ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 211–227.

УДК 517.929, 519.857.3

© *А. А. Родин, Л. И. Родина, А. В. Черникова*

О СПОСОБАХ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПОПУЛЯЦИИ, ЗАДАННОЙ РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается модель эксплуатируемой однородной популяции, заданная разностным уравнением, зависящим от случайных параметров. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением

$$X(k+1)=f\big(X(k)\big),\quad k=1,2,\ldots,$$

где $X(k)$ — размер популяции или количество биоресурса в момент времени k, $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $I=[0,a]$, такая, что $f(I)\subseteq I$. В моменты времени $k=1,2,\ldots$ из популяции извлекается случайная доля ресурса $\omega(k)\in\Omega\subseteq[0,1]$. Процесс сбора может быть остановлен, когда доля собранного ресурса превысит некоторое значение $u(k)\in[0,1)$, чтобы сохранить по возможности большую часть популяции. Тогда доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k)=\min(\omega(k),u(k))$. Средняя временная выгода H_* от извлечения ресурса равна пределу среднего арифметического от количества добываемого ресурса $X(k)\ell(k)$ в моменты времени $1,2,\ldots,k$ при $k\to\infty$. Решается задача выбора управления процессом промыслового изъятия, при котором значение H_* можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции $f(x)$, определяющей динамику популяции; данные оценки получены для трех классов уравнений с функциями $f(x)$, обладающими определенными свойствами. Результаты работы проиллюстрированы численными примерами, построенными методом динамического программирования на основании того, что исследуемый процесс эксплуатации популяции является марковским процессом принятия решений.

Ключевые слова: разностные уравнения, уравнения со случайными параметрами, оптимальная эксплуатация, средняя временная выгода.

DOI: 10.35634/vm220204

Введение

К настоящему времени известно множество работ, посвященных изучению динамики популяций, заданных уравнениями или системами уравнений различного типа. Среди них особый интерес вызывают аналитические и численные исследования влияния промысла на динамику численности популяций, в том числе структурированных (например, по видам или возрасту) [1–3]. В условиях эксплуатации становится актуальной задача оптимизации сбора ресурса с целью сохранения целостности популяции и определения минимального уровня численности, необходимого для ее воспроизводства [4]. Более подробный обзор литературы по влиянию эксплуатации на динамику популяции приведен в [5].

Наиболее известные и изученные модели продукционного процесса, как правило, имеют вид дифференциальных или разностных уравнений и являются детерминированными. Так, в работах [6–8] рассматриваются задачи периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса. Доказано существование устойчивого стационарного состояния популяции, при котором достигается наибольшая выгода и максимальная эффективность сбора.

Однако, детерминированные модели популяций не полностью отражают поведение реально существующих экосистем, поскольку не учитывают случайный характер процессов размножения и гибели и не учитывают наличие случайных колебаний, происходящих с течением времени в жизнедеятельности популяции и в окружающей среде [9, с. 58]. Поэтому вместе с детерминированными целесообразно исследовать и вероятностные модели.

Задачи оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов XX века (см. [10, 11]). В одной из первых работ по данной тематике [10] показано, что в стохастической модели популяции оптимальной является эксплуатация до определенного уровня, не зависящего от текущего размера популяции. Оптимальный остаточный уровень популяции для вероятностной модели сравнивается с уровнем для аналогичной детерминированной модели. В последние годы возрос интерес к решению задачи вычисления дохода от промысловой добычи ресурса из структурированной популяции, заданной вероятностной моделью. Например, в работах [12, 13] рассматриваются модели двувидовой популяции с запаздыванием, учитывающие стохастическое влияние на скорость роста популяции и усилия по сбору. Показано, что при эндогенной селективности сбора наблюдаются различия между оптимальной и максимальной добычей ресурса, которая не учитывает затраты на сбор, что существенно влияет на экономическую выгоду.

В работах [14, 15] получена оценка средней временной выгоды от эксплуатации популяций, заданны дифференциальными уравнениями со случайными параметрами. Показано, что при недостаточном ограничении доли добываемого ресурса средняя временная выгода может равняться нулю для всех или для почти всех значений случайных параметров. Наряду с этим рассматривается важная экологическая задача сохранения некоторого значения численности популяции в условиях контролируемого процесса сбора (в том числе в долгосрочной перспективе), чтобы не допустить ее вырождения. Более подробный обзор литературы и современное состояние исследований по данной тематике отображены в [16–19].

В данной работе исследуется модель эксплуатируемой однородной популяции, заданной разностным уравнением, зависящим от случайных параметров. Нужно заметить, что такая одномерная динамика с дискретным временем, являясь, на первый взгляд, достаточно простой, во многих случаях обладает сложными свойствами и может быть сопоставима по сложности с динамическими системами на произвольных компактах [20, с. 6]. Поэтому, в отличие от моделей стохастических популяций, определенных дифференциальными уравнениями в [14], исследование вопросов эксплуатации для популяций с разностной динамикой потребовало от авторов применения новых подходов. Так, в данной работе показано, что оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции $f(x)$, определяющей динамику популяции при отсутствии эксплуатации; данные оценки получены для трех классов уравнений с функциями $f(x)$, обладающими определенными свойствами. Результаты работы проиллюстрированы численными примерами, построенными методом динамического программирования на основании того, что исследуемый процесс эксплуатации популяции является марковским процессом принятия решений.

§ 1. Основные обозначения и определения

Исследуется одна из моделей популяционной динамики, заданная разностным уравнением, зависящим от случайных параметров. Обозначим через $X(k)$ размер популяции или количество биоресурса в момент времени k. Предполагаем, что развитие популяции при отсутствии эксплуатации описывается уравнением

$$X(k+1) = f\big(X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.1}$$

Здесь $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $I = [0, a]$, такая, что $f(I) \subseteq I$. Отметим, что все утверждения статьи также верны для ограниченных дифференцируемых функций $f(x)$, определенных на $[0,+\infty)$.

Пусть начальный размер популяции равен $x(0) \geqslant 0$, до момента времени $k=1$ извлечение ресурса не производится, тогда $X(1)=f(x(0))$, а в моменты $k=1,2,\ldots$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k)\in\Omega\subseteq[0,1]$. Предполагаем, что имеется возможность влиять на процесс сбора таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u(k)\in[0,1)$ в момент k), чтобы сохранить возможно больший остаток для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k)=\ell(\omega(k),u(k))=\min(\omega(k),u(k)),\quad k=1,2,\ldots.$$

Таким образом, модель эксплуатируемой однородной популяции имеет вид

$$X(k+1)=f\big((1-\ell(k))X(k)\big),\quad k=1,2,\ldots,\tag{1.2}$$

где $X(1)=f(x(0))$, $X(k)=X\big(\ell(1),\ldots,\ell(k-1),x(0)\big)$ — количество ресурса до сбора в момент времени $k=2,3,\ldots$, зависящее от долей ресурса $\ell(1),\ldots,\ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начальной численности популяции $x(0)$.

