МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 240–255.

УДК 517.956

© *А. К. Уринов, М. С. Азизов*

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В данной статье для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольной области сформулированы две нелокальные начально-граничные задачи. Исследована корректность одной из поставленных задач. При этом применением метода разделения переменных к изучаемой задаче получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого четного порядка. Доказана самосопряженность последней задачи, откуда следует существование системы ее собственных функций, а также ортонормированность и полнота этой системы. Далее, построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. С помощью этого интегрального уравнения и теоремы Мерсера исследована равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Установлен порядок коэффициентов Фурье. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Доказана равномерная сходимость этого ряда, а также рядов, полученных из него почленным дифференцированием. Методом спектрального анализа доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение четного порядка, нелокальная задача, функция Грина, интегральное уравнение.

DOI: 10.35634/vm220206

§ 1. Введение. Постановка задач

Теория дифференциальных уравнений в частных производных, в силу многочисленных приложений в науке и технике (см. например, [1–5]), развивается быстрыми темпами в различных направлениях. В настоящее время исследователи все чаще обращают внимание на дифференциальные уравнения в частных производных высокого четного порядка. Вышли из печати многочисленные научные работы, в которых сформулированы и изучены начальные и начально-граничные задачи для таких уравнений. Например, в работах [6, 7] для уравнений четвертого порядка, а в работах [8,9] для уравнений произвольного высокого четного порядка, содержащих соответственно сингулярный коэффициент и дифференциальный оператор Римана–Лиувилля дробного порядка по временной переменной, исследованы начальные задачи в полуплоскости и найдены формулы решения изученных задач. В работах [10–16] для уравнений четвертого порядка в прямоугольнике исследована однозначная разрешимость начально-граничных задач с различными локальными краевыми условиями на боковых сторонах прямоугольника.

Очевидно, что при рассмотрении начально-граничных задач для дифференциальных уравнений высокого четного порядка в прямоугольнике, с ростом порядка производной по пространственной переменной x, увеличивается количество вариантов граничных условий, задаваемых на боковых сторонах прямоугольника. В этой связи здесь появляется проблема выделения граничных условий, в которых соответствующие начально-граничные задачи для рассматриваемого дифференциального уравнения были бы однозначно разрешимыми. В работах [17–21] для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике $D = \{(x,t)\colon 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ предложено несколько вариантов таких граничных условий. А именно, в работах [17, 18] в прямоугольнике D исследованы начально-граничные задачи для уравнений

$$\left(\partial^2 u/\partial t^2\right) \mp \left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right) = f(x,t), \quad k \geqslant 2,$$

со следующими двумя вариантами граничных условий:

$$\begin{gathered}\left(\partial^{2m}/\partial x^{2m}\right) u\,(0,t) = \left(\partial^{2m}/\partial x^{2m}\right) u\,(l,t) = 0, \quad m = \overline{0,k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T;\\ \left(\partial^{2m+1}/\partial x^{2m+1}\right) u\,(0,t) = \left(\partial^{2m+1}/\partial x^{2m+1}\right) u\,(l,t) = 0, \quad m = \overline{0,k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T;\end{gathered} \tag{1.1}$$

а в работе [19] для уравнения

$$\left(\partial^{2k} u/\partial t^{2k}\right) - \left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right) = 0$$

исследована задача с граничными условиями

$$\left(\partial^{m}/\partial x^{m}\right) u\,(0,t) = \left(\partial^{m}/\partial x^{m}\right) u\,(l,t) = 0, \quad m = \overline{0,k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В работах [20, 21] для уравнения

$$\left(\partial^2 u/\partial t^2\right) + (2\gamma/t)\left(\partial u/\partial t\right) + (-1)^k \left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right) = f\,(x,t)$$

в области D при $l = 1$ соответственно поставлены начально-граничные задачи со следующими группами граничных условий:

$$\begin{gathered}\left(\partial^{m}/\partial x^{m}\right) u\,(0,t) = \left(\partial^{k+m}/\partial x^{k+m}\right) u\,(1,t) = 0, \quad m = \overline{0,k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T;\\ \left(\partial^{2m}/\partial x^{2m}\right) u\,(0,t) = \left(\partial^{2m+1}/\partial x^{2m+1}\right) u\,(1,t) = 0, \quad m = \overline{0,k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Задачи с условиями вида (1.1) по переменным x и t изучены также в работах [22] и [23] соответственно для уравнений

$$\left(\partial^{2k} u/\partial t^{2k}\right) - \left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right) = 0$$

и

$$(-1)^k \left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right) + (-1)^n \left(\partial^{2n} u/\partial t^{2n}\right) + qu = \lambda u,$$

а также для уравнения смешанного типа

$$\left(\partial^{2n} u/\partial x^{2n}\right) + \operatorname{sign} t \left(\partial^{2n} u/\partial t^{2n}\right) = 0$$

в [24]. В работе [25] рассмотрены задачи с краевыми условиями типа (1.2) для параболического уравнения

$$\left(\partial u/\partial t\right) + (-1)^k \left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right) = f\,(x,t).$$

В работе [26] изучена разрешимость начально-краевых задач с условиями типа (1.2) по временной переменной для одного класса уравнений составного (соболевского) типа второго порядка по пространственным переменным и $2k$-го порядка по временной переменной.

