ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 331–349.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть X — гильбертово пространство, U — банахово пространство, $G\colon X \to X$ — линейный оператор такой, что оператор $B_\lambda = \lambda I - G$ является максимальным монотонным при некотором (произвольно заданном) $\lambda \in \mathbb{R}$. Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением вида

$$x'(t) = Gx(t) + f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0 \in X,$$

где $u = u(t)\colon [0;T] \to U$ — управление, $x(t)$ — неизвестная функция со значениями в X, доказана тотально (по множеству допустимых управлений) глобальная разрешимость при условии глобальной разрешимости задачи Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}$. Решение x понимается в слабом смысле и ищется в пространстве $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ слабо непрерывных функций. Фактически, обобщается аналогичный результат, доказанный автором ранее для случая ограниченного оператора G. Суть указанного обобщения заключается в том, что постулируемые свойства оператора B_λ позволяют построить для него аппроксимации Иосиды линейными ограниченными операторами, распространив необходимые нам оценки с «ограниченного» на «неограниченный» случай. В качестве примеров рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве, максимальный монотонный оператор, тотально глобальная разрешимость.

DOI: 10.35634/vm210212

Введение

Тотально глобальная разрешимость (ТГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Ранее в аналогичном смысле использовался также термин *тотальное сохранение глобальной разрешимости*, введенный в работе [1].

Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего дифференциального уравнения по фазовой переменной превышает линейный. Убедительные примеры на этот счет см. в [2, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [3, § 1], [4, введение, п. 2]. При отсутствии информации о сохранении однозначной глобальной разрешимости при варьировании оптимального управления, в частности, при выводе необходимых условий оптимальности обычно переходят к рассмотрению пар «управление–состояние», см., например, [5], [6, глава 2]. При наличии информации о сохранении однозначной глобальной разрешимости естественно использовать альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций, зависящих только от управлений, опираясь (при исследовании различных вопросов) на соответствующие теоремы функционального анализа, см., например, [3, 7, 8]. Об актуальности изучения проблемы ТГР см. [9].

Условиям глобальной разрешимости для уравнений с неуправляемой правой частью посвящена достаточно обширная литература, см., например, [10–13]. Но стоит отметить, что горизонт существования решения в случае нелинейности по переменной состояния в правой части, так или иначе, зависит от характера этой нелинейности. Соответственно, при наличии управления в правой части, горизонт существования решения, вообще говоря, зависит от выбора управления. Поэтому важно знать условия, обеспечивающие существование глобального решения управляемой системы на *одном и том же* заданном отрезке времени для всех допустимых управлений.

В данной статье для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением в гильбертовом пространстве с неограниченным оператором, устанавливаются достаточные условия тотально глобальной разрешимости, а также единственность глобального решения. Ранее (см., например, работы [1, 3, 4, 7, 14–23]) при исследовании вопроса сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем использовался метод, основанный на сведении таких систем к функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или, более общо, в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций. Это сведение во всех указанных работах осуществлялось одним и тем же способом — путем обращения главной части начально-краевой задачи. Отметим, кстати, что в [14] был предложен опирающийся на способ обращения главной части начально-краевых задач метод (вольтерровых функционально-операторных уравнений) изучения задач теории оптимального управления распределенными системами. Метод был затем развит в работах В. И. Сумина, В. И. Сумина и А. В. Чернова, А. В. Чернова и др. (см., например, обзоры в [24–27]). Достаточно подробные схематические описания способа обращения главной части начально-краевых задач имеются, например, в [27] и [28]. После сведения управляемой начально-краевой задачи к абстрактному (операторному или функционально-операторному) уравнению к последнему применялись соответствующие абстрактные результаты (в частности, результаты о сохранении глобальной разрешимости). Но, разумеется, предварительно эти абстрактные результаты должны были быть получены тем или иным способом. В частности, при установлении признаков ТГР для эволюционных систем использовалась идея мажоризации (или миноризации и мажоризации), см., например, [1, 20, 21, 23]. В работе [29] был получен (имеющий ряд принципиальных отличий) признак ТГР для дифференциально-операторного уравнения с линейным ограниченным оператором в левой части в банаховом пространстве X с решениями из пространства $\mathbb{C}\big([0;T];X\big)$. Этот подход был развит в [27, 30]. В данной работе мы распространяем подход [29] на эволюционные уравнения (см. уравнение (1.9) далее) с неограниченным линейным оператором G в правой части в гильбертовом пространстве X со слабыми решениями из пространства слабо непрерывных (деминепрерывных) функций $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$. Оператор $B_\lambda = \lambda I - G$, при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$, предполагается максимальным монотонным. А это, в свою очередь, позволяет построить для него аппроксимации Иосиды линейными ограниченными операторами, распространив необходимые нам оценки с «ограниченного» на «неограниченный» случай.

