τ фиксировано, и $\Im$ является произвольным начальным полным конечным поддеревом $\Gamma^k_{x^0}$. Для данного начального поддерева $\Gamma^k_{x^0}$ и вершины $x\in\Im$ мы будем писать $\Im_x$ для (максимального) поддерева $\Im$ с начальной точкой в x. Когда x не является начальной точкой $\Im$, через $\{\mu^s_\Im\}$ обозначим меру Гиббса, в которой «предок» x имеет спин s и конфигурация на нижней границе $\Im_x$ (то есть на $\partial\Im\setminus\{$«предок» $x\}$) задается через Γ.

Для двух мер на Ω через μ_1 и μ_2 обозначим расстояние по норме

$$\parallel\mu_1-\mu_2\parallel_x=\frac{1}{2}\sum_{i\in\{-1,0,+1\}}|\mu_1(\sigma(x)=i)-\mu_2(\sigma(x)=i)|.$$

Пусть $\eta^{x,s}$ есть конфигурация η со спином в x установленная в s.

Следуя [38], определим

$$\kappa\equiv\kappa(\mu)=\sup_{x\in\Gamma^k}\max_{x,s,s'}\parallel\mu^s_{\Im_x}-\mu^{s'}_{\Im_x}\parallel_x,$$

$$\gamma\equiv\gamma(\mu)=\sup_{A\subset\Gamma^k}\max_{y,s,s'}\parallel\mu^{\eta^{y,s}}_A-\mu^{\eta^{y,s'}}_A\parallel_x,$$

где максимум берется по всем граничным условиям η, всем $y\in\partial A$, всем соседям $x\in A$ вершины y и всем спинам $s,s'\in\{-1,0,1\}$.

Сначала найдем условие экстремальности меры μ_0.

Заметим, что κ имеет особенно простую формулу

$$\kappa=\frac{1}{2}\max\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{il}-P_{jl}|.$$

Отсюда ясно, что $|P_{il}-P_{jl}|=0$ при $i=j$. Используя [38], при $i\neq j$ вычислим

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{il}-P_{jl}|.$$

Если $i=-1$, $j=0$, то

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{-1l}-P_{0l}|=\frac{|(\theta^4-1)z+\theta\ |+|(\theta^4-1)z-\theta\ |+2\theta}{2(z+\theta+\theta^4z)}.$$

Получаем следующие случаи:

(1) если $\theta\in(0;0.8191725]$, то $(\theta^4-1)z+\theta\leqslant 0$ и $(\theta^4-1)z-\theta<0$ (см. рис. 6, *a*, *b*); тогда

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{-1l}-P_{0l}|=\frac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z};$$

(2) если $\theta\in(0.8191725;1.1192527]$, то $(\theta^4-1)z+\theta>0$ и $(\theta^4-1)z-\theta\leqslant 0$ (см. рис. 6, *a*, *b*); тогда

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{-1l}-P_{0l}|=\frac{2\theta}{z+\theta+\theta^4z};$$

(3) если $\theta\in(1.1192527;+\infty)$, то $(\theta^4-1)z+\theta>0$ и $(\theta^4-1)z-\theta>0$ (см. рис. 6, *a*, *b*); тогда

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{-1l}-P_{0l}|=\frac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}.$$

Если $i=-1$, $j=1$, то

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{-1l}-P_{1l}|=\frac{2|\theta^4-1|z}{z+\theta+\theta^4z}=\begin{cases}\dfrac{2(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4z}, & 0<\theta\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{2(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4z}, & \theta>1.\end{cases}$$

Если $i=0$, $j=1$, то как в случае $i=-1$, $j=0$

$$\sum_{l\in\{-1,0,1\}}|P_{0l}-P_{1l}|=\frac{|(\theta^4-1)z+\theta|+|(\theta^4-1)z-\theta|+2\theta}{2(z+\theta+\theta^4z)}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}, & 0<\theta\leqslant 0.8191725,\\[2mm] \dfrac{2\theta}{z+\theta+\theta^4z}, & 0.8191725<\theta\leqslant 1.1192527,\\[2mm] \dfrac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}, & \theta>1.1192527.\end{cases}$$