Обозначим

$$\Sigma\doteq\{\sigma\colon \sigma=(\omega(1),\ldots,\omega(k),\ldots)\},\qquad U\doteq\{\overline{u}\colon \overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots)\},$$
$$L\doteq\big\{\ell\colon \ell=(\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots)\big\}.$$

Рассмотрим функцию

$$H_*=H_*\big(\ell,x(0)\big)\doteq\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k),$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса.

Исследуем задачу выбора управления $\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots)\in U$, ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени k, при котором значение функции H_* можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

§ 2. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega,\widetilde{\mathfrak{A}},\widetilde{\mu})$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств $\Omega\subseteq[0,1]$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Определим вероятностную модель $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$, где $\Sigma=\{\sigma\colon\sigma=(\omega(1),\ldots,\omega(k),\ldots)\}$, $\mathfrak{A}$ — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$D(k)\doteq\big\{\sigma\in\Sigma\colon \omega(1)\in A(1),\ldots,\omega(k)\in A(k)\big\},\quad \text{где } A(1)\in\widetilde{\mathfrak{A}},\ldots,A(k)\in\widetilde{\mathfrak{A}},$$

и зададим меру $\widetilde{\mu}\big(D(k)\big)\doteq\widetilde{\mu}\big(A(1)\big)\cdot\widetilde{\mu}\big(A(2)\big)\cdot\ldots\cdot\widetilde{\mu}\big(A(k)\big)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma,\mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Если уравнение (1.1) имеет решение вида $X(k)\equiv\mathrm{const}=x^*$, то это решение называется *положением равновесия* (*неподвижной точкой*) *данного уравнения*. Отметим, что $x^*=f\big(x^*\big)$. Напомним (см. [21, с. 44]), что решение $X(k)\equiv x^*$ уравнения (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что как только $\|X(1)-x^*\|<\delta$, то $\|X(k)-x^*\|<\varepsilon$ для всех $k\geqslant 1$. Положение равновесия $X(k)\equiv x^*$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого начального условия $X(1)$ из некоторой окрестности точки x^* имеет место равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\|X(k)-x^*\|=0$.

Пусть задана ограниченная функция $u\colon I\mapsto[0,1]$. Для каждого $x\in I$ функция

$$\ell(\omega,u(x))\doteq\min(\omega,u(x))$$

является случайной величиной на множестве Ω; обозначим через $M\ell(\omega,u(x))$ ее математическое ожидание. Пусть $\widetilde{x}\in I$ и $\widetilde{x}<\max\limits_{x\in I}f(x)$; рассмотрим отрезок $P(\widetilde{x})\doteq[\widetilde{x},\max\limits_{x\in I}f(x)]$. Напомним, что через $X(k)$ мы обозначаем размер популяции перед извлечения ресурса в момент времени k; пусть $x(k)$ — размер популяции после извлечения ресурса; тогда $x(k)=(1-\ell(k))X(k)$, $k=1,2,\ldots$.

Теорема 1. *Пусть точка $\widetilde{x}\in I$ такова, что $\widetilde{x}\leqslant f(\widetilde{x})\leqslant f(x)$ для всех $x\in P(\widetilde{x})$. Тогда для любого $x(0)\in P(\widetilde{x})$ существует управление $\overline{u}\in U$ такое, что для почти всех $\sigma\in\Sigma$ выполнены неравенства*

$$f(\widetilde{x})M\ell(\omega,u(\widetilde{x}))\leqslant H_*(\ell,x(0))\leqslant\max_{x\in I}f(x)\cdot M\ell(\omega,u(\widetilde{x})),\quad \textit{где}\quad u(\widetilde{x})=1-\frac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что если $x(0)\in P(\widetilde{x})$, то управление $\overline{u}\in U$ такое, что для почти всех $\sigma\in\Sigma$ выполнено (2.1), можно выбрать следующим образом:

$$\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots),\quad \text{где}\quad u(k)=1-\frac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})},\quad k=1,2,\ldots. \tag{2.2}$$

Отметим, что $u(k)\in[0,1]$ и $X(1)\doteq f\big(x(0)\big)\geqslant f(\widetilde{x})$. Далее, из неравенства $\ell(1)\doteq\doteq\min(\omega(1),u(1))\leqslant u(1)$ следует

$$x(1)=\big(1-\ell(1)\big)X(1)\geqslant\big(1-u(1)\big)X(1)=\frac{\widetilde{x}X(1)}{f(\widetilde{x})}\geqslant\widetilde{x}.$$

Кроме того, $x(1)\leqslant X(1)=f\big(x(0)\big)\leqslant\max\limits_{x\in I}f(x)$, поэтому $x(1)\in P(\widetilde{x})$. Аналогично получаем, что

$$f(\widetilde{x})\leqslant X(k)\leqslant\max_{x\in I}f(x)\quad\text{для всех}\quad k=1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

Выбирая управления (2.2) и учитывая (2.3), получаем

$$f(\widetilde{x})\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega(k),u(\widetilde{x}))\leqslant H_*(\ell,x(0))\leqslant\max_{x\in I}f(x)\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega(k),u(\widetilde{x})). \tag{2.4}$$

Поскольку $0\leqslant\ell(\omega(k),u(\widetilde{x}))\leqslant1$ для всех $k=1,2,\ldots$, то из усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma\in\Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega(k),u(\widetilde{x}))=M\ell(\omega,u(\widetilde{x})). \tag{2.5}$$

Отсюда, учитывая (2.4), получаем неравенство (2.1). □

Пример 1. Предположим, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана уравнением

$$X(k+1)=2.5X(k)\big(1-X(k)\big),\quad k=1,2,\ldots, \tag{2.6}$$

$x(0) \in [0,1]$ и $\omega(1), \omega(2), \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Отметим, что уравнение (2.6) имеет неустойчивое нулевое положение равновесия. Также это уравнение имеет устойчивое положение равновесия $x^* = 0.6$, областью притяжения которого является интервал $(0,1)$. Пусть $\widetilde{x} \in \left(0, \dfrac{3}{8}\right)$ и $u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$. Случайная величина $\ell(\omega, u(\widetilde{x}))$ является случайной величиной смешанного типа, поэтому ее математическое ожидание равно

$$M\ell\big(\omega, u(\widetilde{x})\big) = \int_0^{u(\widetilde{x})} t\,dt + u(\widetilde{x}) \cdot \mu(\omega \geqslant u(\widetilde{x})) =$$

$$= \frac{u^2(\widetilde{x})}{2} + u(\widetilde{x})(1 - u(\widetilde{x})) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{x}^2}{f^2(\widetilde{x})}\right) = \frac{25(1-\widetilde{x})^2 - 4}{50(1-\widetilde{x})^2}.$$