Как видно, во всех работах, перечисленных выше, начально-граничные задачи изучены лишь с несколькими вариантами локальных граничных условий. Более того, существует ограниченное количество работ, в которых рассмотрены начально-граничные задачи с нелокальными граничными условиями. Например, в работе [27] для квазилинейного уравнения

$$\left(\partial^2 u/\partial t^2\right)-a^2\left(\partial^{2k} u/\partial x^{2k}\right)=f\,(t,x,u) \text{ в } D_T=\{(t,x):0<t<T,\ 0<x<\pi\}$$

рассмотрена задача с периодическими условиями вида

$$\left(\partial^j u/\partial x^j\right)\big|_{x=0}=\left(\partial^j u/\partial x^j\right)\big|_{x=\pi}, \qquad j=0,1,\ldots,2k-1, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

В работах [28] и [29] в четырехугольнике доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенного решения одной задачи с нелокальными условиями как по пространственной переменной x, так и по временной переменной t, для линейных уравнений высшего порядка смешанного и параболического типов соответственно, а в работе [30] для одного многомерного уравнения изучена задача с нелокальными условиями по t в области $[0,T]\times Q$, где $Q\subset\mathbb{R}^n$.

Из приведенного выше анализа следует, что начально-граничные задачи как с локальными, так и с нелокальными граничными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка остаются малоизученными.

В настоящей работе в области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассматривается уравнение в частных производных высокого четного порядка вида

$$B^t_{\gamma-1/2}\,u+(-1)^k\left(\partial^{2k}u/\partial x^{2k}\right)=f\,(x,t), \tag{1.3}$$

где $B^t_{\gamma-1/2}\equiv\partial^2/\partial t^2+(2\gamma/t)\,\partial/\partial t$ — оператор Бесселя [31,32], а $\gamma=\mathrm{const}\in[0,1/2]$.

Отметим, что в работах [33–37] рассматривались уравнения вида $B^t_{\gamma-1/2}u=Au+f$ при $t>0$, где A — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E, и при различных значениях γ исследованы задачи Коши, а также сингулярная задача Коши, и найдены представления решения рассмотренных задач. В данной работе для уравнения (1.3) в области Ω сформулируем некоторые начально-граничные задачи с нелокальными граничными условиями на боковых сторонах четырехугольника Ω и исследуем их методом Фурье.

Задача A_{pq}**.** *Найти функцию* $u(x,t)\in C^{2k-1,0}_{x,t}\left(\bar\Omega\right)\cap C^{2k,2}_{x,t}\left(\Omega\right)$*, удовлетворяющую в области* Ω *уравнению* (1.3)*, а на границе области* Ω *следующим начальным и граничным условиям:*

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1; \qquad \lim_{t\to+0}t^{2\gamma}u_t(x,t)=\varphi_2(x), \quad 0<x<1; \tag{1.4}$$

$$p\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(0,t)=q\frac{\partial^j}{\partial x^j}u(1,t), \quad q\frac{\partial^{k+j}}{\partial x^{k+j}}u(0,t)=p\frac{\partial^{k+j}}{\partial x^{k+j}}u(1,t), \quad j=\overline{0,k-1}, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.5}$$

где $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *— заданные непрерывные функции,* p *и* q *— заданные действительные числа, причем* $p^2+q^2\neq 0$.

Задача B_{pq}**.** *Найти функцию* $u(x,t)$*, удовлетворяющую всем условиям задачи* A_{pq}*, когда условия* (1.5) *заменены на условия*

$$\begin{gathered}p\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(0,t)=q\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(1,t), \qquad q\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u(0,t)=p\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u(1,t),\\ j=\overline{0,k-1}, \qquad 0\leqslant t\leqslant T.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Поставленные задачи интересны тем, что из них при $p=q$ и $p=-q$ соответственно следуют задачи с периодическими и антипериодическими условиями. Кроме того, из задач A_{pq} и B_{pq} при $q=0$ соответственно следуют локальные задачи, рассмотренные в [20] и [21]. Произведя замену $x=1-\xi$, нетрудно убедиться, что задачи A_{pq} и B_{pq} в случае $p=0$ эквивалентно сводятся к случаю $q=0$. Поэтому здесь предположим, что $pq\neq 0$ и исследуем существование, единственность и устойчивость решения задачи A_{pq}. Исследование задачи B_{pq} проводится аналогично.

§ 2. Исследование спектральной задачи

Применяя метод Фурье (разделение переменных) к задаче A_{pq}, получим следующую спектральную задачу:

$$Mv \equiv (-1)^k v^{(2k)}(x) = \lambda v(x), \qquad 0 < x < 1; \tag{2.1}$$

$$pv^{(j)}(0) = qv^{(j)}(1), \qquad qv^{(k+j)}(0) = pv^{(k+j)}(1), \qquad j = \overline{0, k-1}. \tag{2.2}$$

Пусть $v(x)$, $w(x) \in C^{2k-1}[0,1] \cap C^{2k}(0,1)$ и $v^{(2k)}(x)$, $w^{(2k)}(x) \in L_2[0,1]$. Тогда интегрированием по частям нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\begin{gathered}\int_0^1 wMv\,dx = \int_0^1 vMw\,dx + (-1)^k[wv^{(2k-1)} - w'v^{(2k-2)} + \ldots + \\ + \ldots + (-1)^{k-1}w^{(k-1)}v^{(k)} + (-1)^k w^{(k)}v^{(k-1)} + \ldots + (-1)^{2k-1}w^{(2k-1)}v]\Big|_{x=0}^{x=1}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что если функции $v(x)$ и $w(x)$ удовлетворяют условиям (2.2), то внеинтегральные члены в (2.3) исчезают. В итоге получим равенство $\displaystyle\int_0^1 wMv\,dx = \int_0^1 vLw\,dx$, откуда следует, что задача (2.1), (2.2) самосопряжена при $\lambda = 0$.