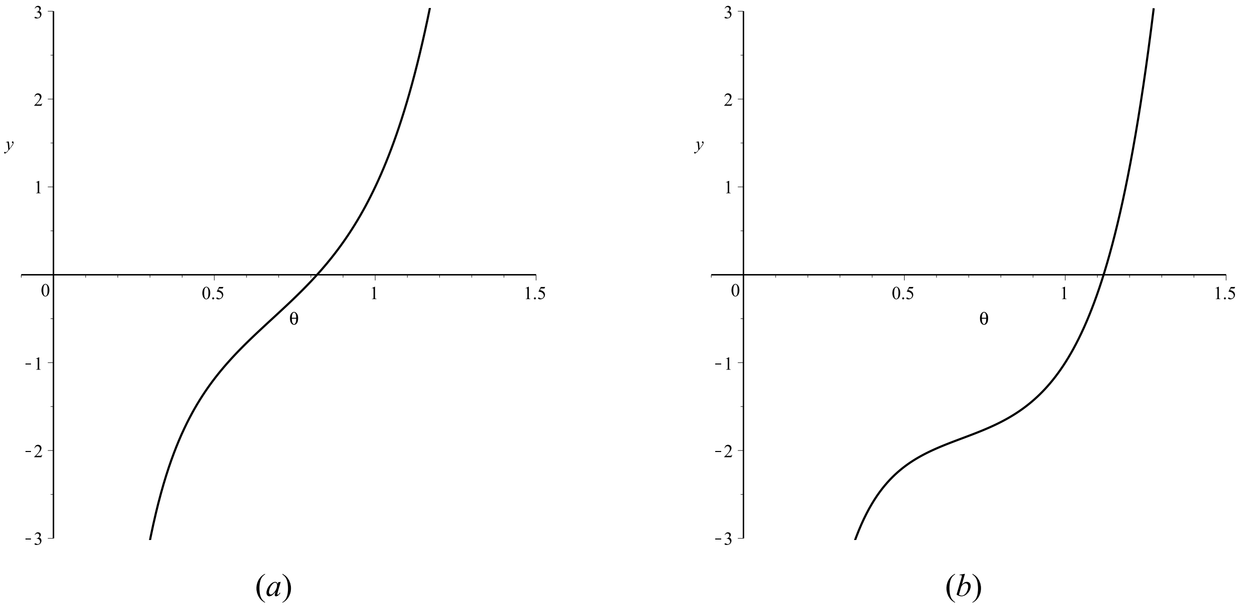


Рис. 6. (a) график функции $(\theta^4-1)z+\theta$; (b) график функции $(\theta^4-1)z-\theta$

Таким образом,

$$\sum_{l\in\{-1,0,+1\}}|P_{il}-P_{jl}|=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}, & 0<\theta\leqslant 0.8191725, \quad i,j=-1,0 \text{ или } i,j=0,1,\\ \dfrac{2\theta}{z+\theta+\theta^4z}, & 0.8191725<\theta\leqslant 1.1192527, \quad i,j=-1,0 \text{ или } i,j=0,1,\\ \dfrac{2(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4z}, & 0<\theta\leqslant 1, \quad i,j=-1,1,\\ \dfrac{2(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4z}, & \theta>1, \quad i,j=-1,1,\\ \dfrac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}, & \theta>1.1192527, \quad i,j=-1,0 \text{ или } i,j=0,1.\end{cases}$$

Найдем κ.