Теорема о ТГР доказывается путем последовательного продолжения решения уравнения вдоль временной шкалы в соответствии с общей, разработанной ранее, технологией продолжения вдоль вольтерровой цепочки оператора правой части уравнения типа Гаммерштейна, представляющего исследуемую управляемую систему. Таким образом, эксплуатируется основная идея метода вольтерровых функционально-операторных уравнений, см. обзоры в [24, 25, 27, 31].

§ 1. Предварительные построения и соглашения

Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]_X$, $G\colon X \to X$ —

инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \in [0;T]$, с областью определения $D(G) \subset X$, $z \in Z = L_2\big([0;T];X\big)$, $x_0 \in X$. Следуя [32, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X):

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0. \tag{1.1}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 (см. [32, теорема 4.8.3]). *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная функция $x\colon [0;T] \to X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ функция $\big[x(t), y\big]_X$ абсолютно непрерывна на $[0;T]$,*

$$\frac{d}{dt}\big[x(t), y\big]_X = \big[x(t), G^* y\big]_X + \big[z(t), y\big]_X \quad \textit{п.в. } t \in [0;T],$$

$$\lim_{t\to 0}\big[x(t), y\big]_X = [x_0, y] \quad \forall\, y \in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула:

$$x(t) = S(t)x_0 + \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{1.2}$$

Лемма 2 (см. [32, следствие 4.8.1]). *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in X$ существует единственная слабо непрерывная функция $x\colon [0;T] \to X$ такая, что для всех $y \in D(G^*)$ имеем:*

$$\big[x(t), y\big]_X = [x_0, y]_X + \int\limits_0^t \big[x(s), G^* y\big]_X\,ds + \int\limits_0^t \big[z(s), y\big]_X\,ds,$$

и более того, эта функция представляется формулой (1.2).

Напомним, см., например, [33, глава III, § 1, п. 3.2, с. 72], [34, с. 96], что функция $x\colon [0;T] \to X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y \in X^*$ функция $y\big[x(t)\big]$ непрерывна на $[0;T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x\colon [0;T] \to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$. Для дальнейшего важно, что норма $\big\|x(t)\big\|_X$ всякой функции $x \in \mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ ограничена на $[0;T]$. С другой стороны, см., например, [35, глава IV, теорема 1.9, с. 154], всякая функция $x \in \mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ интегрируема по Бохнеру, а следовательно, измерима по Бохнеру. Таким образом, $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big) \subset L_\infty\big([0;T];X\big)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой в множестве $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ утверждается в леммах 1, 2, будем называть *слабым решением* задачи (1.1).

Далее будем предполагать, что оператор G при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующему условию:

($\mathbf{G}_\lambda$) оператор $B_\lambda = \lambda I - G$ является максимальным монотонным, т. е. $[B_\lambda x, x]_X \geqslant 0$ для всех $x \in D(B_\lambda) = D(G)$ (монотонность) и множество значений

$$\big\{(I + B_\lambda)[x]\colon x \in D(G)\big\} = X \text{ (максимальность).}$$

Для краткости в случае, когда, например, оператор G удовлетворяет условию $(\mathbf{G}_\lambda)$ при $\lambda = 0$, будем говорить, что выполнено условие $(\mathbf{G}_0)$, и т. п. Далее нам будет необходимо рассмотреть отдельно следующие два случая.

