МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 171–186.

УДК 517.977.1

 М. И. Гусев, И. О. Осипов

О ЗАДАЧЕ ЛОКАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В статье рассматривается задача о приведении движения нелинейной управляемой системы в начало координат при заданном интегральном ресурсе управления на конечном промежутке времени. Исследуется вопрос о построении локального синтеза управления, решающего задачу, в предположении, что промежуток времени, в течении которого осуществляется перевод системы, достаточно мал. Указаны достаточные условия, при выполнении которых задачу можно решить путем приближенной замены нелинейной системы ее линеаризацией в окрестности начала координат.

Ключевые слова: нелинейные системы, множества управляемости, интегральные ограничения, линеаризация, уравнение Беллмана, локальный синтез, малый промежуток времени, асимптотика.

DOI: 10.35634/vm220202

Введение

Метод линеаризации, состоящий в замене нелинейной управляемой системы ее линейным приближением в окрестности некоторой траектории, широко используется в теории управления. Свойства линеаризованной системы во многих случаях определяют локальное поведение нелинейной системы вблизи данной траектории. Например, при решении задачи стабилизации можно нелинейную систему приближенно заменить ее линеаризацией в окрестности положения равновесия. Хорошо известно, что если линеаризованная система вполне управляема (стабилизируема), то линейная обратная связь, стабилизирующая эту систему, будет локально (в некоторой окрестности положения равновесия) стабилизировать и нелинейную систему (см., например, [1–4]).

В данной статье исследуется задача локального синтеза для нелинейной системы с интегральным квадратичным ограничением на управление. Отличие рассматриваемой задачи от классической задачи стабилизации состоит в том, что она рассматривается на конечном, притом малом, промежутке времени. Целью управления является перевод системы в начало координат за заданное время, начало координат является положением равновесия системы.

В отличии от задачи стабилизации, для применения метода линеаризации в задаче локального синтеза, свойства управляемости линейной системы оказывается недостаточно и приходится использовать дополнительное ограничение на асимптотику по времени ее грамиана управляемости. Это ограничение совпадает с достаточным условием, обеспечивающим асимптотическую эквивалентность множеств достижимости (нуль-управляемости) нелинейной и линеаризованной систем на малых промежутках времени.

Статья состоит из четырех параграфов. В первом параграфе приводится постановка задачи синтеза управления, приводящего нелинейную систему в начало координат за фиксированное время при минимальном расходе интегрального ресурса управления. Приведены основные определения, кратко описан подход, основанный на методе динамического программирования, и его связь с множествами достижимости (нуль-управляемости) системы. Во втором параграфе задача синтеза рассматривается для линейной системы. В этом случае решение задачи хорошо известно. Приводимое оптимальное управление отличается от известного несколько более удобной формой представления, которая используется при доказательстве основного результата статьи в третьем параграфе. Здесь показано, что при ограничении на асимптотику по времени грамиана управляемости линеаризованной системы построенное для нее управление решает задачу синтеза и для нелинейной системы для достаточно малого промежутка времени. Последний параграф содержит ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

§ 1. Основные обозначения и определения

Рассмотрим нелинейную систему, аффинную по управлению

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \overline{T}. \tag{1.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управление, $\overline{T}$ — некоторое фиксированное положительное число. Вектор-функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $f(0) = 0$, B — $n \times r$-матрица.

Под $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, \overline{T}]$ будем понимать пространство интегрируемых с квадратом скалярных или вектор-функций на $[0, \overline{T}]$. Скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$ определено равенством

$$(u(\cdot), \upsilon(\cdot)) = \int_0^{\overline{T}} u^\top(t)\upsilon(t)\,dt.$$

Управление $u(\cdot)$ будем выбирать из шара радиуса μ, $\mu > 0$,

$$\|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2} = (u(\cdot), u(\cdot)) \leqslant \mu^2, \tag{1.2}$$

в пространстве $\mathbb{L}_2[0, \overline{T}]$ вектор-функций. В условиях описанных предположений, каждому $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0, u(\cdot)) = x_0$. Будем далее считать, что все рассматриваемые решения продолжимы на промежуток $[0, \overline{T}]$.

Пусть $0 < T \leqslant \overline{T}$.

Определение 1. *Множеством нуль-управляемости* $N(T, \mu)$ системы (1.1) в пространстве состояний в момент времени T назовем множество всех начальных состояний $\widetilde{x} = x(0) \in \mathbb{R}^n$ системы (1.1), из которых система может быть приведена в начало координат управлениями $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu) = \{u \colon \|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2} \leqslant \mu^2\}$,

$$N(T, \mu) = \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu),\ x(T, \widetilde{x}, u(\cdot)) = 0\}.$$

В приведенном определении можно считать, что $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, T]$, либо $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, \overline{T}]$. Нетрудно понять, что для любого из этих пространств мы получаем одно и то же множество нуль-управляемости. Будем далее считать, что $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, T]$.

Нетрудно заметить, что множество нуль-управляемости $N(T, \mu)$ совпадает с множеством достижимости системы

$$\dot{x}(\tau) = -f(x(\tau)) - Bu(\tau), \quad x(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \overline{T}. \tag{1.3}$$

в момент T. Данная система получается из исходной обращением времени: $\tau = T - t$. Множество достижимости $G(T, \mu)$ определяется равенством

$$G(T, \mu) = \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu),\ x(T, 0, u(\cdot)) = \widetilde{x}\},$$

где $x(t, 0, u(\cdot))$ — траектория системы (1.3).

Далее предполагаем, что все траектории $x(t)$ системы (1.3), отвечающие удовлетворяющим (1.2) управлениям, лежат внутри некоторого компактного множества $D \subset \mathbb{R}^n$. Это условие можно, например, проверить, построив подходящую функцию Ляпунова [5].