(1) При $0<\theta\leqslant 0.8191725$

$$\frac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}-\frac{2(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4z}=\frac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4z}\leqslant 0.$$

Тогда

$$\kappa=\frac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4z}.$$

(2) При $0.8191725<\theta\leqslant 1$

$$\frac{2\theta}{z+\theta+\theta^4z}-\frac{2(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4z}=\frac{2((\theta^4-1)z+\theta)}{z+\theta+\theta^4z}\geqslant 0.$$

Тогда

$$\kappa = \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z}.$$

(3) При $1 < \theta \leqslant 1.1192527$

$$\frac{2\theta}{z+\theta+\theta^4 z} - \frac{2(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z} = -\frac{2((\theta^4-1)z-\theta)}{z+\theta+\theta^4 z} \geqslant 0.$$

Тогда

$$\kappa = \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z}.$$

(4) При $\theta > 1.1192527$

$$\frac{2(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z} - \frac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z} = \frac{(\theta^4-1)z-\theta}{z+\theta+\theta^4 z} > 0.$$

Тогда

$$\kappa = \frac{(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z}.$$

Откуда получим, что

(1) при $0 < \theta \leqslant 0.8191725$

$$\kappa = \frac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(2) при $0.8191725 < \theta \leqslant 1.1192527$

$$\kappa = \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(3) при $\theta > 1.1192527$

$$\kappa = \frac{(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z}.$$

Теперь оценку для γ, подобно работе [38, с. 15], будем искать в следующем виде:

$$\gamma = \max\{\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \|_x, \| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \|_x, \| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \|_x\},$$

где

$$\begin{aligned}
\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \|_x &= \frac{1}{2} \sum_{s\in\{-1,0,+1\}} |\mu_A^{\eta^{y,1}}(\sigma(x)=s) - \mu_A^{\eta^{y,0}}(\sigma(x)=s)| = \\
&= \frac{1}{2}(|P_{1,-1} - P_{0,-1}| + |P_{1,0} - P_{0,0}| + |P_{1,1} - P_{0,1}|) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{|(\theta^4-1)z+\theta| + |(\theta^4-1)z-\theta| + 2\theta}{2(z+\theta+\theta^4 z)} = \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, & 0 < \theta \leqslant 0.8191725, \\ \dfrac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, & 0.8191725 < \theta \leqslant 1.1192527, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, & \theta > 1.1192527; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\parallel \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \parallel_x = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{-1,0,1\}} |P_{1,l} - P_{-1,l}| = \begin{cases} \dfrac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4 z}, & 0 < \theta \leqslant 1, \\ \dfrac{(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z}, & \theta > 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \parallel \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \parallel_x &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \{-1,0,+1\}} |P_{0,l} - P_{-1,l}| = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|(\theta^4-1)z+\theta\ | + |\ (\theta^4-1)z-\theta| + 2\theta}{2(z+\theta+\theta^4 z)} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, & 0 < \theta \leqslant 0.8191725, \\ \dfrac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, & 0.8191725 < \theta \leqslant 1.1192527, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, & \theta > 1.1192527. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

(1) при $0 < \theta \leqslant 0.8191725$ получим

$$\gamma = \max\left\{ \frac{1}{2}\frac{(1-\theta^4)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, \frac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4 z} \right\} = \frac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(2) при $0.8191725 < \theta \leqslant 1$ получим

$$\gamma = \max\left\{ \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, \frac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4 z} \right\} = \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(3) при $1 < \theta \leqslant 1.1192527$ получим

$$\gamma = \max\left\{ \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z}, \frac{(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z} \right\} = \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(4) при $\theta > 1.1192527$ получим

$$\gamma = \max\left\{ \frac{(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z}, \frac{1}{2}\frac{(\theta^4-1)z+\theta}{z+\theta+\theta^4 z} \right\} = \frac{(\theta^4-1)z}{z+\theta+\theta^4 z}.$$

Таким образом, получим, что

(1) при $0 < \theta \leqslant 0.8191725$

$$\gamma = \frac{(1-\theta^4)z}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(2) при $0.8191725 < \theta \leqslant 1.1192527$

$$\gamma = \frac{\theta}{z+\theta+\theta^4 z};$$

(3) при $\theta > 1.1192527$

$$\gamma = \frac{(\theta^4 - 1)z}{z + \theta + \theta^4 z}.$$

Теперь для меры μ_0 проверим условие экстремальности: $2\kappa\gamma < 1$.