Тогда

$$f(\widetilde{x})M\ell(\omega, u(\widetilde{x})) = \frac{25(1-\widetilde{x})^2\widetilde{x} - 4\widetilde{x}}{20(1-\widetilde{x})}$$

и наибольшее значение данной функции достигается в точке $\widetilde{x} \approx 0.3246$. Поэтому в силу (2.1) получим приближенные оценки для средней временной выгоды:

$$0.1780 \leqslant H_*\big(\ell, x(0)\big) \leqslant 0.2029.$$

Покажем, что если функция $f(x)$, определяющая уравнение (1.1), обладает определенными свойствами, то можно получить более точные оценки средней временной выгоды, чем в теореме 1. Эти свойства связаны с наличием у уравнения (1.1) асимптотически устойчивого положения равновесия. Сначала напомним известный результат.

Утверждение 1 (см. [9, с. 44]). *Пусть x^* является положением равновесия уравнения* (1.1). *Имеют место следующие свойства.*

(1) *Если $|f'(x^*)| < 1$, то положение равновесия x^* асимптотически устойчиво; при $0 < f'(x^*) < 1$ отклонения от равновесия монотонно исчезают, если $-1 < f'(x^*) < 0$, то имеют место затухающие колебания вокруг x^*.*

(2) *Если $|f'(x^*)| > 1$, то положение равновесия x^* неустойчиво; при $f'(x^*) > 1$ отклонение от равновесия монотонно растет, а при $f'(x^*) < -1$ удаление от равновесия происходит в виде нарастающих колебаний.*

Предположим, что $x^* \in (0,a)$ и $0 < f'(x^*) < 1$. Обозначим через $(a_1, a_2) \subset I$ максимальный интервал, содержащий точку x^*, для всех точек которого выполнено неравенство $0 < f'(x) < 1$.

Теорема 2. *Пусть $\mu(0) < 1$, уравнение* (1.1) *имеет положение равновесия $x^* \in (0,a)$ и $0 < f'(x^*) < 1$. Тогда для любых $\widetilde{x} \in [a_1, x^*]$, $x(0) \in [\widetilde{x}, a_2]$ существует управление $\overline{u} \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства*

$$f(\widetilde{x})M\ell(\omega, u(\widetilde{x})) \leqslant H_*(\ell, x(0)) \leqslant x^*M\ell(\omega, u(\widetilde{x})); \tag{2.7}$$

здесь $u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$.

Доказательство. **1.** Сначала рассмотрим начальные значения $x(0)$ такие, что $x(0) \in [\widetilde{x}, x^*] \subset [a_1, a_2)$. Поскольку функция $f(x)$ возрастает в (a_1, a_2), то

$$f\big(\widetilde{x}\big) \leqslant f\big(x(0)\big) = X(1) \leqslant f(x^*) = x^*. \tag{2.8}$$

Определим $u(k) = u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и покажем, что $u(k) > 0$. Действительно, $\widetilde{x} \in [a_1, x^*]$ и $0 < f'(x) < 1$ для всех $x \in (a_1, x^*]$. Исследуем поведение функции $F(x) \doteq f(x) - x$ на отрезке $[a_1, x^*]$. Отметим, что

$$F'(x) = \big(f(x) - x\big)' < 0 \quad \text{для всех} \quad x \in (a_1, x^*].$$

Поэтому $F(x)$ убывает в (a_1, x^*) и, кроме того, $F(x^*) = 0$. Следовательно, $F(x) > 0$ для всех $x \in [a_1, x^*]$ и $F(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}) - \widetilde{x} > 0$; отсюда получаем, что $\dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})} < 1$, то есть $u(k) > 0$.

Из неравенств $\ell(1) \leqslant u(1)$ и (2.8) следует, что

$$x(1) = \big(1 - \ell(1)\big)X(1) \geqslant \big(1 - u(1)\big)X(1) = \frac{\widetilde{x} f\big(x(0)\big)}{f(\widetilde{x})} \geqslant \widetilde{x}.$$

Кроме того, $x(1) \leqslant X(1) \leqslant x^*$. Таким образом, $\widetilde{x} \leqslant x(1) \leqslant x^*$. Далее, так как $f(x)$ возрастает в (a_1, a_2), то

$$f(\widetilde{x}) \leqslant f(x(1)) = X(2) \leqslant f(x^*) = x^*.$$

Аналогично получаем, что

$$f(\widetilde{x}) \leqslant X(k) \leqslant x^* \ \text{ для всех } \ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.9}$$

Поэтому, если $\overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)$, где $u(k) = u(\widetilde{x})$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то

$$f(\widetilde{x}) \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell(\omega(k), u(\widetilde{x})) \leqslant H_*(\ell, x(0)) \leqslant x^* \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell(\omega(k), u(\widetilde{x})). \tag{2.10}$$

Далее, из (2.5) и (2.10) получаем неравенства (2.7).

2. Рассмотрим $x(0) \in (x^*, a_2]$ (отметим, что здесь $\widetilde{x} \leqslant x^* < f(x(0)) = X(1) \leqslant f(a_2)$). Покажем, что при определенном выборе управлений с вероятностью единица существует число $k_1 = k_1(x(0))$ — наименьшее из чисел таких, что $\widetilde{x} \leqslant x(k_1) \leqslant x^*$. Отметим сначала, что такое число существует, если $\omega(k_1) = 1$ при некотором $k_1 = 1, 2, \ldots$; в этом случае $\ell(\omega(k_1), u(k_1)) = \min(1, u(k_1)) = u(k_1)$. Возьмем, например, $u(k_1) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{X(k_1)}$, тогда

$$x(k_1) = (1 - u(k_1)) \cdot X(k_1) = \widetilde{x}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\omega(k) \neq 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку $0 < f'(x) < 1$ для всех точек интервала (a_1, a_2), то для $x(0) \in (x^*, a_2]$ имеет место

$$X(1) = f(x(0)) < x(0)$$

(последнее неравенство следует из того, что $f(x) - x$ убывает в (a_1, a_2) и $f(x^*) = x^*$). Для $x(0) \in (x^*, a_2]$ предварительно возьмем $u(1) = 1$, тогда $\ell(\omega(k), u(k)) = \omega(k)$ и

$$x(1) = (1 - \omega(1)) \cdot X(1) < (1 - \omega(1)) \cdot x(0).$$

Далее возможны три случая. Если $x(1) \in [\widetilde{x}, x^*]$, то $k_1 = 1$ и $u(1)$ оставим равным единице. Если при $u(1) = 1$ получилось, что $x(1) < \widetilde{x}$, то изменим $u(1)$ таким образом, чтобы $x(1) \in [\widetilde{x}, x^*]$; например, для этого можно взять $u(1) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{X(1)}$, тогда

$$x(1) = (1 - u(1)) \cdot X(1) = \frac{\widetilde{x}}{X(1)} \cdot X(1) = \widetilde{x};$$