Далее, умножая уравнение (2.1) на функцию $v(x)$, а затем интегрируя по x на отрезке $[0,1]$, имеем

$$\lambda \int_0^1 v^2(x)\,dx = (-1)^k \int_0^1 v^{(2k)}(x)v(x)\,dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям k раз к интегралу, стоящему в левой части равенства, и принимая во внимание условия (2.2), получим

$$\lambda \int_0^1 v^2(x)\,dx = \int_0^1 \left[v^{(k)}(x)\right]^2 dx. \tag{2.4}$$

Отсюда, при $v(x) \not\equiv 0$, $x \in [0,1]$, следует, что $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 0$, то из (2.4) следует, что $v^{(k)}(x) = 0$, $x \in (0,1)$. Из этого уравнения, в силу условий $pv^{(j)}(0) = qv^{(j)}(1)$, $j = \overline{0, k-1}$, при $p \neq q$ следует, что $v(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$.

Следовательно, задача (2.1), (2.2), при выполнении условия $p \neq q$, может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$. Поэтому далее предположим, что $p \neq q$.

Тогда, согласно теории самосопряженных дифференциальных операторов [38], задача (2.1), (2.2) имеет счетное число собственных значений

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lambda_n \to +\infty,$$

и соответствующие им собственные функции

$$v_1(x), v_2(x), v_3(x), \ldots, v_n(x), \ldots,$$

образующие полную в пространстве $L_2(0,1)$ ортонормированную систему, и любая функция $g(x) \in L_2(0,1)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям.

Теперь построим функцию Грина задачи (2.1), (2.2). Принимая во внимание общее решение уравнения $Mv = 0$, ищем ее в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} a_1 \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + a_2 \dfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots + a_k \dfrac{x^k}{k!} + \ldots + a_{2k-1}\dfrac{x}{1!} + a_2 k, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ b_1 \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + b_2 \dfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots + b_k \dfrac{x^k}{k!} + \ldots + b_{2k-1}\dfrac{x}{1!} + b_{2k}, & s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

где a_j и b_j, $j=\overline{1,2k}$ — неизвестные постоянные, которые подлежат определению.

Функция Грина $G(x,s)$ должна удовлетворять следующим условиям.

1. Как функция переменного x при любых $s\in(0,1)$ удовлетворяет условиям (2.2);
2. На каждом из интервалов $(0,s)$ и $(s,1)$ существуют непрерывные производные $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$, $j=\overline{1,2k}$, причем:
   а) $G(x,s)$ и $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$, $j=\overline{1,2k-2}$, непрерывны при $x=s$;
   б) $(\partial^{2k-1}/\partial x^{2k-1})G(x,s)$ при $x=s$ имеет скачок $(-1)^k$, т. е.
   $$(\partial^{2k-1}/\partial x^{2k-1})G(s+0,s)-(\partial^{2k-1}/\partial x^{2k-1})G(s-0,s)=(-1)^k;$$
   в) $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x,s)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при $x\in(0,s)\cup(s,1)$.

Подчиняя функцию (2.5) условиям 2, а) и 2, б) функции Грина, получаем следующую систему уравнений

$$b_1-a_1=(-1)^k,\qquad \sum_{j=0}^{2k-1-m}\frac{s^j}{j!}(b_{2k-m-j}-a_{2k-m-j})=0,\qquad m=\overline{0,2k-2}.$$

Решение этой системы уравнений единственно, и оно определяется равенствами

$$c_j=b_j-a_j=(-1)^{k+j-1}\frac{s^{j-1}}{(j-1)!},\qquad j=\overline{1,2k}. \tag{2.6}$$

Подчиняя функцию (2.5) граничным условиям (2.2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} pa_j-qb_j=\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{qb_n}{(j-n)!}, & j=\overline{k+1,2k},\\ qa_j-pb_j=\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{pb_n}{(j-n)!}, & j=\overline{2,k},\\ qa_1-pb_1=0. \end{cases}$$