(1) При $0 < \theta \leqslant 0.8191725$ это условие имеет вид

$$2\kappa\gamma - 1 = 2 \cdot \left(\frac{(1 - \theta^4)z}{z + \theta + \theta^4 z}\right)^2 - 1 < 0.$$

Это неравенство верно при $0.4932976 < \theta < 1.5955653$ (см. рис. 5, *a*). Тогда

$$0.4932976 < \theta \leqslant 0.8191725.$$

(2) При $0.8191725 < \theta \leqslant 1.1192527$ это условие имеет вид

$$2\kappa\gamma - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\theta}{z + \theta + \theta^4 z}\right)^2 - 1 < 0.$$

Это неравенство верно при $\theta > 0$ (см. рис. 5, *b*). Тогда

$$\theta \in (0.8191725; 1.1192527].$$

(3) При $\theta > 1.1192527$ это условие имеет вид

$$2\kappa\gamma - 1 = 2 \cdot \left(\frac{(\theta^4 - 1)z}{z + \theta + \theta^4 z}\right)^2 - 1 < 0.$$

Это неравенство верно при $0.4932976 < \theta < 1.5955653$ (см. рис. 5, *a*). Тогда

$$1.1192527 < \theta < 1.5955653.$$

Итак, верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $k = 2$. Тогда для НС-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» мера μ_0 при $0.4932976 < \theta < 1.5955653$ является экстремальной.*

Аналогичным методом для экстремальности мер μ_1, μ_2 можно получить следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $k = 2$. Тогда для НС-модели Блюма–Капеля в случае «обобщенный жезл» меры μ_1, μ_2 при $0.5526914 < \theta < \theta_{cr} \approx 0.6589252$ являются экстремальными.*

Замечание 1. Для мер μ_1, μ_2 при $\theta \in (0; 0.3716768) \cup (0.4782031; 0.5526914)$ задача (не)экстремальности пока остается открытой.

Благодарность.