отметим, что здесь также $k_1 = 1$. В третьем случае при $u(1) = 1$ возможно неравенство $x(1) > x^*$ (здесь $x(1) < X(1) < x(0)$, поэтому $x(1) \in (x^*, a_2)$ и $X(2) = f(x(1)) < x(1)$). Сначала возьмем $u(2) = 1$, тогда

$$x(2) = (1 - \omega(2))X(2) < (1 - \omega(2))x(1) < (1 - \omega(1))(1 - \omega(2))x(0). \tag{2.11}$$

Если $x(2) \in [\widetilde{x}, x^*]$, то $k_1 = 2$. Если при $u(2) = 1$ выполнено $x(2) < \widetilde{x}$, то выберем $u(2) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{X(2)}$, тогда $x(2) = \widetilde{x}$ (здесь $k_1 = 2$). Если же $x(2) > x^*$, следующие управления строим таким же образом.

Предположим, что $x(k) > x^*$ и $u(1) = \ldots = u(k+1) = 1$, тогда аналогично (2.11) имеем

$$x(k+1) < (1 - \omega(1))(1 - \omega(2)) \cdot \ldots \cdot (1 - \omega(k+1))x(0).$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\ln(1 - \omega(k))$, $k = 1, 2, \ldots$. Введем также последовательность $\{S_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S_k(\sigma) = \ln(1 - \omega(1)) + \ldots + \ln(1 - \omega(k)),$$

которая является случайным блужданием на прямой. Покажем, что если $\mu(0) < 1$, то математическое ожидание

$$M \ln(1 - \omega(k)) < 0. \tag{2.12}$$

Действительно, так как $\omega(k) \in [0, 1)$, то $\ln(1 - \omega(k)) \leqslant 0$, поэтому для математического ожидания этой случайной величины либо выполнено (2.12), либо $M \ln(1 - \omega(k)) = 0$. В последнем случае $\omega(k) = 0$ с вероятностью единица [22, глава 2, § 6], что противоречит условию $\mu(0) < 1$. Из (2.12) следует, что с вероятностью единица $S_k(\sigma)$ уходит в минус бесконечность (см. [23, глава 12, § 2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\sigma) = -\infty$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} (1 - \omega(1)) \cdot \ldots \cdot (1 - \omega(k)) = 0$$

для всех $\sigma \in \Sigma_0$, поэтому с вероятностью единица найдется $k_0 = k_0(x(0))$ такое, что $x(k_0) < x^*$ (в качестве k_0 выбираем наименьшее из чисел, при которых $x(k_0) < x^*$). Теперь, если $x(k_0) \in [\widetilde{x}, x^*]$, то $k_1 = k_0$, и если $x(k_0) < \widetilde{x}$, то изменяем $u(k_0)$, полагая его равным $1 - \dfrac{\widetilde{x}}{X(k_0)}$, тогда $x(k_0) = \widetilde{x}$ и также $k_1 = k_0$. Учитывая доказательство пункта 1, получаем, что (2.9) верно для всех $k \geqslant k_1$. □

Пример 2. Предположим, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана уравнением

$$X(k+1) = 1{,}5X(k)\big(1 - X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

$x(0) \in [0, 1]$ и $\omega(1), \omega(2), \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Отметим, что уравнение (2.13) имеет устойчивое положение равновесия $x^* = \dfrac{1}{3}$, областью притяжения которого является интервал $(0, 1)$ и $(a_1, a_2) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$. Пусть $\widetilde{x} \in \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$ и $u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$. Также, как в примере 1, найдем математическое ожидание

$$M\ell(\omega, u(\widetilde{x})) = \int_0^{u(\widetilde{x})} t\,dt + u(\widetilde{x}) \cdot \mu(\omega \geqslant u(\widetilde{x})) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{(\widetilde{x})^2}{f^2(\widetilde{x})}\Big) = \frac{9(1 - \widetilde{x})^2 - 4}{18(1 - \widetilde{x})^2}.$$

Далее получаем, что наибольшее значение функции $f(\widetilde{x})M\ell(\omega, u(\widetilde{x}))$ достигается в точке $\widetilde{x} \approx 0{,}1741$ и, согласно (2.7), справедлива следующая оценка

$$0{,}0376 \leqslant H_*\big(\ell, x(0)\big) \leqslant 0{,}0581.$$

Производя аналогичные вычисления с применением теоремы 1, получаем

$$0{,}0376 \leqslant H_*\big(\ell, x(0)\big) \leqslant 0{,}0653.$$

Проведем компьютерное моделирование для данного примера. Для этого сгенерируем $S = 1000$ возможных траекторий длины $T = 100$ в координатах номера периода и текущего размера популяции при выбранном управлении $u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$. На каждом шаге каждой траектории значение величины ω выбирается случайным образом в соответствии с ее распределением. Будем считать, что начальным размером популяции для каждой траектории является $x(0) = 0{,}2$. На рис. 1 представлены две полученные траектории. Для оценки средней временной выгоды рассчитаем выборочное среднее выгоды по всем траекториям и по всем периодам:

$$H_*^{sample} = \frac{1}{S \cdot T} \sum_{i=1}^{S} \sum_{k=1}^{T} X_i(k)\ell_i(k).$$

Для данного моделирования получено $H_*^{sample} = 0{,}0408$, что не противоречит теоретической оценке, данной выше.