Из последней системы и (2.6) однозначно находим коэффициенты a_j и b_j:

$$\begin{cases} a_1=-(-1)^{k-1}p/(q-p),\\ b_1=-(-1)^{k-1}q/(q-p); \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} a_j=\dfrac{1}{q-p}\left[p(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{pb_n}{(j-n)!}\right],\\ b_j=\dfrac{1}{q-p}\left[q(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{pb_n}{(j-n)!}\right], \end{cases}\qquad j=\overline{2,k}; \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} a_j=-\dfrac{1}{q-p}\left[q(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{qb_n}{(j-n)!}\right],\\ b_j=-\dfrac{1}{q-p}\left[p(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{qb_n}{(j-n)!}\right], \end{cases}\qquad j=\overline{k+1,2k}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.7)–(2.9) в (2.5), находим функцию Грина задачи (2.1), (2.2):

$$G(x,s)=$$
$$=\begin{cases} \dfrac{(-1)^k p}{q-p}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)}+\dfrac{1}{q-p}\sum\limits_{j=2}^{k}\left[p(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{pb_n}{(j-n)!}\right]\dfrac{x^{2k-j}}{(2k-j)}- \\ -\dfrac{1}{q-p}\sum\limits_{j=k+1}^{2k}\left[q(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{qb_n}{(j-n)!}\right]\dfrac{x^{2k-j}}{(2k-j)}, & 0\leqslant x\leqslant s, \\ \dfrac{(-1)^k q}{q-p}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)}+\dfrac{1}{q-p}\sum\limits_{j=2}^{k}\left[q(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{pb_n}{(j-n)!}\right]\dfrac{x^{2k-j}}{(2k-j)}- \\ -\dfrac{1}{q-p}\sum\limits_{j=k+1}^{2k}\left[p(-1)^{k+j-1}\dfrac{s^{j-1}}{(j-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{j-1}\dfrac{qb_n}{(j-n)!}\right]\dfrac{x^{2k-j}}{(2k-j)}, & s\leqslant x\leqslant 1, \end{cases} \tag{2.10}$$

где b_j, $j=\overline{1,2k}$, — числа, определяемые равенствами (2.7), (2.8), (2.9).

Теперь нетрудно убедиться, что задача (2.1), (2.2) эквивалентна следующему интегральному уравнению [38]

$$v(x)=\lambda\int_0^1 G(x,s)v(s)\,ds. \tag{2.11}$$

§ 3. Вспомогательные леммы

Доказываемые ниже леммы существенно используются при доказательстве существования решения задачи A_{pq}. При этом, как и в § 2, предположим, что $p\neq q$.

Лемма 1. *Следующие ряды равномерно сходятся на* $[0,1]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[v_n^{(j)}(x)\right]^2}{\lambda_n^2},\quad j=\overline{1,2k-1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[v_n^{(2k)}(x)\right]^2}{\lambda_n^3}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ядро $G(x,s)$ интегрального уравнения (2.11) непрерывно, то согласно теореме Мерсера [39], справедливо равенство:

$$G(x,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n(x)v_n(s)}{\lambda_n}.$$

Отсюда, в силу непрерывности ядра $G(x,s)$, в частности при $x=s$, следует равенство

$$G(x,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}=M=\text{const}<+\infty, \tag{3.2}$$

откуда следует, что первый ряд в (3.1) сходится равномерно.

Далее, согласно (2.11), справедливы следующие равенства:

$$\frac{v_n^{(j)}(x)}{\lambda_n}=\int_0^1\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)v_n(s)\,ds,\qquad j=\overline{1,2k-1}.$$

Так как $\{v_n(s)\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система, то из последнего равенства следует, что $v_n^{(j)}(x)/\lambda_n$ является коэффициентом Фурье функции $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$ по аргументу s.

Тогда, учитывая непрерывность функций $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$, $j=\overline{1,2k-1}$, в прямоугольнике $\{(x,s)\colon 0\leqslant x,s\leqslant 1\}$, согласно неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{v_n^{(j)}(x)}{\lambda_n}\right]^2\leqslant\int_0^1\left[\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)\right]^2 ds<+\infty,\qquad j=\overline{1,2k-1}.$$

Следовательно, вторые ряды в (3.1) равномерно сходятся. Учитывая уравнение (2.1) и неравенство (3.2), имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[v_n^{(2k)}(x)\right]^2}{\lambda_n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[\lambda_n(-1)^{-k}v_n(x)\right]^2}{\lambda_n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}=M\leqslant+\infty,$$

откуда следует, что последний ряд в (3.1) сходится равномерно. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $g(x)\in C^{k-1}[0,1]$, $g^{(k)}(x)\in L_2(0,1)$ *и* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, $j=\overline{0,k-1}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n g_n^2\leqslant\int_0^1\left[g^{(k)}(x)\right]^2 dx,\tag{3.3}$$

где g_n, $n\in\mathbb{N}$ *— коэффициенты Фурье функции* $g(x)$ *по системе собственных функций* $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по известной схеме, примененной, например, в [40, с. 165–166].

Лемма 3. *Пусть* $g(x)\in C^{2k-1}[0,1]$, $g^{(2k)}(x)\in L_2(0,1)$ *и* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, $qg^{(k+j)}(0)=$ $=pg^{(k+j)}(1)$, $j=\overline{0,k-1}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2 g_n^2\leqslant\int_0^1\left[g^{(2k)}(x)\right]^2 dx.\tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя правило интегрирования по частям $2k$ раз, имеем

$$\int_0^1 g^{(2k)}(x)v_n(x)\,dx=(-1)^k\lambda_n g_n.\tag{3.5}$$

Следовательно, $(-1)^k\lambda_n g_n$, $n\in\mathbb{N}$, — есть коэффициенты Фурье функции $g^{(2k)}(x)$ по системе функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$. Так как $g^{(2k)}(x)\in L_2(0,1)$, то согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (3.4). Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $g(x)\in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x)\in L_2(0,1)$ *и* $pg^{(j)}(0)=qg^{(j)}(1)$, $qg^{(k+j)}(0)=$ $=pg^{(k+j)}(1)$, $pg^{(2k+j)}(0)=qg^{(2k+j)}(1)$, $j=\overline{0,k-1}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 g_n^2\leqslant\int_0^1\left[g^{(3k)}(x)\right]^2 dx.\tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $g^{(2k)}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Если учесть это и равенство (3.5), то, согласно неравенству (3.3), справедливо неравенство (3.6). Лемма 4 доказана. □