На пространстве состояний системы (1.1) и временном интервале $0 \leqslant t \leqslant \overline{T}$ определим функцию Беллмана $V(t,x)$, характеризующую минимальный ресурс управления, необходимый для приведения системы (1.1) из начального состояния x в начало координат

$$V(t,x) = \min_u \int_0^t u^\top(\xi)u(\xi)\,d\xi, \quad x(0) = x, \quad x(t) = 0. \tag{1.4}$$

Тогда множество нуль-управляемости $N(T,\mu)$ может быть найдено как множество уровня функции Беллмана

$$N(T,\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon V(T,x) \leqslant \mu^2\}.$$

Действительно, если $x \in N(T,\mu)$, то система (1.1) переводится из x в 0 управлением из $B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)$ и значит $V(T,x) \leqslant \mu^2$. Обратно, пусть $V(T,x) \leqslant \mu^2$. Обозначим через $u_k(\cdot)$ минимизирующую последовательность управлений в задаче (1.4) при $t = T$ такую, что $u_k(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu+1/k)$. Пусть $x_k(\cdot)$ — соответствующая последовательность траекторий, $x_k(0) = x$, $x_k(T) = 0$. Принимая во внимание слабую компактность последовательности управлений $u_k(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$ и компактность последовательности траекторий $x_k(\cdot)$ в $C[0,T]$ [6], можем заключить, что найдется управление $u_0(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)$, переводящее систему из x в 0. Последнее означает, что $x \in N(T,\mu)$.

Если функция $V(t,x)$ непрерывно дифференцируема, то она удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = -\min_u \{u^\top u + \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^\top (f(x) + Bu)\}. \tag{1.5}$$

Управление, на котором достигается минимум в уравнении (1.5), определяется формулой

$$u(t,x) = -\frac{1}{2}B^\top \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, \tag{1.6}$$

где $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ — вектор нормали к границе множества нуль-управляемости $N(t,\mu)$ (множества достижимости $G(t,\mu)$). Данное управление обеспечивает приведение системы в начало координат с использованием ресурса не превосходящего μ^2. Однако использование данной конструкции подразумевает, что функция $V(t,x)$ дифференцируема, что априори не гарантировано. Кроме того, даже в случае дифференцируемости ее поиск требует решения уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби. Возникает вопрос, а нельзя ли в формуле для $u(t,x)$ заменить функцию $V(t,x)$ аналогичной функцией $V_0(t,x)$ для линеаризованной в окрестности начала координат системы? Будет ли построенная обратная связь обеспечивать приведение нелинейной системы в нуль на конечном промежутке времени? Ответ на данный вопрос оказывается положительным, если линеаризованная система вполне управляема и ее грамиан управляемости имеет асимптотику, обеспечивающую близость множеств достижимости нелинейной и линеаризованной систем на малых промежутках времени.

§ 2. Оптимальный синтез управления в линейном случае

Рассмотрим здесь линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \overline{T}. \tag{2.1}$$

Будем искать $V(t,x)$ в виде квадратичной формы $V(t,x) = x^\top Q(t)x$, где $Q(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, непрерывно дифференцируемая по t. Учитывая, что минимум достигается на управлении (1.6)

$$u(t,x) = -B^\top Q(t)x, \tag{2.2}$$

подставим $V(t,x)$ в уравнение (1.5) и получим следующие соотношения

$$-\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \left(B^\top Q(t)x\right)^\top \left(B^\top Q(t)x\right) + \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^\top \left(Ax - BB^\top Q(t)x\right),$$
$$-x^\top \dot{Q}(t)x = -x^\top Q(t)BB^\top Q(t)x + 2x^\top Q(t)Ax.$$

Таким образом уравнение (1.5) удовлетворяется, если $Q(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{Q} = QBB^\top Q - A^\top Q - QA. \tag{2.3}$$

Наряду с системой (2.1) рассмотрим систему, записанную в обратном времени

$$\dot{x} = -Ax - Bu, \quad 0 \leqslant t \leqslant \overline{T}. \tag{2.4}$$

Под грамианом управляемости системы (2.4) мы будем понимать матрицу (см., например, [4])

$$W(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)}BB^\top e^{-A^\top(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}BB^\top e^{-A^\top\tau}\,d\tau. \tag{2.5}$$

Грамиан $W(t)$ положительно определен при $t > 0$ тогда и только тогда, когда пара $(-A,-B)$ (или, что равносильно, (A,B)) вполне управляема. Далее мы предполагаем это условие выполненным. Легко проверить, что $W(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{W}(t) = -AW(t) - W(t)A^\top + BB^\top, \qquad W(0) = 0. \tag{2.6}$$

Утверждение 1. *Матрица* $Q(t) = W^{-1}(\overline{T} - t)$ *удовлетворяет уравнению* (2.3) *при* $0 \leqslant t < \overline{T}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $W_1(t) = W(\overline{T} - t)$ является решением уравнения

$$\dot{W}_1(t) = AW_1(t) + W_1(t)A^\top - BB^\top, \qquad W_1(\overline{T}) = 0.$$

Дифференцируя тождество $Q(t)W_1(t) \equiv I$ при $t \in [0;\overline{T})$, получим $\dot{Q}W_1 + Q\dot{W}_1 = 0$. Умножив получившееся равенство справа на Q и заменив $\dot{W}_1$ на правую часть дифференциального уравнения, приходим к равенству (2.3).

В качестве краевого условия для уравнения (2.3) выберем $Q(0) = W^{-1}(T)$. Таким образом, чтобы использовать управление (2.2) для $0 < t \leqslant T \leqslant \overline{T}$, достаточно вычислить $W(T)$, а затем интегрировать уравнение для $Q(t)$ с указанным начальным условием. Интегрирование можно проводить синхронно с движением системы (2.1), замкнутой обратной связью (2.2), это удобно для численного моделирования. Так как $W(t) \to 0$ при $t \to 0$, то $\|Q(t)\| \to \infty$, $t \to T$.

Решение $Q(t)$ с начальным условием $Q(0) = W^{-1}(T)$ зависит от момента времени T. Нетрудно, однако, понять, что его вычисление для другого, меньшего момента времени не требует повторного интегрирования уравнения (2.3). Действительно, обозначим через $\overline{Q}(t)$ решение, отвечающее моменту $\overline{T}$, и пусть $Q(t)$ отвечает моменту $T < \overline{T}$. Обозначим $\Delta = \overline{T} - T$. Тогда $\overline{Q}(t) = W^{-1}(\overline{T} - t)$, $Q(t) = W^{-1}(T - t)$, следовательно

$$Q(t) = W^{-1}(T - t) = W^{-1}(\overline{T} - \Delta - t) = \overline{Q}(t + \Delta), \quad 0 \leqslant t < T.$$

Таким образом, достаточно проинтегрировать уравнения (2.3) только один раз на промежутке $[0, \overline{T})$.