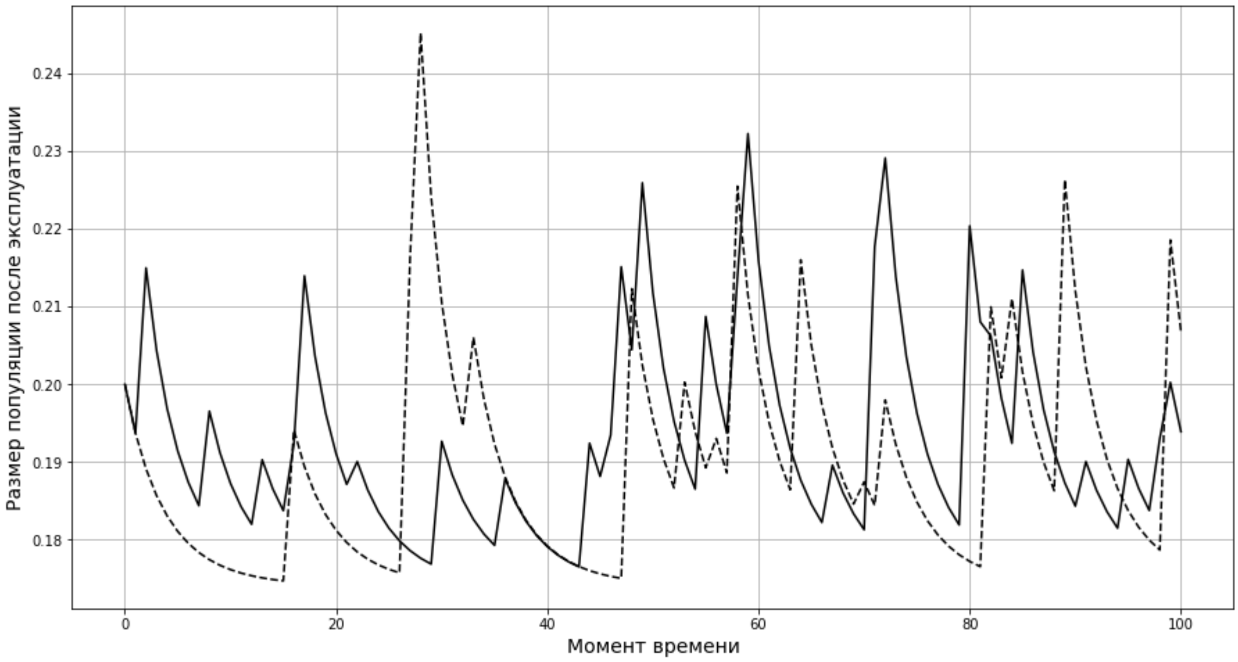

Рис. 1. Две из $S = 1000$ возможных траекторий решений уравнения (2.13) при управлении $u(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})} \approx 0{,}1928$ и начальном размере популяции $x(0) = 0{,}2$.

Отметим, что для некоторых уравнений вида (1.1) могут быть не выполнены условия ни одной из теорем 1 или 2. Например, это может произойти, если функция $f(x)$, определяющая уравнение (1.1), убывающая. Чтобы частично восполнить данный пробел, получим оценки средней временной выгоды в случае, когда для положения равновесия $x^* \in (0, a)$

уравнения (1.1) выполнено неравенство $-1 < f'(x^*) < 0$. Обозначим через (b_1, b_2) максимальный интервал, содержащий точку x^*, для всех точек которого $f'(x) \in (-1, 0)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) $\mu(0) < 1$;

(2) *уравнение* (1.1) *имеет положение равновесия* $x^* \in (0, a)$ *и* $-1 < f'(x^*) < 0$;

(3) $\widetilde{x} \in [b_1, x^*)$, $f(\widetilde{x}) \in (b_1, b_2]$.

Тогда для любых $x(0) \in [\widetilde{x}, b_2]$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *имеют место неравенства*

$$f(f(\widetilde{x}))M\ell(\omega, u_1(\widetilde{x})) \leqslant H_*\big(\ell, x(0)\big) \leqslant f(\widetilde{x})M\ell(\omega, u_2(\widetilde{x})); \tag{2.14}$$

здесь $u_1(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(f(\widetilde{x}))}$, $u_2(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда $x(0) \in [\widetilde{x}, x^*] \subset [b_1, b_2)$. Так как $f(x)$ убывает в (b_1, b_2), то

$$f\big(\widetilde{x}\big) \geqslant f\big(x(0)\big) = X(1) \geqslant f(x^*) = x^* \geqslant \widetilde{x}. \tag{2.15}$$

Определим $u(k) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{X(k)}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из $\ell(1) \leqslant u(1)$ следует, что

$$x(1) = \big(1 - \ell(1)\big)X(1) \geqslant \big(1 - u(1)\big)X(1) = \frac{\widetilde{x}}{X(1)} \cdot X(1) = \widetilde{x}. \tag{2.16}$$

Таким образом, из (2.15) и (2.16) получаем $f(\widetilde{x}) \geqslant X(1) \geqslant x(1) \geqslant \widetilde{x}$. Отметим, что $\big(\widetilde{x}, f(\widetilde{x})\big) \subseteq (b_1, b_2)$. Далее, из условия $f'(x) \in (-1, 0)$ в (b_1, b_2) следует, что функция $f(f(x))$ возрастает в данном интервале, причем ее производная меньше единицы; так как x^* является неподвижной точкой $f(f(x))$, то $\widetilde{x} \leqslant f\big(f(\widetilde{x})\big)$. Следовательно,

$$\widetilde{x} \leqslant f\big(f(\widetilde{x})\big) \leqslant f\big(x(1)\big) = X(2) \leqslant f(\widetilde{x}).$$

Аналогично, для всех $k \geqslant 2$ выполнены неравенства

$$f\big(f(\widetilde{x})\big) \leqslant X(k) \leqslant f(\widetilde{x}).$$

Поэтому, если $u = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)$ и $u(k) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{X(k)}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то

$$u_1(\widetilde{x}) \doteq 1 - \frac{\widetilde{x}}{f(f(\widetilde{x}))} \leqslant u(k) \leqslant 1 - \frac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})} \doteq u_2(\widetilde{x}).$$

Отсюда следует, что $\ell(\omega(k), u_1(\widetilde{x})) \leqslant \ell(\omega(k), u(k)) \leqslant \ell(\omega(k), u_2(\widetilde{x}))$ и

$$f(f(\widetilde{x})) \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega(k), u_1(\widetilde{x})) \leqslant H_*(\ell, x(0)) \leqslant f(\widetilde{x}) \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega(k), u_2(\widetilde{x})). \tag{2.17}$$

Поскольку $0 \leqslant \ell(\omega(k), u_i(\widetilde{x})) \leqslant 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$, то из усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega(k), u_i(\widetilde{x})) = M\ell(\omega, u_i(\widetilde{x})), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, учитывая (2.17), получаем неравенство (2.14).