I. Оператор G удовлетворяет условию $(\mathbf{G}_0)$.

Напомним [36, введение, п. 3.3], что для линейного ограниченного оператора B в банаховом пространстве определена так называемая операторная экспонента

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n; \quad e^{tB} e^{sB} = e^{(t+s)B}, \quad \frac{d}{dt} e^{tB} = B[e^{tB}].$$

Следуя [37], рассмотрим семейство $\{G_\eta\colon \eta > \eta_0\}$ линейных ограниченных операторов $G_\eta\colon X \to X$ таких, что

(i) для всех $x \in X$, $t \in [0;T]$ имеем: $e^{tG_\eta}x \to S(t)x$ при $\eta \to \infty$;

(ii) для всех $\eta > \eta_0$, $t \in [0;T]$ имеем: $\|e^{tG_\eta}\| \leqslant 1$.

Как указано в [37, remark 3.1] (с учетом того, что $(-G)$ — максимальный монотонный оператор), условиям (i), (ii) удовлетворяют, например, аппроксимации Иосиды (Yosida):

$$G_\eta^Y = \eta G(\eta I - G)^{-1};$$

см. также [38, theorem 1, p. 454]. Кроме того, приводится пример [37, example 3.1] построения конечно-разностных (галеркинских) аппроксимаций оператора $(-G)$, удовлетворяющих условиям (i), (ii). Непосредственно из [38, theorem 1, p. 454] вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Для всех $x \in X$ имеем: $\lim\limits_{\eta\to\infty} \gamma_\eta[x] = 0$, $\gamma_\eta[x] \equiv \sup\limits_{t\in[0;T]} \|e^{tG_\eta}x - S(t)x\|_X$.*

Лемма 4. *Пусть выполнено условие $(\mathbf{G}_0)$, $A[z](t) = \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds$, $t \in [0;T]$, — слабое решение задачи (1.1) при $x_0 = 0$, $z \in Z$. Тогда для п. в. $t \in [0;T]$ имеем:*

$$\|A[z](t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем аппроксимации, удовлетворяющие условиям (i), (ii). Полагая $\mu_\eta[z](t,s) \equiv \|S(t-s)z(s) - e^{(t-s)G_\eta}z(s)\|_X$, оценим

$$\|A[z](t)\|_X = \left\| \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds \right\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|S(t-s)z(s) \pm e^{(t-s)G_\eta}z(s)\|_X\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \|e^{(t-s)G_\eta}z(s)\|_X\,ds + \int\limits_0^t \mu_\eta[z](t,s)\,ds \leqslant \int\limits_0^t \|e^{(t-s)G_\eta}\|\,\|z(s)\|_X\,ds + \int\limits_0^t \mu_\eta[z](t,s)\,ds.$$

Согласно условию (ii), получаем:

$$\|A[z](t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds + \int\limits_0^t \mu_\eta[z](t,s)\,ds. \tag{1.4}$$

Заметим, что $\mu_\eta[z](t,s) \leqslant \gamma_\eta\big[z(s)\big]$, $\quad \mu_\eta[z](t,s) \leqslant \|z(s)\|_X + \|S(t-s)z(s)\|_X$.