Автор благодарит профессора У. А. Розикова за полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1992.
2. Preston C. J. Gibbs states on countable sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1974. https://doi.org/10.1017/CBO9780511897122
3. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
4. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific, 2013. https://doi.org/10.1142/8841
5. Mukhamedov F., Akin H., Khakimov O. Gibbs measures and free energies of Ising–Vannimenus model on the Cayley tree // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2017. Vol. 2017. Issue 5. 053208. https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa6c88
6. Akin H., Mukhamedov F. Phase transition for the Ising model with mixed spins on a Cayley tree // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2022. Vol. 2022. Issue 5. 053204. https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac68e4
7. Хатамов Н. М. Неединственность меры Гиббса для шаровой модели Изинга // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 180. № 3. С. 318–328. https://doi.org/10.4213/tmf8685
8. Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts–SOS model on the Cayley tree // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2021. Vol. 2021. Issue 7. 073201. https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac08ff
9. Мухамедов Ф. М., Рахматуллаев М. М., Расулова М. А. Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для λ-модели на бинарном дереве Кэли // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 210. № 3. С. 470–484. https://doi.org/10.4213/tmf10206
10. Mukhamedov F. Extremality of disordered phase of λ-model on Cayley trees // Algorithms. 2022. Vol. 15. Issue 1. Article number: 18. https://doi.org/10.3390/a15010018
11. Хатамов Н. М. Экстремальность мер Гиббса для модели HC-Блюма–Капеля на дереве Кэли // Математические заметки. 2022. Т. 111. Вып. 5. С. 762–777. https://doi.org/10.4213/mzm13217
12. Khrennikov A., Mukhamedov F. On uniqueness of Gibbs measure for p-adic countable state Potts model on the Cayley tree // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol. 71. Issue 11. P. 5327–5331. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.021
13. Мухамедов Ф., Акин Х. О p-адической модели Поттса на дереве Кэли порядка три // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 176. № 3. С. 513–528. https://doi.org/10.4213/tmf8522
14. Mukhamedov F., Khakimov O. Translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures for the Ising model on Cayley trees // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44. Issue 16. P. 12302–12316. https://doi.org/10.1002/mma.7088
15. Mukhamedov F., Pah Ch. H., Jamil H., Rahmatullaev M. On ground states and phase transition for λ-model with the competing Potts interactions on Cayley trees // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2020. Vol. 549. 124184. https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124184
16. Mukhamedov F. M., Rakhmatullaev M. M., Rasulova M. A. Weakly periodic ground states for the λ-model // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. Vol. 72. Issue 5. P. 771–784. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01826-6
17. Хатамов Н. М. Новые классы основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 180. № 1. С. 86–93. https://doi.org/10.4213/tmf8637
18. Mazel A. E., Suhov Yu. M. Random surfaces with two-sided constraints: An application of the theory of dominant ground states // Journal of Statistical Physics. 1991. Vol. 64. Nos. 1–2. P. 111–134. https://doi.org/10.1007/BF01057870
19. Suhov Yu. M., Rozikov U. A. A hard-core model on a Cayley tree: An example of a loss network // Queueing Systems. 2004. Vol. 46. Nos. 1–2. P. 197–212. https://doi.org/10.1023/B:QUES.0000021149.43343.05
20. Martin J. B. Reconstruction thresholds on regular trees // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2003. P. 191–204. https://doi.org/10.46298/dmtcs.3325
21. Хакимов Р. М. Единственность слабо периодической гиббсовской меры для HC-модели // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 5. С. 796–800. https://doi.org/10.4213/mzm9687