Случай, когда $x(0) \in (x^*, b_2]$, доказывается аналогично пункту 2 теоремы 2. $\square$

Пример 3. Предположим, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана уравнением

$$X(k+1) = 0{,}5\big(1 - X(k)\big), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.18}$$

$x(0) \in [0,1]$ и $\omega(1), \omega(2), \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Уравнение (2.18) имеет устойчивое положение равновесия $x^* = \dfrac{1}{3}$, областью притяжения которого является отрезок $[0,1]$ и $(b_1, b_2) = (0,1)$. Пусть $\widetilde{x} \in \Big(0, \dfrac{1}{3}\Big)$, $u_1(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f\big(f(\widetilde{x})\big)}$ и $u_2(\widetilde{x}) = 1 - \dfrac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$. Случайные величины $\ell(\omega, u_i(\widetilde{x}))$, $i = 1, 2$, являются случайными величинами смешанного типа, поэтому их математическое ожидание равно

$$M\ell\big(\omega, u_i(\widetilde{x})\big) = \int_0^{u_i(\widetilde{x})} t\,dt + u_i(\widetilde{x}) \cdot \mu(\omega \geqslant u_i(\widetilde{x})) = \frac{u_i^2(\widetilde{x})}{2} + u_i(\widetilde{x})(1 - u_i(\widetilde{x})), \quad i = 1, 2.$$

Для $u_1(\widetilde{x})$ математическое ожидание

$$M\ell\big(\omega, u_1(\widetilde{x})\big) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{x}^2}{\big(f(f(\widetilde{x}))\big)^2}\right) = \frac{(1+\widetilde{x})^2 - 16\widetilde{x}^2}{2(1+\widetilde{x})^2}.$$

Отсюда следует, что наибольшее значение функции $f\big(f(\widetilde{x})\big) M\ell\big(\omega, u_1(\widetilde{x})\big)$ достигается в точке $\widetilde{x} \approx 0{,}0328$. Аналогично, для $u_2(\widetilde{x})$ получаем

$$M\ell\big(\omega, u_2(\widetilde{x})\big) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{x}^2}{f^2(\widetilde{x})}\right) = \frac{(1-\widetilde{x})^2 - 4\widetilde{x}^2}{2(1-\widetilde{x})^2}.$$

Таким образом, в соответствии с (2.14), имеем оценку

$$0{,}1270 \leqslant H_*(\ell, x(0)) \leqslant 0{,}2407.$$

§ 3. Решение задачи об оптимальной эксплуатации популяции методом динамического программирования

Заметим, что исследуемый процесс эксплуатации является марковским процессом принятия решений (Markov decision process (MDP)). MDP является формализацией процессов, которые частично зависят от принимаемых решений, а частично — от случая. Чтобы определить MDP, нужно задать четверку (S, A, P_a, R_a), где:

а) S — множество возможных состояний среды; в нашем случае — возможный размер популяции X, отрезок $[0,1]$;

б) C — множество возможных действий, в нашем случае множество всех допустимых управлений u — отрезок $[0,1]$;

в) $P_c(s, s') = P(s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = c)$ — вероятность оказаться в состоянии s' при условии, что в предыдущем периоде находились в состоянии s и выбрали действие a; в этом и заключается марковость процесса, данная вероятность зависит только от состояния и действия на предыдущем шаге и не зависит от остальной предыстории; в нашем случае данное распределение вероятности полностью определяется выражением (1.2);

г) $R_a(r, s) = P(r_{t+1} = r|s_t = s, a_t = c)$ — вероятность получить выгоду размера r при условии, что в предыдущем периоде находились в состоянии s и выбрали действие c; в исследуемой задаче размер выгоды на каждом шаге равен $\ell(t)X(t)$, распределение этой случайной величины несложно определить.

Для поиска оптимального управления марковским процессом принятия решения, ставится задача максимизации дисконтированного функционала наград:

$$G_t = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1},$$

где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ — дисконтирующий множитель. При $\gamma < 1$ и ограниченных наградах, выполнено $G_t < \infty$, поэтому максимизация G_t имеет смысл в таких условиях.

Под динамическим программированием понимается ряд алгоритмов, разработанных для поиска оптимального управления MDP. В частности, показано [24], что если

а) множества состояний S и действий C являются конечными,

б) полностью задана динамика среды (то есть известны распределения P_c, R_c),

то существует конечная процедура определения оптимального действия для каждого состояния среды.

Для применения этого алгоритма в рассматриваемой задаче нужно перейти к дискретной аппроксимации среды. Для этого можно зафиксировать некоторое натуральное число N и считать, что

а) множество состояний $S = \left\{0, \dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, \ldots, \dfrac{N-1}{N}, 1\right\}$,

б) множество действий (ограничение размера добычи) $C = \left\{0, \dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, \ldots, \dfrac{N-1}{N}, 1\right\}$,

в) распределения P_c, R_c, как и ранее, определяются выражением (1.2).

Преимуществом такого подхода является возможность построения управления, сколь угодно близкого к оптимальному, при N стремящемся к бесконечности. С другой стороны, для каждой новой функции роста популяции f и каждого распределения ω все расчеты требуется проводить заново, что требует существенных вычислительных ресурсов.

Пример 4. Рассмотрим такую же динамику популяции, что и в примере 2. Для аппроксимированной (дискретной) среды численно применим метод динамического программирования, чтобы определить оптимальное действие в каждом состоянии. При решении приближенной дискретной задачи число состояний N выбрано равным 500. Полученные оптимальные действия удобно отобразить на графике (рис. 2).

Найденную стратегию управления теперь можно применить для моделирования траекторий в исходной непрерывной среде, хотя сама стратегия была построена в приближенной дискретной. Примеры двух полученных траекторий представлены на рис. 3, при этом выборочная средняя выгода, рассчитанная по 1000 траекториям, оказалась равной $H_*^{sample} = 0{,}0415$.