Таким образом, пользуясь леммой 3, а также теоремой Лебега о мажорированной сходимости и переходя в неравенстве (1.4) к пределу при $\eta \to \infty$, получаем оценку (1.3). $\square$

Замечание 1. Пусть G – произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условию $(\mathbf{G}_0)$. Тогда, по теореме Хилле–Иосиды, см. [39, sec. 7.2, theorem 7.4, p. 185], для любого $x_0 \in D(G)$ существует единственное решение

$$x \in \mathbb{C}^1\big([0;+\infty);X\big) \cap \mathbb{C}\big([0;+\infty);D(G)\big)$$

задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} - Gx = 0, \quad x(0) = x_0,$$

причем

$$\big\|x(t)\big\|_X \leqslant \|x_0\|_X, \quad \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_X = \big\|Gx(t)\big\|_X \leqslant \|Gx_0\|_X \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Тем самым, см. [39, Remark 5, p. 190], для любого $t \geqslant 0$ определен линейный оператор $D(G) \ni x_0 \to x(t) \in D(G)$. Более того, за счет того, что область определения максимального монотонного оператора $D(-G) = D(G)$ плотна в X [39, Sec. 7.1, Proposition 7.1, p. 181], $\big\|x(t)\big\|_X \leqslant \|x_0\|_X$, указанный линейный оператор можно продолжить по непрерывности до линейного ограниченного оператора $S_G(t)\colon X \to X$. Как указано в [39, Remark 5, p. 190], легко проверить, что $S_G(t)$ обладает следующими свойствами:

(a) $\big\|S_G(t)\big\| \leqslant 1$ для всех $t \geqslant 0$;

(b) $S_G(t_1 + t_2) = S_G(t_1)S_G(t_2)$ для всех t_1, $t_2 \geqslant 0$, $S_G(0) = I$;

(c) $\lim\limits_{t\to+0}\big\|S_G(t)x_0 - x_0\big\|_X = 0$ для всех $x_0 \in X$.

Свойство (b) означает, что семейство $\{S_G(t), t \geqslant 0\}$ является полугруппой. Свойство (c) означает, что эта полугруппа сильно непрерывна, и таким образом, оператор G автоматически является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $S(t) = S_G(t)$. Свойство (a) означает, что имеем полугруппу сжатий (semigroup of contractions). В обратную сторону, если задана сильно непрерывная полугруппа сжатий на X, то существует единственный оператор G, обладающий свойством $(\mathbf{G}_0)$ и такой, что $S(t) = S_G(t)$ для всех $t \geqslant 0$. В силу вышесказанного, лемму 4 можно получить также как следствие свойства (a).

II. Оператор G удовлетворяет условию $(\mathbf{G}_\lambda)$ при произвольном $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 5. *Пусть выполнено предположение $(\mathbf{G}_\lambda)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для любых $x_0 \in X$, $z \in Z = L_2\big([0;T];X\big)$ задача (1.1) имеет единственное слабое решение, определяемое формулой:*

$$x(t) = e^{\lambda t}S_\lambda(t)x_0 + \mathcal{A}_\lambda[z](t), \quad \mathcal{A}_\lambda[z](t) = \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}S_\lambda(t-s)z(s)\,ds, \tag{1.5}$$

где $\{S_\lambda(t),\ t \geqslant 0\}$ — сильно непрерывная полугруппа сжатий, порождаемая оператором $(-B_\lambda)$, см. замечание 1. Следовательно, для п. в. $t \in [0;T]$ справедлива оценка

$$\big\|\mathcal{A}_\lambda[z](t)\big\|_X \leqslant \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}\|z(s)\|_X\,ds \leqslant K_\lambda \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds,$$

где $K_\lambda = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T} e^{\lambda(t-s)} = \{1,\ \lambda \leqslant 0; e^{\lambda T},\ \lambda > 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем задачу (1.1) в виде:

$$x'(t) + B_\lambda x(t) = \lambda x(t) + z(t), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0. \tag{1.6}$$

В силу замечания 1 и условия $(\mathbf{G}_\lambda)$ оператор $(-B_\lambda)$ порождает сильно непрерывную полугруппу сжатий $S_\lambda(t)$, $t \geqslant 0$. Тогда, согласно леммам 1, 2 существует единственное слабое решение $\eta \in \mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ задачи Коши

$$\eta'(t) + B_\lambda \eta(t) = e^{-\lambda t} z(t), \quad t \in [0;T]; \quad \eta(0) = x_0, \tag{1.7}$$