Замкнутую обратной связью (2.2) систему (2.1) преобразуем к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BB^\top Q(t))x, & 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x, \\ \dot{Q} = QBB^\top Q - A^\top Q - QA, & Q(0) = W^{-1}(T). \end{cases} \tag{2.7}$$

Управление (2.2) переводит систему в начало координат за время T из любого начального состояния.

Утверждение 2. *Траектория $x(t)$ системы (2.7), выпущенная из точки x, попадает в начало координат в момент времени T. Расход интегрального ресурса управления на переход из x в 0 равен $x^\top Q(0)x$ — это минимально возможное значение ресурса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем $x^\top Q(t)x$ вдоль траектории $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}x^\top Qx = \dot{x}^\top Qx + x^\top \dot{Q}x + x^\top Q\dot{x} = x^\top (A^\top - QBB^\top)Qx + \\ + x^\top Q(A - BB^\top Q)x + x^\top (QBB^\top Q - A^\top Q - QA)x = -x^\top (QBB^\top Q)x.$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до t получаем

$$x^\top (t)Q(t)x(t) = x^\top Q(0)x - \int_0^t u^\top (\xi)u(\xi)\, d\xi, \tag{2.8}$$

где $u(\xi) = -B^\top Q(\xi)x(\xi)$ — текущее управление.

Обозначим $y(t) = Q(t)x(t)$, дифференцируя $y(t)$ имеем

$$\dot{y} = \dot{Q}x + Q\dot{x} = (QBB^\top Q - A^\top Q - QA)x + Q(A - BB^\top Q)x = -A^\top Qx.$$

Таким образом, функция $y(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения $\dot{y}(t) = -A^\top y(t)$ и, следовательно, ограничена на $[0, T]$. Учитывая, что $x(t) = Q^{-1}(t)y(t) = W(T-t)y(t)$ и $W(T-t) \to 0$ при $t \to T$, получим $x(T) = 0$. Из $x^\top (t)y(t) = x^\top (t)Q(t)x(t)$ следует, что $x^\top (t)Q(t)x(t) \to 0, \ t \to T$.

Переходя в равенстве (2.8) к пределу, получим

$$x^\top Q(0)x = \int_0^T u^\top (\xi)u(\xi)\, d\xi.$$

Известно, что $x^\top Q(0)x = x^\top W^{-1}(T)x$ есть минимальная величина интегрального квадратичного функционала в классе программных управлений (см., например, [10]). Это завершает доказательство. □

Замечание 1. Уравнение (2.3) — это уравнение Риккати, а (1.6) — известная формула для линейно-квадратичного регулятора. В этом виде обычно записывается решение задачи со свободным правым концом траектории (см., например, [7, с. 660], [8, с. 435]). Для подобной задачи принцип максимума Понтрягина дает условие для $Q(T)$, например, $Q(T) = 0$ при отсутствии терминальной составляющей в функционале. В нашем случае правый конец траектории фиксирован и краевое условие для Q из принципа максимума получить не удается. В [9, 10] предложено решение задачи, имеющее вид $u(t, x) = -B^\top X^\top (T, t)W^{-1}(t)X(T, t)x$, где $W(t)$ — грамиан управляемости, $X(T, t)$ — фундаментальная матрица системы. Мы приводим решение в традиционном и более удобном виде, используя грамиан системы, записанной в обратном времени и краевое условие в начальный момент времени. Для полноты изложения приведено доказательство этого факта.

§ 3. Локальный синтез управления для нелинейной системы

В данном параграфе выясняются условия, при выполнении которых линейная обратная связь вида (2.2), построенная для линеаризованной системы, переводит нелинейную систему (1.1) в начало координат для всех начальных векторов из области нуль-управляемости, если время T достаточно мало. Здесь можно провести параллель с решением задачи стабилизации нелинейной системы в окрестности положения равновесия. Известно, что если линеаризованная в точке равновесия система вполне управляема (стабилизируема), то линейная обратная связь, стабилизирующая эту систему, будет локально стабилизировать и нелинейную систему (см. [1–4]). Доказательство этого факта основывается на анализе поведения квадратичной функции Ляпунова, построенной для линеаризованной системы, на траекториях нелинейной системы. Отметим, что рассматриваемая нами задача отличается от классической задачи стабилизации тем, что управление строится на конечном, притом малом, промежутке времени. Поэтому в нашем случае приходится анализировать поведение не функции Ляпунова, а квадратичной функции цены $x^\top Q(t)x$ на траекториях нелинейной системы. Так как норма матрицы $Q(t)$ стремится к бесконечности при t стремящемся к T, в проводимом анализе приходится учитывать асимптотику $Q(t)$ в этой точке. Условие 1, далее задающее ограничения на асимптотику, совпадает с условиями, гарантирующими асимптотическую эквивалентность множеств нуль-управляемости нелинейной и линеаризованной систем в метрике Банаха–Мазура [11–14]. Задачам стабилизации и задачам локального синтеза на малых промежутках времени посвящены работы [15, 16], в которых рассматриваются задачи с геометрическими ограничениями на управление. Отметим также, что оптимальные управления для нелинейной и линеаризованной систем, задаваемые формулами (1.6), (2.2), выражаются через векторы нормалей к границам множеств нуль-управляемости данных систем.

Далее будем рассматривать нелинейную управляемую систему (1.1), замкнутую линейной обратной связью $u(t,x) = -B^\top Q(t)x$

$$\dot z = f(z) - BB^\top Q(t)z, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad z(0) = z_0, \tag{3.1}$$

и линеаризованную систему

$$\dot x = Ax - BB^\top Q(t)x, \qquad x(0) = z_0, \tag{3.2}$$

с тем же начальным условием. Во всех дальнейших рассуждениях считаем, что пара (A, B) вполне управляема и, следовательно, грамиан $W(\tau)$ положительно определен при $\tau > 0$.