§ 4. Существование, единственность и устойчивость решения задачи A_{pq}

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant \gamma < 1/2$, $p \neq q$ и функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет этим условиям по аргументу x равномерно по t. Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \Big\{ a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \times \\ \times \int_0^t \Big[J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau) - J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau) \Big] \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \tau f_n(\tau)\, d\tau \Big\} \tag{4.1}$$

определяет единственное решение задачи A_pq, где λ_n и $v_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — соответственно собственные значения и собственные функции задачи (2.1), (2.2),

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\right)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2-\gamma)\varphi_{2n}, \qquad b_n = \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\right)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2+\gamma)\varphi_{1n}, \tag{4.2}$$

$$\varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi_1(x) v_n(x)\, dx, \qquad \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi_2(x) v_n(x)\, dx, \\ f_n(t) = \int_0^1 f(x,t) v_n(x)\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение задачи A_{pq} ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) v_n(x), \tag{4.4}$$

где $u_n(t)$ — неизвестные функции, которые подлежат определению. Отсюда, используя ортонормированность системы функций $\{v_k(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, относительно неизвестных функций $u_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, получим следующую задачу:

$$B^t_{\gamma-1/2} u_n(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t), \qquad t \in (0,T), \qquad n \in \mathbb{N}; \\ u_n(0) = \varphi_{1n}, \qquad \lim_{t\to+0} t^{2\gamma} u_n'(t) = \varphi_{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Решение этой задачи существует, единственно и определяется равенством

$$u_n(t) = a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \times \\ \times \int_0^t \Big[J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau) - J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau) \Big] \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \tau f_n(\tau)\, d\tau, \tag{4.5}$$

где a_n и b_n — числа, определяемые равенствами (4.2).

Подставляя (4.5) в (4.4), получим формальное решение задачи A_{pq} в виде (4.1). □

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Для функций $u_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, определяемых равенствами (4.5), справедливы неравенства*

$$|u_n(t)| \leqslant |\varphi_{1n}| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}|\varphi_{2n}| + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

$$|t^{2\gamma} u_n'(t)| \leqslant C_1|\varphi_{2n}| + |\varphi_{1n}|\frac{\lambda_n T^{1+2\gamma}}{1+2\gamma} + \lambda_n C_2\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

$$\left|B^t_{\gamma-1/2}u_n(t)\right| \leqslant \lambda_n\left[|\varphi_{1n}|+\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}|\varphi_{2n}|+\frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}\right]+ \\ +\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{4.8}$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные числа.

Доказательство. Перепишем функцию (4.5) с помощью функции Бесселя–Клиффорда $\bar{J}_w(z)=\Gamma(w+1)(z/2)^{-w}J_w(z)$ в виде

$$u_n(t)=\frac{a_n t^{1-2\gamma}(\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)}\bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}t)+\frac{b_n(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}\bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}t)+\frac{2}{1-2\gamma}\times \\ \times\int_0^t\left[\bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}t)\bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-2\gamma}-\bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}t)\bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau)\right]\tau f_n(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание $|\bar{J}_\nu(x)|\leqslant 1$ при $\nu>-1/2$ и $0<\tau<t<T$, получим

$$|u_n(t)|\leqslant|a_n|\frac{T^{1-2\gamma}(\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)}+|b_n|\frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}C_1+C_1\int_0^t\tau|f_n(\tau)|\,d\tau.$$

Теперь, учитывая равенства (4.2) и применяя неравенство Коши–Буняковского к последнему слагаемому, получим неравенство (4.6).

Неравенства (4.7) и (4.8) доказываются аналогично. Лемма 5 доказана. □

Теперь исследуем равномерную сходимость ряда (4.1) и рядов $\partial^{2k}u/\partial x^{2k}$, $t^{2\gamma}u_t$, $B^t_{\gamma-1/2}u$, полученных из него почленным дифференцированием.

Рассмотрим ряд, соответствующий $\partial^{2k}u/\partial x^{2k}$. Из (4.1), в силу (2.1), (4.5) и (4.6), находим

$$\left|\partial^{2k}u/\partial x^{2k}\right|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(t\right)v_n^{(2k)}\left(x\right)\right|=\left|(-1)^k\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n u_n\left(t\right)v_n\left(x\right)\right|\leqslant \\ \leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left[|\varphi_{1n}|+\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|\varphi_{2n}\right|+\frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\|f_n\left(t\right)\|_{L_2(0,T)}\right]\left|v_n\left(x\right)\right|. \tag{4.9}$$

Следовательно, надо доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{1n}v_n\left(x\right),\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{2n}v_n\left(x\right),\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\sqrt{\int_0^T f_n^2\left(\tau\right)d\tau}\;v_n\left(x\right).$$