которое выражается формулой

$$\eta(t) = S_\lambda(t)x_0 + \int_0^t S_\lambda(t-s)e^{-\lambda s} z(s)\,ds = S_\lambda(t)x_0 + \int_0^t e^{-\lambda s} S_\lambda(t-s)z(s)\,ds.$$

Тогда, как нетрудно видеть, функция $x(t) = e^{\lambda t}\eta(t)$ является слабым решением задачи (1.6). И за счет липшицевости правой части уравнения (1.6), это решение единственно (этот факт хорошо известен, см., например, [38]; кроме того, нетрудно вычленить его из доказательства теоремы 1 — см. далее). □

Далее число $\lambda \in \mathbb{R}$ будем считать фиксированным. Таким образом, при выполнении условия $(\mathbf{G}_\lambda)$ для любых $x_0 \in X$, $z \in Z$ в множестве $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ существует единственное слабое решение задачи (1.1), и это решение дается формулой (1.5). Решение, отвечающее $x_0 \in X$ при $z = 0$, будем обозначать $x = \Theta[x_0](t) = e^{\lambda t} S_\lambda(t)x_0$. Решение, отвечающее $z \in Z$ при $x_0 = 0$, будем обозначать: $x = A[z](t) = \mathcal{A}_\lambda[z](t)$.

Далее, считая элемент $x_0 \in X$ фиксированным, положим $\theta = \Theta[x_0]$. Как видно из представления (1.5), слабое решение задачи (1.1) можно записать в виде:

$$x(t) = \theta(t) + A[z](t), \quad t \in [0;T]. \tag{1.8}$$

Пусть U — некоторое банахово пространство; $\mathcal{D}$ — заданное множество функций $u\colon [0;T] \to U$; $E = L_\infty\big([0;T];X\big)$. Предположим, кроме того, что задана функция $f\colon [0;T]\times$ $\times X \times U \to X$, удовлетворяющая следующим условиям:

$(\mathbf{F}_1)$ для всех $u \in \mathcal{D}$, $x \in E$ отображение $[0;T] \ni t \to f\big(t, x(t), u(t)\big)$ принадлежит классу $Z = L_2\big([0;T];X\big)$;

$(\mathbf{F}_2)$ существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M)\colon [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in \mathcal{D}$, $x, y \in X$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X \leqslant M$, п. в. $t \in [0;T]$ имеем: $\big\|f\big(t,x,u(t)\big) - f\big(t,y,u(t)\big)\big\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\,\big\|x-y\big\|_X$.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение вида

$$x'(t) = Gx(t) + f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0, \tag{1.9}$$

понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t), \quad t \in [0;T]; \quad x \in E; \quad u \in \mathcal{D}. \tag{1.10}$$

§ 2. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{G}_\lambda)$. *Тогда, каково бы ни было* $u \in \mathcal{D}$, *уравнение* (1.10) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 1 см. в § 3.

Сделаем еще одно предположение.

$(\mathbf{F}_3)$ Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)\colon [0;T]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t такая, что $\Big\|f\big(t,\xi,u(t)\big)\Big\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, $u\in\mathcal{D}$, п. в. $t\in[0;T]$.

Замечание 2. Условие $(\mathbf{F}_3)$ можно заменить, например, следующим:

$(\mathbf{F}_3')$ Существует функция $\mathcal{N}_2=\mathcal{N}_2(t)\colon [0;T]\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0;T]$ и такая, что для всех $u\in\mathcal{D}$, п. в. $t\in[0;T]$ имеем: $\big\|f\big(t,0,u(t)\big)\big\|_X \leqslant \mathcal{N}_2(t)$.