Далее мы предполагаем, что существует $r > 0$, такое что $f(z) = Az + R(z)$, где $\|R(z)\| \leqslant k\|z\|^2$ при $z \in B(0,r)$. Здесь $B(0,r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом r. Это условие выполняется, если $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = A$ и компоненты $f(z)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

В дальнейшем для упрощения выкладок мы, как правило, опускаем зависимость переменных от t в уравнениях.

Вычитая из (3.1) уравнение (3.2), приходим к равенству

$$\dot y = Ay + R(z) - BB^\top Qy, \qquad y(0) = 0,$$

где $Q = Q(t),\ y = y(t) = z(t) - x(t)$.

Обозначим $\widetilde V(t,y) = y^\top Q(t)y$. Дифференцируя $\widetilde V(t,y(t))$ по t, получим, принимая во внимание уравнение (2.3),

$$\frac{d\widetilde V}{dt} = R^\top(z)Qy + y^\top QR(z) - y^\top QBB^\top Qy. \tag{3.3}$$

Обозначим $\langle y, x\rangle_Q = y^\top Qx$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, тогда (3.3) можно представить в виде

$$\frac{d\widetilde{V}}{dt} = 2\langle R(z), y\rangle_Q - y^\top QBB^\top Qy,$$

откуда следует неравенство $\frac{d\widetilde{V}}{dt} \leqslant 2\|R(z)\|_Q\|y\|_Q$. Здесь $z = z(t)$, $y = y(t)$, $Q = Q(t)$, $0 < t \leqslant T$, $\|x\|_Q = \langle x, x\rangle_Q^{1/2}$.

Заметим, что $\|y\|_Q = \sqrt{\widetilde{V}}$, $Q(t) = W^{-1}(T-t)$. Для любого $l \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $l^\top W(T-t)l \geqslant \nu(T-t)l^\top l$, где $\nu(\tau)$ — минимальное собственное число матрицы $W(\tau)$.

Если обозначить $\bar{l} = W^{1/2}(T-t)l$, то

$$l = W^{-1/2}(T-t)\bar{l}, \qquad \bar{l}^\top\bar{l} = l^\top W(T-t)l \geqslant \nu(T-t)\bar{l}^\top W^{-1}(T-t)\bar{l}.$$

Таким образом, подставив в последнее неравенство $\bar{l} = R(z)$, получим

$$\|R(z)\|_Q = \sqrt{R^\top(z)QR(z)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu(T-t)}}\|R(z)\|,$$

где Q и z — функции t.

В итоге приходим к неравенствам

$$\frac{d\widetilde{V}}{dt} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\nu(T-t)}}\|R(z)\|\sqrt{\widetilde{V}} \leqslant \frac{k_0}{\sqrt{\nu(T-t)}}\|z\|^2\sqrt{\widetilde{V}}, \qquad k_0 = 2k,$$

если $z = z(t) \in B(0, r)$.

Лемма 1. *Пусть Q, W — положительно определенные матрицы, $Q = W^{-1}$. Тогда $\forall z \in \mathbb{R}^n$ $\|z\|^2 \leqslant \eta_{\max}(W)z^\top Qz$, где $\eta_{\max}(W)$ — максимальное собственное число матрицы W.*

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|z\|^2 \to \max, \qquad z^\top Qz = 1.$$

Решение задачи, очевидно, существует. Приравнивая нулю градиент функции Лагранжа $L(z, \lambda) = \|z\|^2 + \lambda(z^\top Qz - 1)$, получим $Qz = -\frac{1}{\lambda}z$, причем λ не может быть нулем. Следовательно, z — собственный вектор матрицы Q, отвечающий собственному числу $\alpha = -\frac{1}{\lambda} > 0$. Тогда $\|z\|^2 = \frac{1}{\alpha}z^\top Qz = \frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\alpha}z = Q^{-1}z = Wz$, то есть $\frac{1}{\alpha}$ — собственное число матрицы W. □

Лемма 2. *Найдется константа $k_2 > 0$ такая, что*

$$\|y(t)\| \leqslant k_2\sqrt{T-t}\sqrt{\widetilde{V}(t, y(t))}, \qquad 0 < t \leqslant T \leqslant \overline{T}.$$

Доказательство. Действительно, из определения $W(t)$ (см. (2.5)) следует, что

$$\eta_{\max}(W(t)) = \max_{\|y\|=1} y^\top W(t)y \leqslant \left(\max_{\|y\|=1}\max_{0\leqslant\tau\leqslant\overline{T}} y^\top e^{-A\tau}BB^\top e^{-A^\top\tau}y\right)t = k_2^2 t,$$

где через k_2^2 обозначена величина максимума в скобках. Применяя лемму 1 к паре $W = W(T-t)$ и $Q(t) = W^{-1}(T-t)$, получим утверждение леммы 2. □

Лемма 3. *Пусть $x(t)$ — решение уравнения (3.2). Тогда $\|x(T-t)\| \leqslant k_3\sqrt{(T-t)}$, где k_3 — некоторая положительная константа, зависящая от начального вектора z_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mu = \sqrt{z_0^\top Q(0) z_0}$. Понятно, что для любого момента $\zeta \in [0, T]$, $x(\zeta) \in N_0(\zeta, \mu)$, $N_0(\zeta, \mu)$ — множество нуль-управляемости линеаризованной системы (2.1). Это верно, так как $u(\cdot) = -B^\top Q(\cdot)x(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$ и $x(T) = 0$. Следовательно, $x(\zeta) \in G_0(\zeta, \mu)$, где $G_0(\zeta, \mu)$ — множество достижимости системы (2.4). Таким образом, имеет место равенство

$$x(\zeta) = -\int_0^\zeta e^{-A(\zeta-\tau)} B\upsilon(\tau)\, d\tau,$$

для некоторого $\upsilon(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$. Применяя к последнему соотношению неравенство Коши–Буняковского и заменяя ζ на $T - t$, получаем требуемую оценку, взяв

$$k_3 = \mu(\max_{0\leqslant\tau\leqslant T} \|e^{-A\tau}B\|)^{1/2}.$$

□

Грамиан $W(\tau)$ можно представить в виде $W(\tau) = \tau W_1(\tau)$, где $W_1(\tau)$ — грамиан управляемости системы $\dot{x}(t) = -\tau Ax(t) - B\upsilon(t)$, $t \in [0, 1]$, где $\tau > 0$ — параметр. Обозначим через $\nu_1(\tau)$ минимальное собственное число грамиана $W_1(\tau)$; $\nu(\tau)$ и $\nu_1(\tau)$ связаны равенством $\nu(\tau) = \tau\nu_1(\tau)$ [12].