22. Khakimov R. M. Weakly periodic Gibbs measures in the HC-model for a normal divisor of index four // Ukrainian Mathematical Journal. 2015. Vol. 67. Issue 10. P. 1584–1598. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1174-9
23. Хакимов Р. М. Слабо периодические меры Гиббса для HC-моделей на дереве Кэли // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59. № 1. С. 185–196. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.116
24. Brightwell G. R., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1999. Vol. 77. Issue 2. P. 221–262. https://doi.org/10.1006/jctb.1999.1899
25. Martin J. B., Rozikov U. A., Suhov Yu. M. A three state hard-core model on a Cayley tree // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2005. Vol. 12. Issue 3. P. 432–448. https://doi.org/10.2991/jnmp.2005.12.3.7
26. Розиков У. А., Шоюсупов Ш. А. Плодородные HC-модели с тремя состояниями на дереве Кэли // Теоретическая и математическая физика. 2008. Т. 156. № 3. С. 412–424. https://doi.org/10.4213/tmf6256
27. Хакимов Р. М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей “hard core” с тремя состояниями на дереве Кэли // Теоретическая и математическая физика. 2015. Т. 183. № 3. С. 441–449. https://doi.org/10.4213/tmf8700
28. Rozikov U. A., Khakimov R. M. Gibbs measures for the fertile three-state hard-core models on a Cayley tree // Queueing Systems. 2015. Vol. 81. Issue 1. P. 49–69. https://doi.org/10.1007/s11134-015-9450-1
29. Cirillo E. N. M., Olivieri E. Metastability and nucleation for the Blume–Capel model. Different mechanisms of transition // Journal of Statistical Physics. 1996. Vol. 83. Issues 3–4. P. 473–554. https://doi.org/10.1007/BF02183739
30. Theodorakis P. E., Fytas N. G. Monte Carlo study of the triangular Blume–Capel model under bond randomness // Physical Review E. 2012. Vol. 86. Issue 1. 011140. https://doi.org/10.1103/PHYSREVE.86.011140
31. Kim S. Metastability of Blume–Capel model with zero chemical potential and zero external field // Journal of Statistical Physics. 2021. Vol. 184. Issue 3. Article number: 33. https://doi.org/10.1007/s10955-021-02823-0
32. Khatamov N. M., Khakimov R. M. Translation-invariant Gibbs measures for the Blume–Capel model on a Cayley tree // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2019. Vol. 15. No. 2. P. 239–255. https://doi.org/10.15407/mag15.02.239
33. Khatamov N. M. Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume–Capel model with wand on a Cayley tree // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. Vol. 72. No. 4. P. 623–641. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01804-y
34. Хатамов Н. М. Структуры Холлидея в модели Блюма–Капеля молекулы ДНК // Теоретическая и математическая физика. 2021. Т. 206. № 3. С. 439–447. https://doi.org/10.4213/tmf9865
35. Khatamov N. M. Holliday junctions in the HC Blume–Capel model in “one case” on DNA // Nanosytems: physics, chemisry, mathematics. 2021. Vol. 12. No. 5. P. 563–568. https://doi.org/10.17586/2220-8054-2021-12-5-563-568
36. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2001.
37. Kesten H., Stigum B. P. Additional limit theorems for indecomposable multidimensional Galton–Watson processes // The Annals of Mathematical Statistics. 1966. Vol. 37. Issue 6. P. 1463–1481. https://doi.org/10.1214/AOMS/1177699139
38. Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. Fast mixing for independent sets, colorings, and other models on trees // Random Structures and Algoritms. 2007. Vol. 31. Issue 2. P. 134–172. https://doi.org/10.1002/rsa.20132
39. Külske C., Rozikov U. A. Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree // Random Structures and Algoritms. 2017. Vol. 50. Issue 4. P. 636–678. https://doi.org/10.1002/rsa.20671

Поступила в редакцию 19.04.2022

Принята к публикации 28.05.2022

Хатамов Носир Муйдинович, к. ф.-м. н., кафедра математического анализа, Наманганский государственный университет, 160119, Узбекистан, г. Наманган, ул. Уйчинская, 316;
докторант, Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2902-7982
E-mail: nxatamov@mail.ru

Цитирование: Н. М. Хатамов. Экстремальность некоторых мер Гиббса для *HC*-модели Блюма–Капеля на дереве Кэли // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 256–277.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 2. Pp. 256–277.

N. M. Khatamov

Extremality of some Gibbs measures for the Blume–Capel HC-model on a Cayley tree

Keywords: Cayley tree, configuration, Blume–Capel HC-model, Gibbs measure, translation-invariant measures, extreme measure.

MSC2020: 82B05, 82B20, 60K35

DOI: 10.35634/vm220207

In this paper, we consider translation-invariant Gibbs measures (TIGM) for the Blume–Capel HC-model in the case of a "generalized wand" on a second-order Cayley tree. An approximate critical value of θ_{cr} is found such that for $\theta \geqslant \theta_{cr}$ there is only one TIGM, and for $0 < \theta < \theta_{cr}$ there are exactly three TIGMs in the case of "generalized wand" for the model under consideration. In addition, the (non)extreme problem for these measures is studied.