Действительно, предположим, что выполнены условия $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_3')$. Оценим:

$$\big\|f\big(t,\xi,u(t)\big)\big\|_X \leqslant \big\|f\big(t,\xi,u(t)\big)-f\big(t,0,u(t)\big)\big\|_X + \big\|f\big(t,0,u(t)\big)\big\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{N}(t,M)\big\|\xi\big\|_X + \mathcal{N}_2(t) \leqslant \mathcal{N}(t,M)M + \mathcal{N}_2(t) \equiv \mathcal{N}_1(t,M).$$

Но, как видно из формулировки следующей теоремы, важно иметь в качестве функции $\mathcal{N}_1(t,M)$ не хотя бы какую-то оценку сверху, а оценку, как можно более точную.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{F}_1)$–$(\mathbf{F}_3)$, $(\mathbf{G}_\lambda)$, *причем* $\big\|\theta(t)\big\|_X \leqslant \alpha(t)$ *для п. в.* $t\in[0;T]$, *где* $\alpha\in L_\infty[0;T]$. *Предположим, что задача Коши*

$$\frac{d}{dt}\,\beta(t) = K_\lambda \mathcal{N}_1\big(t,\alpha(t)+\beta(t)\big), \quad t\in(0;T]; \quad \beta(0)=0, \tag{2.1}$$

имеет решение — неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $\beta(t)$, $t\in[0;T]$. *Тогда для любого* $u\in\mathcal{D}$ *уравнение* (1.10) *имеет решение* $x\in\mathbb{C}_w\big([0;T],X\big)$, *удовлетворяющее оценке* $\big\|x(t)\big\|_X \leqslant \big\|\theta(t)\big\|_X + \beta(t)$, *п. в.* $t\in[0;T]$.

Доказательство теоремы 2 см. в § 3.

Замечание 3. Задачу (2.1) можно заменить интегральным уравнением:

$$\beta(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}\mathcal{N}_1\big(s,\alpha(s)+\beta(s)\big)\,ds, \quad t\in[0;T].$$

Из анализа доказательств теорем 1, 2 очевидно, что они допускают следующее обобщение. Предположим, что заданы функция $R\in L_\infty[0;T]$ и множества

$$X_t = \big\{x\in X\colon \|x\|_X \leqslant R(t)\big\}, \quad U_t\subset U, \quad t\in[0;T];$$

$$E_R = \big\{x\in E\colon x(t)\in X_t \text{ п. в. } t\in[0;T]\big\}, \quad \mathcal{D} = \big\{u\colon [0;T]\to U\colon u(t)\in U_t \text{ п. в. } t\in[0;T]\big\}.$$

Пусть для п. в. $t\in[0;T]$ задано отображение $f(t,\cdot,\cdot)\colon X_t\times U_t\to X$ со свойствами:

(Φ_1) для всех $u \in \mathcal{D}$, $x \in E_R$ отображение $[0;T] \ni t \to f\big(t, x(t), u(t)\big)$ принадлежит классу $Z = L_2\big([0;T]; X\big)$;

(Φ_2) существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M)\colon [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для п. в. $t \in [0;T]$ и всех $u \in \mathcal{D}$, $x, y \in X_t$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X \leqslant M$, имеем: $\big\|f\big(t, x, u(t)\big) - f\big(t, y, u(t)\big)\big\|_X \leqslant \mathcal{N}(t, M)\,\big\|x - y\big\|_X$;

(Φ_3) Существует функция $\mathcal{N}_1(t, r)\colon [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t такая, что $\Big\|f\big(t, \xi, u(t)\big)\Big\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(t, M)$ для п. в. $t \in [0;T]$ и всех $0 \leqslant M \leqslant R(t)$, $\xi \in X_t$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, $u \in \mathcal{D}$.