Мы далее потребуем выполнение следующего условия.

Условие 1. Пара (A, B) вполне управляема. Найдутся такие $\tau_0 > 0$, $k_4 > 0$ и $\alpha > 0$, что

$$\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\nu_1(\tau)}} \leqslant k_4 \frac{1}{\tau^{1-\alpha}} \tag{3.4}$$

при $0 < \tau \leqslant \tau_0$.

Неравенство (3.4) можно записать в следующем эквивалентном виде $\nu_1(\tau) \geqslant \tau^{3-\alpha}/k_4^2$, из которого понятно, что это ограничение снизу на асимптотику $\nu_1(\tau)$ — минимальное собственное число грамиана управляемости не должно стремиться к нулю слишком быстро. Приведенное условие является достаточным для того, чтобы множества достижимости (нуль-управляемости) нелинейной и линеаризованной систем на промежутке длины τ были выпуклыми и асимптотически эквивалентными при $\tau \to 0$ [11–14].

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Найдется $T_1 > 0$ такое, что для любого $0 < T \leqslant T_1$ и любого вектора z_0, удовлетворяющего неравенству $z_0 Q(0) z_0 = z_0 W^{-1}(T) z_0 \leqslant \mu^2$, решение $z(t)$ системы (3.1) стремится к нулю при $t \to T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем T_1 настолько малым, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$T_1 \leqslant \tau_0, \quad T_1^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{k_0 k_4 (k_2 + k_3)^2}, \quad T_1 \leqslant \frac{r}{k_2 \mu^2}. \tag{3.5}$$

Последнее из неравенств обеспечивает, что все начальные векторы z^0, удовлетворяющие условиям теоремы, попадают в шар $B(0, r)$. Действительно, из лемм 1 и 2, примененных к матрицам $W = W(T)$, $Q = Q(0) = W^{-1}(T)$, следует

$$\|z_0\|^2 \leqslant \eta_{\max}(W) z_0^\top Q(0) z_0 \leqslant k_2 T\mu^2 \leqslant k_2 T_1 \mu^2 \leqslant r.$$

Возьмем произвольное $T > 0$, не превосходящее T_1. Далее для фиксированного z_0 положим $x_0 = z_0$ и определим решение $x(t)$ и функцию $y(t) = z(t) - x(t)$. Из леммы 3 следует, что $\|x(T-t)\| \leqslant k_3\sqrt{(T-t)}$. Покажем, что $\widetilde{V}(t, y(t)) = y^\top(t)Q(t)y(t)$ ограничена на $[0, T]$.

С учетом уже доказанных неравенств можно утверждать, что

$$\frac{d\widetilde{V}}{dt} \leqslant \frac{k_0}{\sqrt{\nu(T-t)}}(\|x\| + \|y\|)^2\sqrt{\widetilde{V}} \leqslant \frac{k_0(\sqrt{T-t})^2(k_3 + k_2\sqrt{\widetilde{V}})^2}{\sqrt{\nu(T-t)}}\sqrt{\widetilde{V}}. \tag{3.6}$$

Так как $\nu(T-t) = (T-t)\nu_1(T-t)$, то из (3.6) получаем неравенство

$$\frac{d\widetilde{V}}{dt} \leqslant \varphi(t)\left(k_3 + k_2\sqrt{\widetilde{V}}\right)^2\sqrt{\widetilde{V}}, \tag{3.7}$$

где обозначено $\varphi(t) = k_0\sqrt{T-t}/\sqrt{\nu_1(T-t)}$. Наряду с неравенством (3.7) рассмотрим дифференциальное уравнение (систему сравнения [17])

$$\frac{d\psi}{dt} = \varphi(t)\left(k_3 + k_2\sqrt{\psi}\right)^2\sqrt{\psi}, \qquad \psi(0) = 1.$$

При $\psi > 0$ правая часть системы сравнения локально липшицева по ψ. Решение системы при заданном начальном условии однозначно определено в некоторой окрестности точки $t = 0$. Так как $\frac{d\psi}{dt} \geqslant 0$, то это решение лежит в области $\psi \geqslant 1$. Покажем, что $\psi(t)$ продолжимо на весь отрезок $[0, T]$. Для этого достаточно доказать его ограниченность.

В силу того, что в области своего определения $\psi(t) \geqslant 1$, оно удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant \varphi(t)\left(k_3\sqrt{\psi} + k_2\sqrt{\psi}\right)^2\sqrt{\psi} \leqslant \varphi(t)(k_3 + k_2)^2\psi^{\frac{3}{2}}.$$

Обозначим $\zeta(t) = (T-t)^{\alpha-1}$. Из условия 1 следует, что $\varphi(t) \leqslant k_0k_4\zeta(t)$, $0 \leqslant t < T$. Тогда

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant \zeta(t)k_0k_4(k_2 + k_3)^2\psi^{\frac{3}{2}}. \tag{3.8}$$

Для (3.8) снова берем систему сравнения

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \zeta(t)k_0k_4(k_2 + k_3)^2\psi_1^{\frac{3}{2}}, \quad \psi_1(0) = 1.$$

Эта система интегрируется явно. Разделяя переменные, приходим к равенству

$$d\psi_1^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}k_0k_4(k_2 + k_3)^2\zeta(t)dt.$$

Интегрируя, находим $\psi_1(t) = \left(-\frac{1}{2}k_0k_4(k_2 + k_3)^2\int_0^t \zeta(\xi)\,d\xi + 1\right)^{-2}$.