REFERENCES

1. Georgii H.-O. *Gibbs measures and phase transitions*, Berlin: De Gruyter, 2011. https://doi.org/10.1515/9783110250329
2. Preston C. J. *Gibbs states on countable sets*, Cambridge: Cambridge University Press, 1974. https://doi.org/10.1017/CBO9780511897122
3. Sinai Ya. G. *Theory of phase transitions. Rigorous results*, Oxford: Pergamon, 1982. https://doi.org/10.1016/C2013-0-03460-3
4. Rozikov U. A. *Gibbs measures on Cayley trees*, World Scientific, 2013. https://doi.org/10.1142/8841
5. Mukhamedov F., Akin H., Khakimov O. Gibbs measures and free energies of Ising–Vannimenus model on the Cayley tree, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017, vol. 2017, issue 5, 053208. https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa6c88
6. Akin H., Mukhamedov F. Phase transition for the Ising model with mixed spins on a Cayley tree, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2022, vol. 2022, issue 5, 053204. https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac68e4
7. Khatamov N. M. Nonuniqueness of a Gibbs measure for the Ising ball model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2014, vol. 180, no. 3, pp. 1030–1039. https://doi.org/10.1007/s11232-014-0197-3
8. Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts–SOS model on the Cayley tree, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2021, vol. 2021, issue 7, 073201. https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac08ff
9. Mukhamedov F. M., Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the λ-model on the binary Cayley tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022, vol. 210, no. 3, pp. 411–424. https://doi.org/10.1134/S0040577922030114
10. Mukhamedov F. Extremality of disordered phase of λ-model on Cayley trees, *Algorithms*, 2022, vol. 15, issue 1, article number: 18. https://doi.org/10.3390/a15010018
11. Khatamov N. M. Extremity of the Gibbs measures for the HC-Blume–Capel model on the Cayley tree, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 111, no. 5, pp. 768–781. https://doi.org/10.1134/S000143462205011X
12. Khrennikov A., Mukhamedov F. On uniqueness of Gibbs measure for p-adic countable state Potts model on the Cayley tree, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, vol. 71, issue 11, pp. 5327–5331. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.021
13. Mukhamedov F., Akin H. The p-adic Potts model on the Cayley tree of order three, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 176, issue 3, pp. 1267–1279. https://doi.org/10.1007/s11232-013-0105-2
14. Mukhamedov F., Khakimov O. Translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures for the Ising model on Cayley trees, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, issue 16, pp. 12302–12316. https://doi.org/10.1002/mma.7088