С этой целью к каждому ряду применяем неравенство Коши–Буняковского:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{jn}v_n\left(x\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3}\varphi_{jn}\frac{v_n\left(x\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right|\leqslant\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3\varphi_{jn}^2\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_n^2\left(x\right)}{\lambda_n}\right]^{1/2},\qquad j=\overline{1,2},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\sqrt{\int_0^T f_n^2\left(\tau\right)d\tau\,v_n\left(x\right)}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3}\sqrt{\int_0^T f_n^2\left(\tau\right)d\tau}\,\frac{v_n\left(x\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right|\leqslant \\ \leqslant\left[\int_0^T\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 f_n^2\left(\tau\right)d\tau\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2\left(x\right)}{\lambda_n}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правых частях, в силу условий теоремы 1, согласно леммам 1 и 4, равномерно сходятся. Следовательно, левые ряды сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$. Тогда абсолютно и равномерно сходится в $\bar{\Omega}$ ряд $\partial^{2k}u/\partial x^{2k}$, а также и ряд (4.1).

Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, соответствующего $t^{2\gamma}u_t(x,t)$.

Наконец, абсолютная и равномерная сходимость в любом компакте $K \subset \bar{\Omega}$ ряда, соответствующего $B^t_{\gamma-1/2}u(x,t)$, следует из уравнения (1.3).

Из доказанного выше следует, что все ряды, соответствующие каждым членам уравнения (1.3) и условиям (1.4), сходятся абсолютно и равномерно. Тогда сумма этих рядов удовлетворяет уравнению (1.3) и условиям (1.4) и (1.5). Следовательно, сумма ряда (4.1) является решением задачи A_{pq}.

Пусть, теперь, $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv f(x,t) \equiv 0$. В этом случае из (4.5) следует, что $u_n(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. коэффициенты Фурье решения задачи A_{pq} по системе функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ равны нулю. Тогда, в силу полноты последней системы, $u(x,t) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Отсюда следует единственность решения задачи A_{pq}. Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. В теореме 1 при $\gamma = 0$ условия на функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ можно ослабить, т. е. при этом достаточно потребовать от них выполнение условий леммы 3.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для решения задачи A_{pq} справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} \leqslant M_0 \left(\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right), \tag{4.10}$$

где M_0 — некоторое положительное число.

Доказательство. Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система, то из (4.1), согласно (4.5) и (4.6), следует следующее неравенство:

$$\|u\,(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,(t)\,v_n\,(x)\right]^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2(t) \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|\varphi_{1n}| + |\varphi_{2n}| + \|f_n\,(t)\|_{L_2(0,T)}\right]^2 \leqslant M_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|\varphi_{1n}|^2 + |\varphi_{2n}|^2 + \|f_n\,(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \right.$$

$$\left. + 2\,|\varphi_{1n}|\,|\varphi_{2n}| + 2\,|\varphi_{1n}|\,\|f_n\,(t)\|_{L_2(0,T)} + 2\,|\varphi_{2n}|\,\|f_n\,(t)\|_{L_2(0,T)}\right].$$

Заменяя последние три слагаемых по неравенству $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, а затем применяя неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant 3M_1 \left(\|\varphi_2\,(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|\varphi_1\,(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\,(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right). \tag{4.11}$$

Учитывая равенства $f(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)v_n(x)$ и ортонормированность системы $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, имеем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|f_n(t)\|^2_{L_2(0,T)} = \|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$. Подставляя это в (4.11), получим (4.10). Теорема 2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. Коренев Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1954.

4. Маховер Е. В. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем // Ученые записки Ленинградского пед. ин-та им. Герцена, физ.-матем. ф-та. 1957. Т. 17. Вып. 2. С. 28–39.
5. Маховер Е. В. О спектре собственных частот пластинки с острым краем // Ученые записки Ленинградского пед. ин-та им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 113–118.
6. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671. https://doi.org/10.1134/S0374064117050090
7. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. Vol. 15. P. 853–862. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.073
8. Karimov Sh. T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order // Filomat. 2018. Vol. 32. Issue 3. P. 873–883. https://doi.org/10.2298/FIL1803873K
9. Карашева Л. Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 696–706. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.055
10. Салахитдинов М. С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. 2005. № 3. С. 72–77.
11. Отарова Ж. А. Вольтеррова краевая задача для уравнения четвертого порядка // Докл. АН РУз. 2008. № 6. С. 18–22.
12. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 3. P. 621–631. https://doi.org/10.1134/S1995080221030197
13. Urinov A. K., Azizov M. S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 3. P. 632–640. https://doi.org/10.1134/S1995080221030203
14. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 3–10. https://doi.org/10.20537/vm130101
15. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнений стержней и балок // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100. https://doi.org/10.1134/S0374064117010083
16. Мегралиев Я. Т., Ализаде Ф. Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 503–514. https://doi.org/10.20537/vm160405
17. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order // Malaysian Journal of Matematical Sciences. 2009. Vol. 3. No. 2. P. 227–248. https://mjms.upm.edu.my/lihatmakalah.php?kod=2009/July/3/2/227-248
18. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // AIP Conference Proceedings. 2012. Vol. 1470. Issue 1. P. 3–7. https://doi.org/10.1063/1.4747625
19. Иргашев Б. Ю. Об одной краевой задаче для уравнения высокого четного порядка // Известия вузов. Математика. 2017. № 9. С. 13–29. http://mi.mathnet.ru/ivm9275
20. Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: тез. докл. Междунар. конф. НИУ БелГУ. Белгород, 2021. С. 241–242.
21. Azizov M. S. About a initial-boundary value problem for a higher even order partial differential equation with Bessel’s operator // “Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021”: Abstracts of Int. Conf. dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulovich Kabulov. Fergana: Fergana State University, 2021. P. 110.
22. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276. https://doi.org/10.4213/mzm9286