Далее, получаем

$$\int_0^t \zeta(\xi)\,d\xi = \int_0^t \frac{d\xi}{(T-\xi)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left[T^\alpha - (T-t)^\alpha\right] \leqslant \frac{1}{\alpha}T^\alpha,$$

где $\frac{1}{\alpha}\left[T^\alpha - (T-t)^\alpha\right] \uparrow \frac{1}{\alpha}T^\alpha$ при $t \to T$. Учитывая второе из неравенств (3.5), имеем

$$-\frac{1}{2}k_0k_4(k_2 + k_3)^2\int_0^t \zeta(\xi)\,d\xi \geqslant -\frac{1}{2\alpha}T^\alpha k_0k_4(k_2 + k_3)^2 \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $1 \leqslant \psi_1(t) \leqslant 4$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Таким образом, $\psi_1(t)$ определена и ограничена на $[0, T]$. Последовательно применяя теоремы сравнения (см. [17]) к дифференциальным неравенствам, можем заключить, что ψ и $\widetilde{V}$ ограничены на $[0, T]$. Из ограниченности $\widetilde{V}$ следует, что $y(t) \to 0$, $t \to T$, а так как $x(t) \to 0$, то и $z(t) = x(t) + y(t) \to 0$, $t \to T$. $\square$

§ 4. Примеры

Продемонстрируем описанный подход к синтезу управления на примере нескольких нелинейных систем.

Пример 1. Рассмотрим движение математического маятника, описывающееся следующими уравнениями

$$\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = -\sin(x_1) + u, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x_0. \tag{4.1}$$

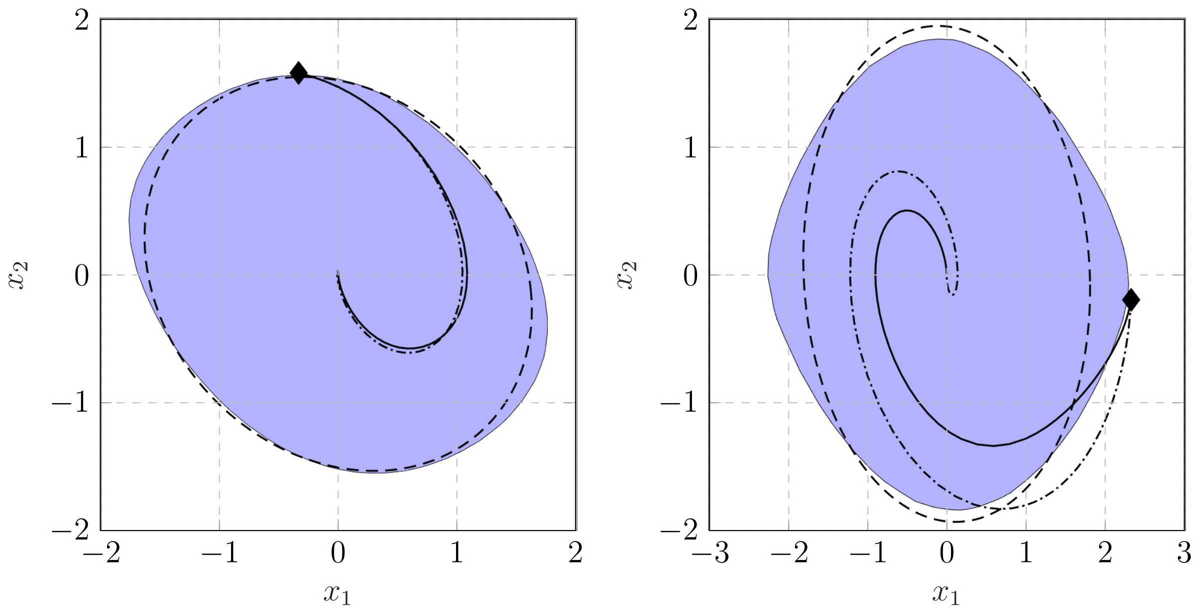
Желаемое конечное состояние $x_1(T) = x_2(T) = 0$. Матрицы линеаризованной в конечной точке системы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Пара (A, B) отвечает стационарной, вполне управляемой системе второго порядка. Проверим выполнение условия 1, найдя минимальное собственное число $\nu_1(\tau)$ грамиана управляемости $W_1(\tau)$ для системы отвечающей паре $(-\tau A, -B)$.

$$W_1(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sin(2\,\tau)}{4\,\tau} & -\frac{\sin(\tau)^2}{2\,\tau} \\ -\frac{\sin(\tau)^2}{2\,\tau} & \frac{\sin(2\,\tau)}{4\,\tau} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

а минимальное собственное число $\nu_1(\tau)$ можно записать в виде $\nu_1(\tau) = \frac{\tau^2}{12} + O(\tau^4)$. Так как $\tau^2 > \tau^{3-\alpha}$ при малых τ и α, то условие 1 выполняется, а значит обратная связь (2.2), рассчитанная для системы (4.2), будет приводить в нуль и систему (4.1). Условие 1 совпадает с достаточным условием близости множеств достижимости (нуль-управляемости) нелинейной и линеаризованной систем.



(I): при $T = 5$ **(II):** при $T = 7$

Рис. 1. Результаты численного эксперимента для систем (4.2) и (4.1)

На рисунках 1-I и 1-II приняты следующие обозначения. Пунктирная линия — граница множества нуль-управляемости $N_1(T,1)$ линеаризованной системы (4.2), совпадающего с множеством достижимости $G_1(T,1)$ линейной системы, отвечающей паре $(-A,-B)$. Множество нуль-управляемости $N_2(T,1)$ нелинейной системы (4.1), которое совпадает с множеством достижимости $G_2(T,1)$ системы $\dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = \sin(x_1) - u$ закрашено. Движение нелинейной системы показано сплошной линией, а линеаризованной — штрих-пунктирной.