15. Mukhamedov F., Pah Ch. H., Jamil H., Rahmatullaev M. On ground states and phase transition for λ-model with the competing Potts interactions on Cayley trees, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, vol. 549, 124184. https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124184
16. Mukhamedov F. M., Rakhmatullaev M. M., Rasulova M. A. Weakly periodic ground states for the λ-model, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 72, issue 5, pp. 771–784. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01826-6
17. Khatamov N. M. New classes of ground states for the Potts model with random competing interactions on a Cayley tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2014, vol. 180, no. 1, pp. 827–834. https://doi.org/10.1007/s11232-014-0182-x
18. Mazel A. E., Suhov Yu. M. Random surfaces with two-sided constraints: An application of the theory of dominant ground states, *Journal of Statistical Physics*, 1991, vol. 64, nos. 1–2, pp. 111–134. https://doi.org/10.1007/BF01057870
19. Suhov Yu. M., Rozikov U. A. A hard-core model on a Cayley tree: An example of a loss network, *Queueing Systems*, 2004, vol. 46, nos. 1–2, pp. 197–212. https://doi.org/10.1023/B:QUES.0000021149.43343.05
20. Martin J. B. Reconstruction thresholds on regular trees, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2003, pp. 191–204. https://doi.org/10.46298/dmtcs.3325
21. Khakimov R. M. Uniqueness of weakly periodic Gibbs measure for HC-models, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 5, pp. 834–838. https://doi.org/10.1134/S0001434613110199
22. Khakimov R. M. Weakly periodic Gibbs measures in the HC-model for a normal divisor of index four, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2015, vol. 67, issue 10, pp. 1584–1598. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1174-9
23. Khakimov R. M. Weakly periodic Gibbs measures for HC-models on Cayley trees, *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 1, pp. 147–156. https://doi.org/10.1134/S0037446618010160
24. Brightwell G. R., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1999, vol. 77, issue 2, pp. 221–262. https://doi.org/10.1006/jctb.1999.1899
25. Martin J. B., Rozikov U. A., Suhov Yu. M. A three state hard-core model on a Cayley tree, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2005, vol. 12, issue 3, pp. 432–448. https://doi.org/10.2991/jnmp.2005.12.3.7
26. Rozikov U. A., Soyusupov Sh. A. Fertile HC-models with three states on a Cayley tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2008, vol. 156, no. 3, pp. 1319–1330. https://doi.org/10.1007/s11232-008-0109-5
27. Khakimov R. M. Translation-invariant Gibbs measures for fertile three-state “hard core” models on a Cayley tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2015, vol. 183, no. 3, pp. 829–835. https://doi.org/10.1007/s11232-015-0299-6
28. Rozikov U. A., Khakimov R. M. Gibbs measures for the fertile three-state hard-core models on a Cayley tree, *Queueing Systems*, 2015, vol. 81, issue 1, pp. 49–69. https://doi.org/10.1007/s11134-015-9450-1
29. Cirillo E. N. M., Olivieri E. Metastability and nucleation for the Blume–Capel model. Different mechanisms of transition, *Journal of Statistical Physics*, 1996, vol. 83, issues 3–4, pp. 473–554. https://doi.org/10.1007/BF02183739
30. Theodorakis P. E., Fytas N. G. Monte Carlo study of the triangular Blume–Capel model under bond randomness, *Physical Review E*, 2012, vol. 86, issue 1, 011140. https://doi.org/10.1103/PHYSREVE.86.011140
31. Kim S. Metastability of Blume–Capel model with zero chemical potential and zero external field, *Journal of Statistical Physics*, 2021, vol. 184, issue 3, article number: 33. https://doi.org/10.1007/s10955-021-02823-0
32. Khatamov N. M., Khakimov R. M. Translation-invariant Gibbs measures for the Blume–Capel model on a Cayley tree, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2019, vol. 15, no. 2, pp. 239–255. https://doi.org/10.15407/mag15.02.239
33. Khatamov N. M. Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume–Capel model with wand on a Cayley tree, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 72, no. 4, pp. 623–641.

https://doi.org/10.1007/s11253-020-01804-y

34. Khatamov N. M. Holliday junctions in the Blume–Capel model of DNA, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2021, vol. 206, no. 3, pp. 383–390. https://doi.org/10.1134/S0040577921030090
35. Khatamov N. M. Holliday junctions in the HC Blume–Capel model in “one case” on DNA, *Nanosytems: Physics, Chemisry, Mathematics*, 2021, vol. 12, no. 5, pp. 563–568. https://doi.org/10.17586/2220-8054-2021-12-5-563-568
36. Prasolov V. V. *Polynomials*, Berlin: Springer, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5
37. Kesten H., Stigum B. P. Additional limit theorems for indecomposable multidimensional Galton–Watson processes, *The Annals of Mathematical Statistics*, 1966, vol. 37, issue 6, pp. 1463–1481. https://doi.org/10.1214/AOMS/1177699139
38. Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. Fast mixing for independent sets, colorings, and other models on trees, *Random Structures and Algoritms*, 2007, vol. 31, issue 2, pp. 134–172. https://doi.org/10.1002/rsa.20132
39. Külske C., Rozikov U. A. Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree, *Random Structures and Algoritms*, 2016, vol. 50, issue 4, pp. 636–678. https://doi.org/10.1002/rsa.20671

Received 19.04.2022

Accepted 28.05.2022

Nosir Muydinovich Khatamov, Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis, Namangan State University, ul. Uychi, 316, Namangan, 160119, Uzbekistan;
Doctoral Student, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, ul. Universitetskaya, 9, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2902-7982
E-mail: nxatamov@mail.ru

Citation: N. M. Khatamov. Extremality of some Gibbs measures for the Blume–Capel HC-model on a Cayley tree, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 256–277.