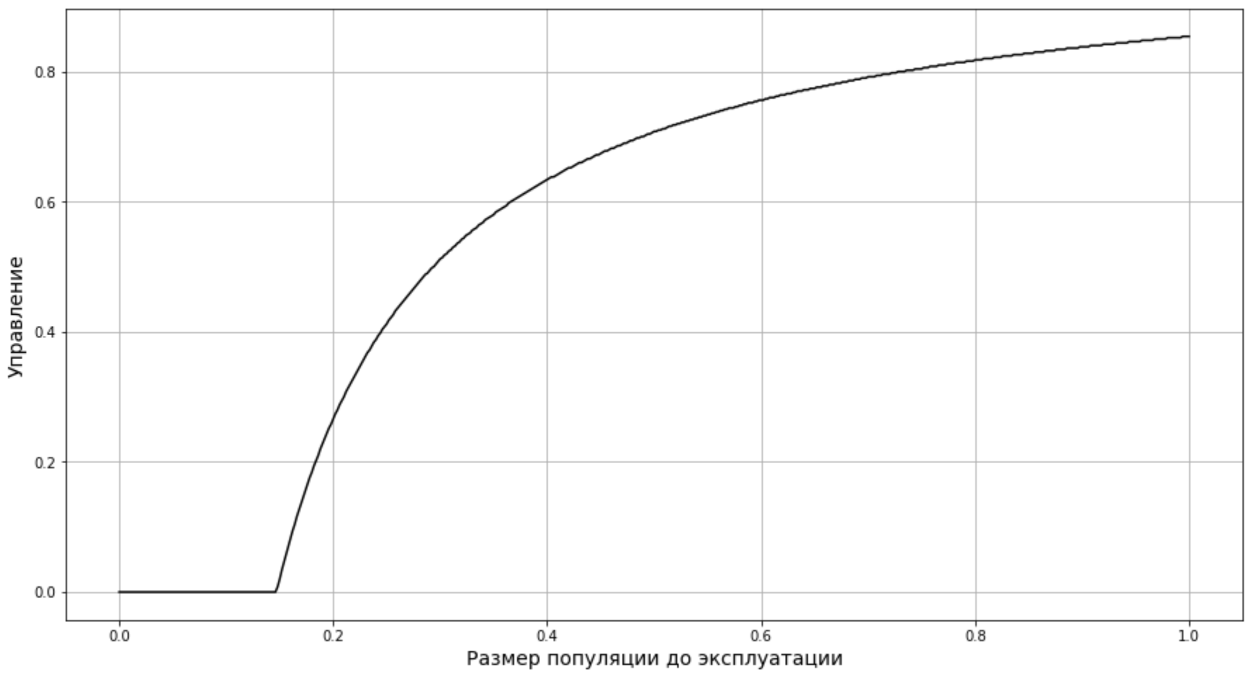

Рис. 2. Величина оптимального управления для аппроксимированной среды в зависимости от размера популяции до эксплуатации

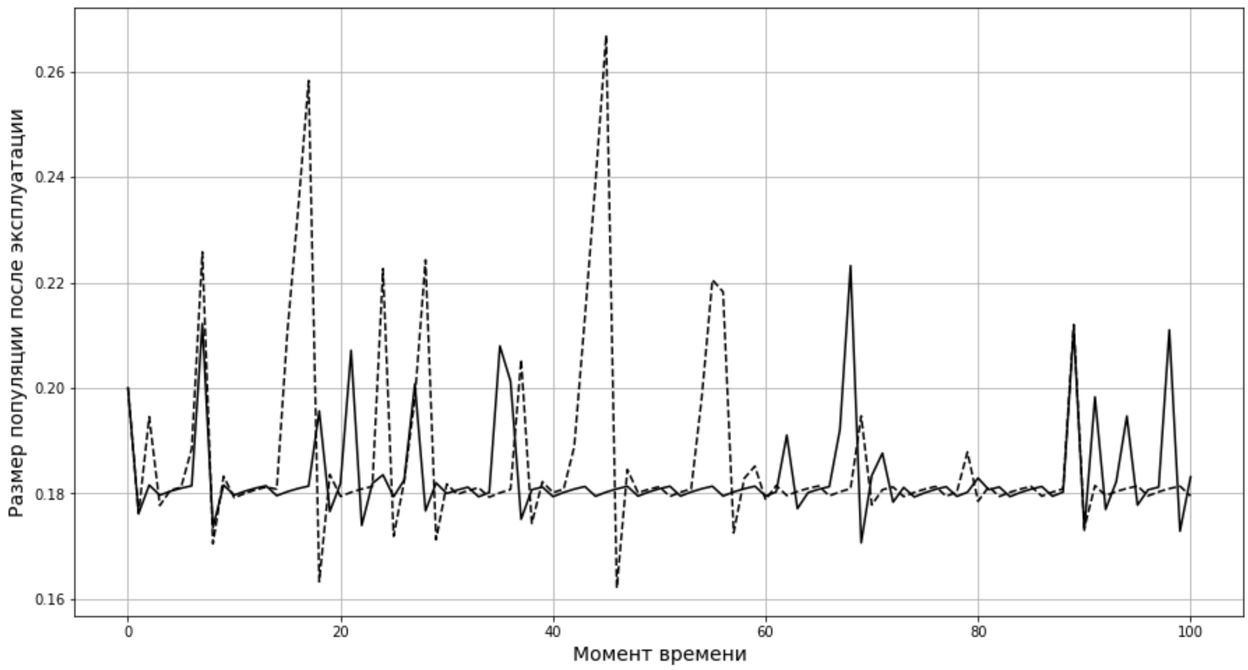

Рис. 3. Две из полученных траекторий решений уравнения (2.13) при моделировании для приближенной дискретной стратегии

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyakov A. O., Davydov A. A., Veliov V. M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources // Journal of Dynamical and Control Systems. 2015. Vol. 21. Issue 3. P. 475–494. https://doi.org/10.1007/s10883-015-9271-x
2. Quaas M. F., Tahvonen O. Strategic harvesting of age-structured populations // Marine Resource Economics. 2019. Vol. 34. No. 4. P. 291–309. https://doi.org/10.1086/705905

3. Егорова А. В., Родина Л. И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 501–517. https://doi.org/10.20537/vm190403
4. Belkhodja K., Moussaoui A., Alaoui M. A. A. Optimal harvesting and stability for a prey–predator model // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2018. Vol. 39. P. 321–336. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.07.004
5. Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 1. С. 119–151. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151
6. Беляков А. О., Давыдов А. А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 38–46. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46
7. Davydov A. A. Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2020. Vol. 310. Issue 1. P. 124–130. https://doi.org/10.1134/S0081543820050090
8. Давыдов А. А., Мельник Д. А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 99–107. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-99-107
9. Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Издательство Московского университета, 1993.
10. Reed W. J. A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource // Mathematical Biosciences. 1974. Vol. 22. P. 313–337. https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90097-2
11. Gleit A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth // Mathematical Biosciences. 1978. Vol. 41. Issues 1–2. P. 111–123. https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90069-X
12. Liu L., Meng X. Optimal harvesting control and dynamics of two-species stochastic model with delays // Advances in Difference Equations. 2017. Vol. 2017. Issue 1. Article number: 18. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1077-6
13. Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries // Journal of Environmental Economics and Management. 2018. Vol. 92. P. 659–676. https://doi.org/10.1016/j.jeem.2017.08.011
14. Родина Л. И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58. https://doi.org/10.20537/vm180105
15. Мастерков Ю. В., Родина Л. И. Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 41–49. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-04
16. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 81. P. 167–178. https://doi.org/10.1016/j.marpol.2017.03.028
17. Hening A., Nguyen D. H. Coexistence and extinction for stochastic Kolmogorov systems // The Annals of Applied Probability. 2018. Vol. 28. No. 3. P. 1893–1942. https://doi.org/10.1214/17-AAP1347
18. Hening A., Tran K. Q., Phan T. T., Yin G. Harvesting of interacting stochastic populations // Journal of Mathematical Biology. 2019. Vol. 79. Issue 2. P. 533–570. https://doi.org/10.1007/s00285-019-01368-x
19. Абрамова Е. П., Перевалова Т. В. Влияние случайного воздействия на равновесные режимы популяционной динамики // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 3–18. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-01
20. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989.
21. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
22. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2011.
23. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

24. Bellman R. A Markovian decision process // Journal of Mathematics and Mechanics. 1957. Vol. 6. No. 5. P. 679–684. https://www.jstor.org/stable/24900506

Поступила в редакцию 25.08.2021

Принята к публикации 28.04.2022

Родин Александр Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0083-1069
E-mail: alr.rodin@yandex.ru

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87;
профессор, кафедра математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», 119049, Россия, г. Москва, Ленинский проспект, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1077-2189
E-mail: LRodina67@mail.ru

Черникова Анастасия Владимировна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3930-0743
E-mail: nastik.e@bk.ru

Цитирование: А. А. Родин, Л. И. Родина, А. В. Черникова. О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 211–227.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 2. Pp. 211–227.