Поскольку теперь функция $f\big(t, \cdot, u(t)\big)$ определена лишь на множестве X_t при $t \in [0;T]$, то мы можем говорить лишь о решениях уравнения (1.10) в множестве E_R. Соответственно, теоремы 1, 2 переформулируются следующим образом.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (Φ_1), (Φ_2), ($\mathbf{G}_\lambda$). *Тогда, каково бы ни было* $u \in \mathcal{D}$, *уравнение* (1.10) *не может иметь более одного решения в множестве* E_R.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (Φ_1)–(Φ_3), ($\mathbf{G}_\lambda$); $\big\|\theta(t)\big\|_X \leqslant \alpha(t)$ *для п. в.* $t \in [0;T]$, *где* $\alpha \in L_\infty[0;T]$. *Предположим, что задача Коши* (2.1) *имеет решение — неотрицательную абсолютно непрерывную функцию* $\beta(t)$, $t \in [0;T]$, *причем* $\alpha(t) + \beta(t) \leqslant R(t)$ *для п. в.* $t \in [0;T]$. *Тогда для любого* $u \in \mathcal{D}$ *уравнение* (1.10) *имеет решение* $x \in \mathbb{C}_w\big([0;T], X\big) \cap E_R$, *удовлетворяющее оценке* $\big\|x(t)\big\|_X \leqslant \big\|\theta(t)\big\|_X + \beta(t)$, *п. в.* $t \in [0;T]$.

§ 3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Рассуждая от противного, предположим, что существуют два решения $x = x_1$ и $x = x_2$. Положим

$$M = \max\Big\{\|x_1\|_{L_\infty\left([0;T];X\right)}, \|x_2\|_{L_\infty\left([0;T];X\right)}\Big\}, \quad \eta = x_2 - x_1.$$

Ясно, что $\eta(t) = A[z_2 - z_1](t)$, $t \in [0;T]$; $z_i(s) = f\big(s, x_i(s), u(s)\big)$, $i = 1, 2$.

Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполнено неравенство

$$K_\lambda \int\limits_h \mathcal{N}(t, M)\, dt \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $|t_i - t_{i-1}| \leqslant \delta$, $i = \overline{1, k}$. Согласно лемме 5, условию ($\mathbf{F}_2$) и выбору разбиения и числа δ (то есть неравенству (3.1)) при $t \in [0; t_1]$ имеем

$$\big\|\eta(t)\big\|_X \leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \Big\|f\big(s, x_2(s), u(s)\big) - f\big(s, x_1(s), u(s)\big)\Big\|_X\, ds \leqslant$$

$$\leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \mathcal{N}(s, M)\,\big\|\eta(s)\big\|_X\, ds \leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \mathcal{N}(t, M)\, dt\,\big\|\eta\big\|_{E_1} \leqslant \frac{1}{2}\big\|\eta\big\|_{E_1},$$

$E_1 = L_\infty\big([0;t_1]; X\big)$. Следовательно, $\dfrac{1}{2}\big\|\eta\big\|_{L_\infty\left([0;t_1];X\right)} \leqslant 0$, откуда $\big\|\eta(t)\big\|_X = 0$ для п. в. $t \in [0;t_1]$. Стало быть, $z_1(t) = z_2(t)$, то есть $\big\|\eta(t)\big\|_X \equiv 0$ на $[0;t_1]$.

Предположим, мы уже доказали, что $\|\eta(t)\|_X \equiv 0$ при $t \in [0;t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем, что $\|\eta(t)\|_X \equiv 0$ при $t \in [0;t_i]$. Согласно лемме 5, условию $(\mathbf{F}_2)$ и выбору разбиения и числа δ (то есть неравенству (3.1)) при $t \in [t_{i-1};t_i]$ имеем

$$\|\eta(t)\|_X \leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_i} \Big\|f\big(s,x_2(s),u(s)\big) - f\big(s,x_1(s),u(s)\big)\Big\|_X\,ds =$$

$$= K_\lambda \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \Big\|f\big(s,x_2(s),u(s)\big) - f\big(s,x_1(s),u(s)\big)\Big\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant K_\lambda \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(s,M)\,\|\eta(s)\|_X\,ds \leqslant K_\lambda \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(t,M)\,dt\,\|\eta\|_{L_\infty\left([t_{i-1};t_i];X\right)} \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|_{L_\infty\left([t_{i-1};t_i];X\right)}.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}\|\eta\|_{L_\infty\left([t_{i-1};t_i];X\right)} \leqslant 0$, откуда $\|\eta(t)\|_X \equiv 0$ при $t \in [t_{i-1};t_i]$. И согласно предположению индукции, $\|\eta(t)\|_X \equiv 0$ при $t \in [0;t_i]$. По индукции делаем вывод, что $\|\eta(t)\|_X \equiv 0$ при $t \in [0;t_k] = [0;T]$. Это означает, что $x_1(t) = x_2(t)$ для всех $t \in [0;T]$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольно $u \in \mathcal{D}$ и покажем, что уравнение (1.10) имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость следующего уравнения