В случае $T = 5$, множества $N_1(5,1)$ и $N_2(5,1)$ систем близки, как и траектории, приводящие системы из начального состояния x_0 (черный ромб) в начало координат. При $T = 7$, формы множеств $N_1(7,1)$ и $N_2(7,1)$ различны, как и траектории систем. Тем не менее, линейная обратная связь приводит нелинейную систему в начало координат. Значения начальных состояний x_0 и функционалов интегрального ресурса $\displaystyle\int_0^T u^\top(\tau)u(\tau)\,d\tau$ в линейном (J) и нелинейном ($\widetilde{J}$) случае приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента с системами (4.2) и (4.1)

№	Время T, с	x_0	J	$\widetilde{J}$	$(J-\widetilde{J})/J$
1	0.01	$(-0.0005; 0.1)$	1.0000	1.0000	5.92e-13
2	1	$(0.1542; -0.6945)$	1.0000	0.9998	1.36e-4
3	1	$(-0.4312; 0.2701)$	0.9961	0.9997	-0.0036
4	5	$(-0.3696; 1.5540)$	1.0233	0.9983	0.0244
5	7	$(2.2886; -0.1012)$	1.6104	0.9977	0.3805

Пример 2. Следующий пример показывает, что описанный выше метод построения обратной связи может быть применен и к системам более общего вида с матрицей при управлении, зависящей от фазовых переменных. В этом случае, условие асимптотической эквивалентности множеств достижимости (нуль-управляемости) нелинейной и линеаризованной систем (условие 1) следует использовать в виде $\nu_1(\tau) \geqslant \tau^{1-\alpha}/k_4^2$. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_2u_1 - (1+x_1)u_2, \qquad \dot{x}_2 = -(1+x_1)u_1 - x_2u_2,\\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x_0.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Желаемое конечное состояние $x_1(T) = x_2(T) = 0$. Матрицы линеаризованной в конечной точке системы имеют вид:

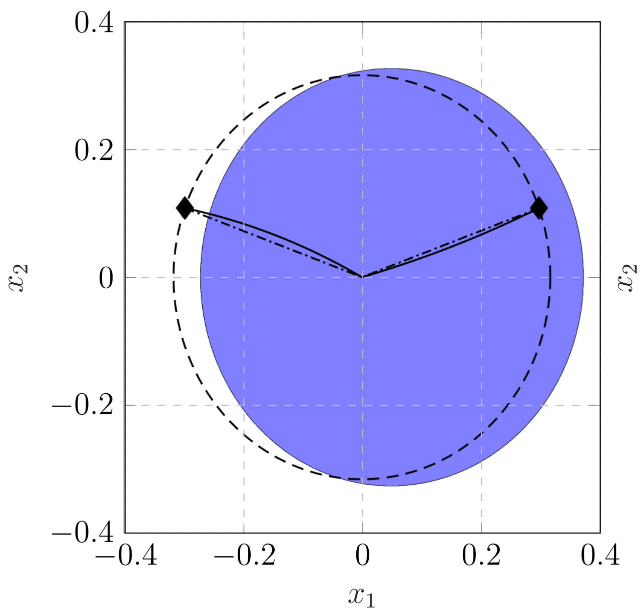
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Здесь грамиан управляемости W_1, как и его минимальное собственное число ν_1, линейной системы, отвечающий паре $(-\tau A, -B)$, не зависит от τ, а значит условие $\nu_1 \geqslant \tau^{1-\alpha}/k_4^2$ выполняется при малых τ. Доказательство, приведенное в предыдущем параграфе не распространяется на случай таких систем, но можно показать, что обратная связь (1.6), рассчитанная для линейной системы (4.4), также приводит в нуль и систему (4.3). Это и продемонстрировано на рисунках 2-I и 2-II. Обозначения аналогичны использованным в предыдущем примере.

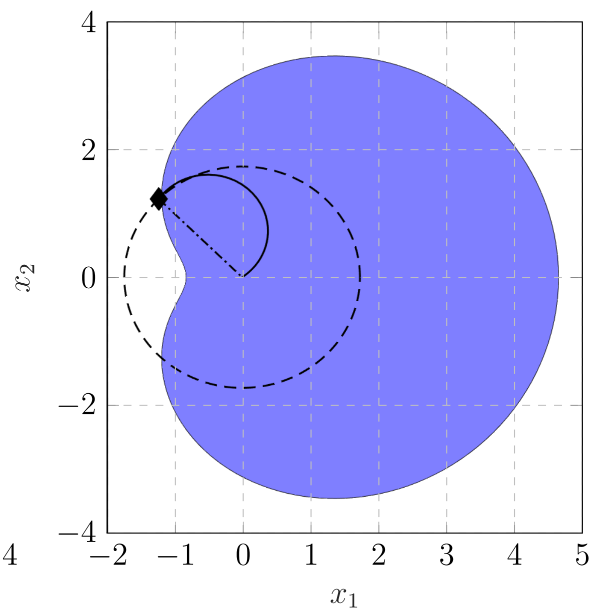
Таблица 2. Результаты численного эксперимента с системами (4.4) и (4.3)

№	Время T, с	x_0	J	$\widetilde{J}$	$(J-\widetilde{J})/J$
1	1.0e-6	(-1.74e-4; 9.85e-4)	1.0000	1.0001	-1.73e-4
2	0.001	$(0.0311; 0.0055)$	1.0000	0.9697	0.03
3	0.01	$(-0.0985; -0.0174)$	1.0000	1.1090	-0.11
4	0.1	$(-0.2972; 0.1082)$	1.0000	1.4116	-0.4117
5	0.1	$(0.2972; 0.1082)$	1.0000	0.7691	0.2308
6	3	$(-1.2247; 1.2247)$	1.0000	1.4305	-0.4305
7	3	$(1.3813; 3.4640)$	4.6356	1.2960	0.7204

При $T = 0.1$ множества нуль-управляемости линейной и нелинейной систем близки. На рисунке 2-I изображены два случая. В обоих начальные состояния выбраны на границе множества нуль управляемости $N_1(0.001, 1)$ линеаризованной системы (4.4) (множества достижимости $G_1(0.001, 1)$ линейной системы, отвечающей паре $(-A, -B)$). В обоих случаях линейная обратная связь приводит в нуль как линейную, так и нелинейную системы. При $T = 3$ множества нуль-управляемости существенно различаются. Тем не менее, обе системы по-прежнему приводятся в нуль. Значения начальных начальных состояний x_0 и функционалов интегрального ресурса $\int_0^T u^\top(\tau)u(\tau)\,d\tau$ в линейном (J) и нелинейном ($\widetilde{J}$) случае приведены в таблице 2.