A. A. Rodin, L. I. Rodina, A. V. Chernikova

On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters

Keywords: difference equations, equations with random parameters, optimal exploitation, average time profit.

MSC2020: 39A23, 49L20, 49N90, 90C40, 93C55

DOI: 10.35634/vm220204

We consider a model of an exploited homogeneous population given by a difference equation depending on random parameters. In the absence of exploitation, the development of the population is described by the equation

$$X(k+1) = f\big(X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

where $X(k)$ is the population size or the amount of bioresources at time k, $f(x)$ is a real differentiable function defined on $I = [0, a]$ such that $f(I) \subseteq I$. At moments $k = 1, 2, \ldots$, a random fraction of the resource $\omega(k) \in \omega \subseteq [0, 1]$ is extracted from the population. The harvesting process can be stopped when the share of the harvested resource exceeds a certain value of $u(k) \in [0, 1)$ to keep as much of the population as possible. Then the share of the extracted resource will be equal to $\ell(k) = \min(\omega(k), u(k))$. The average temporary benefit H_* from the extraction of the resource is equal to the limit of the arithmetic mean from the amount of extracted resource $X(k)\ell(k)$ at moments $1, 2, \ldots, k$ when $k \to \infty$. We solve the problem of choosing the control of the harvesting process, in which the value of H_* can be estimated from below with probability one, as large a number as possible. Estimates of the average time benefit depend on the properties of the function $f(x)$, determining the dynamics of the population; these estimates are obtained for three classes of equations with $f(x)$, having certain properties. The results of the work are illustrated, by numerical examples using dynamic programming based on, that the process of population exploitation is a Markov decision process.

REFERENCES

1. Belyakov A. O., Davydov A. A., Veliov V. M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2015, vol. 21, issue 3, pp. 475–494. https://doi.org/10.1007/s10883-015-9271-x
2. Quaas M. F., Tahvonen O. Strategic harvesting of age-structured populations, *Marine Resource Economics*, 2019, vol. 34, no. 4, pp. 291–309. https://doi.org/10.1086/705905
3. Egorova A. V., Rodina L. I. On optimal harvesting of renewable resource from the structured population, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 501–517 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190403
4. Belkhodja K., Moussaoui A., Alaoui M. A. A. Optimal harvesting and stability for a prey–predator model, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2018, vol. 39, pp. 321–336. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.07.004
5. Frisman Y. Y., Kulakov M. P., Revutskaya O. L., Zhdanova O. L., Neverova G. P. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations, *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 119–151 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151
6. Belyakov A. O., Davydov A. A. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 14–21. https://doi.org/10.1134/S0081543817090036
7. Davydov A. A. Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2020, vol. 310, issue 1, pp. 124–130. https://doi.org/10.1134/S0081543820050090

8. Davydov A. A., Melnik D. A. Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse selection, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 99–107 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-99-107
9. Riznichenko G. Yu., Rubin A. B. *Matematicheskie modeli biologicheskikh produktsionnykh protsessov* (Mathematical models of biological production processes), Moscow: Moscow State University, 1993.
10. Reed W. J. A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource, *Mathematical Biosciences*, 1974, vol. 22, pp. 313–337. https://doi.org/10.1016/0025-5564(74)90097-2
11. Gleit A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth, *Mathematical Biosciences*, 1978, vol. 41, issues 1–2, pp. 111–123. https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90069-X
12. Liu L., Meng X. Optimal harvesting control and dynamics of two-species stochastic model with delays, *Advances in Difference Equations*, 2017, vol. 2017, issue 1, article number: 18. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1077-6
13. Tahvonen O., Quaas M. F., Voss R. Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries, *Journal of Environmental Economics and Management*, 2018, vol. 92, pp. 659–676. https://doi.org/10.1016/j.jeem.2017.08.011
14. Rodina L. I. Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180105
15. Masterkov Yu. V., Rodina L. I. Estimation of average time profit for stochastic structured population, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 41–49 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-04
16. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information, *Marine Policy*, 2017, vol. 81, pp. 167–178. https://doi.org/10.1016/j.marpol.2017.03.028
17. Hening A., Nguyen D.H. Coexistence and extinction for stochastic Kolmogorov systems, *The Annals of Applied Probability*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 1893–1942. https://doi.org/10.1214/17-AAP1347
18. Hening A., Tran K. Q., Phan T. T., Yin G. Harvesting of interacting stochastic populations, *Journal of Mathematical Biology*, 2019, vol. 79, issue 2, pp. 533–570. https://doi.org/10.1007/s00285-019-01368-x
19. Abramova E. P., Perevalova T. V. Influence of random effects on the equilibrium modes in the population dynamics model, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 3–18 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-01
20. Sharkovskii A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V. *Dinamika odnomernykh otobrazhenii* (Dynamics of one-dimensional mappings), Kiev: Naukova dumka, 1989.
21. Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* (Stability of biological communities), Moscow: Nauka, 1978.
22. Shiryaev A. N. *Veroyatnost'-1* (Probability-1), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011.
23. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2*, Wiley, 1971.
24. Bellman R. A Markovian decision process, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1957, vol. 6, no. 5, pp. 679–684. https://www.jstor.org/stable/24900506

Received 25.08.2021

Accepted 28.04.2022

Aleksandr Alekseevich Rodin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Institute of Physics and Technology, per. Institutskii, 9, Dolgoprudny, 141701, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0083-1069
E-mail: alr.rodin@yandex.ru

Lyudmila Ivanovna Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia; Professor, Department of Mathematics, National University of Science and Technology MISiS, Leninskii prospect, 4, Moscow, 119049, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1077-2189
E-mail: LRodina67@mail.ru

Anastasia Vladimirovna Chernikova, Post-Graduate Student, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3930-0743
E-mail: nastik.e@bk.ru

Citation: A. A. Rodin, L. I. Rodina, A. V. Chernikova. On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 211–227.