23. Иргашев Б. Ю. О спектральной задаче для одного уравнения высокого четного порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 7. С. 44–54. http://mi.mathnet.ru/ivm9133
24. Irgashev B. Yu. On a boundary value problem for a high order mixed type equation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 899–912. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.066
25. Cherfaoui S., Kessab A., Kheloufi A. On $2m$-th order parabolic equations with mixed boundary conditions in non-rectangular domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 73–91. https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.009
26. Кожанов А. И., Пинигина Н. Р. Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 842–853. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.070
27. Юлдашева А. В. Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2017. Т. 140. С. 43–49. http://mi.mathnet.ru/into233
28. Markov V. G. Solvability of a boundary-value problem for even-order mixed-type equations // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1907. Issue 1. 030004. https://doi.org/10.1063/1.5012626
29. Popov S. V., Markov V. G. Boundary value problems for parabolic equations of high order with a changing time direction // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894. 012075. https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012075
30. Dzhamalov S. Z., Pyatkov S. G. On some boundary value problems for multidimensional higher order equations of mixed type // Siberian Mathematical Journal. 2020. Vol. 61. No. 4. P. 610–625. https://doi.org/10.1134/S0037446620040059
31. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
32. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. М.: Физматлит, 2019.
33. Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия высших учебных заведений. Математика. 1986. № 6. С. 55–56. http://mi.mathnet.ru/ivm7572
34. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя // Доклады Академии наук. 1997. Т. 352. С. 587–589. http://mi.mathnet.ru/dan3850
35. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 128–130. http://mi.mathnet.ru/de9866
36. Глушак А. В. Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 627–637. https://doi.org/10.1134/S0374064118050072
37. Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 5. С. 533–538. https://doi.org/10.7868/S0869565214350059
38. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
39. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.
40. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 01.03.2022

Принята к публикации 26.05.2022

Уринов Ахмаджон Кушакович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19;
Институт Математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 46.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
E-mail: urinovak@mail.ru

Азизов Музаффар Сулаймонович, докторант, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2091-9300
E-mail: muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Цитирование: А. К. Уринов, М. С. Азизов. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 240–255.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 2. Pp. 240–255.

A. K. Urinov, M. S. Azizov

On the solvability of nonlocal initial-boundary value problems for a partial differential equation of high even order

Keywords: differential equation of even order, nonlocal problem, Green's function, integral equation.

MSC2020: 35G15

DOI: 10.35634/vm220206

In the present paper, two non-local initial-boundary value problems have been formulated for a partial differential equation of high even order with a Bessel operator in a rectangular domain. The correctness of one of the considered problems has been investigated. To do this, applying the method of separation of variables to the problem under consideration, the spectral problem was obtained for an ordinary differential equation of high even order. The self-adjointness of the last problem was proved, which implies the existence of the system of its eigenfunctions, as well as orthonormality and completeness of this system. Further, the Green's function of the spectral problem was constructed, with the help of which it was equivalently reduced to the Fredholm integral equation of the second kind with symmetrical kernel. Using this integral equation and Mercer's theorem, the uniform convergence of some bilinear series depending on found eigenfunctions has been studied. The order of the Fourier coefficients was established. The solution of the considered problem has been written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform convergence of this series and also the series obtained from it by term-by-term differentiation was proved. Using the method of spectral analysis the uniqueness of the solution of the problem was proved. An estimate for the solution of the problem was obtained, from which its continuous dependence on the given functions follows.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1977.
2. Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* (Equations of mathematical biology), Moscow: Vysshaya Shkola, 1995.
3. Korenev B. G. *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* (Issues of calculation of beams and slabs on an elastic foundation), Moscow: Stroiizdat, 1954.
4. Makhover E. V. Bending of a plate of variable thickness with a sharp edge, *Uch. zap. LGP im. Gertsena*, 1957, vol. 17, no. 2, pp. 28–39 (in Russian).
5. Makhover E. V. On the natural frequency spectrum of a plate with a sharp edge, *Uch. zap. LGP im. Gertsena*, 1958, vol. 197, pp. 113–118 (in Russian).
6. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. https://doi.org/10.1134/S0012266117050093
7. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 853–862. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.073
8. Karimov Sh. T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order, *Filomat*, 2018, vol. 32, issue 3, pp. 873–883. https://doi.org/10.2298/FIL1803873K
9. Karasheva L. L. Cauchy problem for high even order parabolic equation with time fractional derivative, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 696–706. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.055
10. Salakhitdinov M. S., Amanov D. Solvability and spectral properties of a self-adjoint problem for a fourth-order equation, *Uzbekskii Matematicheskii Zhurnal*, 2005, no. 3, pp. 72–77 (in Russian).
11. Otarova Zh. A. Volterra boundary value problem for a fourth order equation, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*, 2008, no. 6, pp. 18–22 (in Russian).

12. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 621–631. https://doi.org/10.1134/S1995080221030197
13. Urinov A. K., Azizov M. S. Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 632–640. https://doi.org/10.1134/S1995080221030203
14. Amanov D., Murzambetova M. B. A boundary value problem for a fourth order partial differential equation with the lowest term, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 3–10 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130101
15. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. https://doi.org/10.1134/S0012266117010086
16. Megraliev Ya. T., Alizade F. Kh. Inverse boundary value problem for a Boussinesq type equation of fourth order with nonlocal time integral conditions of the second kind, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 503–514 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160405
17. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order, *Malaysian Journal of Matematical Sciences*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 227–248. https://mjms.upm.edu.my/lihatmakalah.php?kod=2009/July/3/2/227-248
18. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order, *AIP Conference Proceedings*, 2012, vol. 1470, issue 1, pp. 3–7. https://doi.org/10.1063/1.4747625
19. Irgashev B. Yu. On one boundary-value problem for an equation of higher even order, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, issue 9, pp. 10–26. https://doi.org/10.3103/S1066369X1709002X
20. Urinov A. K., Azizov M. S. Initial-boundary value problem for higher even order partial differential equation with Bessel operator, *Differentsial'nye uravneniya, matematicheskoe modelirovanie i vychislitel'nye algoritmy: tez. dokl. Mezhdunar. konf.*, Belgorod: Belgorod State University, 2021, pp. 241–242 (in Russian).
21. Azizov M. S. About a initial-boundary value problem for a higher even order partial differential equation with Bessel's operator, *"Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021": Abstracts of Int. Conf. dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulovich Kabulov*, Fergana: Fergana State University, 2021, p. 110.
22. Sabitov K. B. The Dirichlet problem for higher-order partial differential equations, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, issues 1–2, pp. 255–267. https://doi.org/10.1134/S0001434615010277
23. Irgashev B. Yu. Spectral problem for an equation of high even order, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, issue 7, pp. 37–46. https://doi.org/10.3103/S1066369X16070069
24. Irgashev B. Yu. On a boundary value problem for a high order mixed type equation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 899–912. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.066
25. Cherfaoui S., Kessab A., Kheloufi A. On $2m$-th order parabolic equations with mixed boundary conditions in non-rectangular domains, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 73–91. https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.009
26. Kozhanov A. I., Pinigina N. R. Boundary value problems for certain classes of high order composite type equations, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 842–853. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.070
27. Yuldasheva A. V. On a problem for a quasi-linear equation of even order, *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, issue 4, pp. 423–429. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04434-3
28. Markov V. G. Solvability of a boundary-value problem for even-order mixed-type equations, *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1907, issue 1, 030004. https://doi.org/10.1063/1.5012626
29. Popov S. V., Markov V. G. Boundary value problems for parabolic equations of high order with a changing time direction, *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 894, 012075. https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012075
30. Dzhamalov S. Z., Pyatkov S. G. On some boundary value problems for multidimensional higher order

equations of mixed type, *Siberian Mathematical Journal*, 2020, vol. 61, no. 4, pp. 610–625. https://doi.org/10.1134/S0037446620040059
31. Kipriyanov I. A. *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* (Singular elliptic boundary value problems), Moscow: Nauka, 1997.
32. Sitnik S. M., Shishkina E. L. *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravnenii s operatorom Besselya* (Method of transmutation operators for differential equations with Bessel operator), Moscow: Fizmatlit, 2019.
33. Glushak A. V., Kononenko V. I., Shmulevich S. D. On a singular abstract Cauchy problem, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1986, no. 6, pp. 55–56. http://mi.mathnet.ru/eng/ivm7572
34. Glushak A. V. The Bessel operator function, *Doklady Mathematics*, 1997, vol. 55, no. 1, pp. 103–105. https://zbmath.org/?q=an:0965.34052
35. Glushak A. V. The operator Bessel function, related semigroups, and a modified Hilbert transform, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, issue 1, pp. 130–132.
36. Glushak A. V. Criterion for the solvability of the weighted Cauchy problem for an abstract Euler–Poisson–Darboux equation, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 622–632. https://doi.org/10.1134/S0012266118050063
37. Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L. Formulas for the solution of the Cauchy problem for a singular wave equation with Bessel time operator, *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 737–742. https://doi.org/10.1134/S106456241407028X
38. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Nauka, 1969.
39. Mikhlin S. G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam* (Lectures on linear integral equations), Moscow: Fizmatlit, 1959.
40. Sobolev V. I. *Lektsii po dopolnitel'nym glavam matematicheskogo analiza* (Lectures on additional chapters of mathematical analysis), Moscow: Nauka, 1968.

Received 01.03.2022

Accepted 26.05.2022

Akhmadjon Kushakovich Urinov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, ul. Murabbiylar, 19, Fergana, 150100, Uzbekistan;
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 46, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
E-mail: urinovak@mail.ru

Muzaffar Sulaymonovich Azizov, PhD Student, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, ul. Murabbiylar, 19, Fergana, 150100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2091-9300
E-mail: muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Citation: A. K. Urinov, M. S. Azizov. On the solvability of nonlocal initial-boundary value problems for a partial differential equation of high even order, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 240–255.