(I): при $T = 0.1$



(II): при $T = 3$

Рис. 2. Результаты численного эксперимента для систем (4.4) и (4.3)

Можно обратить внимание, что в некоторых экспериментах, описанных в таблицах 1 и 2, значение интегрального функционала в нелинейном случае может быть как меньше, так и больше значения этого же функционала в линейном случае. Это объясняется тем, что нелинейные слагаемые могут как способствовать переводу систему в нуль (тогда значение функционала в нелинейном случае будет меньше), так и препятствовать этому (тогда меньше будет значение линейного функционала в линейном случае). Это явление иллюстрируется следующим примером.

Пример 3. Рассмотрим две одномерные нелинейные системы

$$\dot{y} = y + y^3 + u, \quad \dot{z} = z - z^3 + u, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = y(0) = z(0) = x_0.$$

Обеим системам в нуле отвечает одна и та же линеаризованная система $\dot{x} = x + u$. Несложно видеть, что $Q(t) = 2/(1 - e^{-2(T-t)})$. Обратная связь $u(x) = -2x/(1 - e^{-2(T-t)})$ приводит в начало координат все три системы. При $T = 1$ и $x_0 = 0.6575$ значение функционала интегрального ресурса в линейном случае равно 1, в случае y — 1.19, а в случае z — 0.87.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в региональном научно-образовательном центре НОЦ ИММ УрО РАН, «Уральский математический центр» при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение редактора к книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». М.: Наука, 1966. С. 475–514.
2. Альбрехт Э. Г., Шелементьев Г. С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: Уральский государственный университет им. А. М. Горького, 1972.
3. Халил Х. К. Нелинейные системы. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
4. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие. М.: Ленанд, 2019.
5. Зыков И. В. О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 53. С. 61–72. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-06
6. Гусев М. И., Зыков И. В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 103–115. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115
7. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
8. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
9. Абгарян К. А. Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем. М.: Физматлит, 1994.
10. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Cham: Birkhäuser, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1
11. Gusev M. I. On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 207–212. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.382
12. Осипов И. О. О выпуклости множеств достижимости по части координат нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 210–225. https://doi.org/10.35634/vm210204
13. Гусев М. И., Осипов И. О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 86–99. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99

14. Gusev M. I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Cham: Springer, 2019. P. 461–473. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_32
15. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM Journal on Control and Optimization. 1989. Vol. 27. Issue 1. P. 120–147. https://doi.org/10.1137/0327008
16. Schättler H. Small-time reachable sets and time-optimal feedback control // Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control. New York: Springer, 1996. P. 203–225. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8489-2_9
17. Walter W. Differential and integral inequalities. Berlin: Springer, 1970.

Поступила в редакцию 28.12.2021

Принята к публикации 26.05.2022

Гусев Михаил Иванович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1568-6669
E-mail: gmi@imm.uran.ru

Осипов Иван Олегович, аспирант, отдел оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3071-535X
E-mail: i.o.osipov@imm.uran.ru

Цитирование: М. И. Гусев, И. О. Осипов. О задаче локального синтеза для нелинейных систем с интегральными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 171–186.

M. I. Gusev, I. O. Osipov

On a local synthesis problem for nonlinear systems with integral constraints

Keywords: nonlinear system, controllability set, integral constraints, linearization, Bellman equation, local synthesis, small-time, asymptotics.

MSC2020: 93B03

DOI: 10.35634/vm220202

The paper considers the problem of leading a nonlinear control system to the origin of coordinates at a given integral control resource on a finite time interval. We investigate the question of the construction of local control synthesis that solves the problem, assuming that the time interval during which the system is moved is sufficiently small. We indicate sufficient conditions under which the problem can be solved by the approximate replacement of the nonlinear system by its linearization in the neighborhood of the origin.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

REFERENCES

1. Krasovskii N. N. *Problemy stabilizatsii upravlyaemykh dvizhenii* (Problems of stabilizing controlled movements). Editor's addendum to the book of Malkin I. G., *Theoriya ustoichivosti dvizheniya* (Theory of motion stability). Moscow: Nauka, 1966, pp. 475–514.
2. Al'brekht E. G., Shelement'ev G. S. *Lektsii po teorii stabilizatsii* (Lectures on stabilization theory), Sverdlovsk: Ural State University, 1972.
3. Khalil H. K. *Nonlinear systems*, Pearson, 2002.
4. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Rapoport L. B. *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (Mathematical theory of automatic control). Moscow: LENAND, 2019.
5. Zykov I. V. On external estimates of reachable sets of control systems with integral constraints, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 53. pp. 61–72 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-06
6. Gusev M. I., Zykov I. V. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 114–125. https://doi.org/10.1134/S0081543818020116
7. Atans M., Falb P. *Optimal control*, New York: McGraw-Hill, 1966.
8. Pervozvanskii A. A. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Course in automatic control theory). Moscow: Nauka, 1986.
9. Abgaryan K. A. *Matrichnoe ischislenie s prilozheniyami v teorii dinamicheskikh sistem* (Matrix calculus with applications in the theory of dynamical systems), Moscow: Fizmatlit, 1994.
10. Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation*, Cham: Birkhäuser, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1
11. Gusev M. I. On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 207–212. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.382
12. Osipov I. O. On the convexity of the reachable set with respect to a part of coordinates at small time intervals, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternue Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 210–225. https://doi.org/10.35634/vm210204
13. Gusev M. I., Osipov I. O. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. 52–64. https://doi.org/10.1134/S0081543820040070

14. Gusev M. I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter, *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Cham: Springer, 2019, pp. 461–473. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_32
15. Krener A., Schättler H. The structure of small-time reachable sets in low dimensions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1989, vol. 27, issue 1, pp. 120–147. https://doi.org/10.1137/0327008
16. Schättler H. Small-time reachable sets and time-optimal feedback control, *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control*, New York: Springer, 1996, pp. 203–225. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8489-2_9
17. Walter W. *Differential and integral inequalities*, Berlin: Springer, 1970.

Received 28.12.2021

Accepted 26.05.2022

Mikhail Ivanovich Gusev, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Department of Optimal Control, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1568-6669
E-mail: gmi@imm.uran.ru

Ivan Olegovich Osipov, Post-Graduate Student, Department of Optimal Control, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3071-535X
E-mail: i.o.osipov@imm.uran.ru

Citation: M. I. Gusev, I. O. Osipov. On a local synthesis problem for nonlinear systems with integral constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 171–186.