$$y(t) = A\Big[f\big(\cdot,\theta(\cdot)+y(\cdot),u(\cdot)\big)\Big](t), \quad t \in [0;T]; \quad y \in E. \tag{3.2}$$

Действительно, если y — решение уравнения (3.2), то $x = \theta + y$ — решение уравнения (1.10):

$$x(t) = \theta(t)+y(t) = \theta(t)+A\Big[f\big(\cdot,\theta(\cdot)+y(\cdot),u(\cdot)\big)\Big](t) = \theta(t)+A\Big[f\big(\cdot,x(\cdot),u(\cdot)\big)\Big](t), \quad t \in [0;T].$$

По условию, функции $\alpha \in L_\infty[0;T]$, $\beta \in \mathbb{C}[0;T]$. Поэтому согласно теореме Вейерштрасса найдется константа $M > 0$ такая, что

$$0 \leqslant \alpha(t) + \beta(t) \leqslant M \quad \text{п. в. } t \in [0;T].$$

Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполняется условие (3.1). Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T, \quad |t_i - t_{i-1}| \leqslant \delta, \quad i = \overline{1,k}.$$

Для $i = \overline{1,k}$ обозначим: $E_i = L_\infty\big([0;t_i];X\big)$, $Z_i = L_2\big([0;t_i];X\big)$, $A_i\colon Z_i \to E_i$ — естественное сужение оператора A на случай замены отрезка $[0;T]$ отрезком $[0;t_i]$, то есть

$$A_i[z](t) = \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)} S_\lambda(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0;t_i], \quad z \in Z_i.$$

Отсюда ясно, что $A_i[z]\,\big|_{[0;t_{i-1}]} = A_{i-1}\big[z\,\big|_{[0;t_{i-1}]}\big] \quad \forall\, z \in Z_i, \quad i = \overline{1,k}$.

Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (3.2):

$$y(t) = A_j\Big[f\big(\cdot,\theta(\cdot)+y(\cdot),u(\cdot)\big)\Big](t), \quad t \in [0;t_j]; \quad y \in E_j. \tag{3.3}$$

Разрешимость уравнений (3.3) будем доказывать индукцией по $j = \overline{1,k}$.

Определим Y_1 как множество всех $y \in E_1$ таких, что

$$\big\|y(t)\big\|_X \leqslant \beta(t) \quad \text{п. в. } t \in [0; t_1].$$

Множество Y_1 не пусто, так как содержит функцию $y \equiv 0 \in E_1$.

Определим оператор $F_1 \colon Y_1 \to E_1$ с помощью формулы $F_1[y] = \eta$, где

$$\eta(t) = A_1[z](t), \quad z(t) = f\big(t, \theta(t) + y(t), u(t)\big), \quad t \in [0; t_1].$$

В силу леммы 5, условия $(\mathbf{F}_3)$ и определения функции $\beta(t)$ как решения задачи (2.1) получаем:

$$\big\|\eta(t)\big\|_X \leqslant K_\lambda \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\, ds \leqslant K_\lambda \int\limits_0^t \mathcal{N}_1\big(s, \alpha(s) + \beta(s)\big)\, ds = \beta(t),\ t \in [0; t_1].$$

Таким образом, $\eta \in Y_1$. Иными словами, $F_1 \colon Y_1 \to Y_1$.

Установим сжимаемость оператора F_1. Выберем произвольно функции $y, \widetilde{y} \in Y_1$. Обозначим

$$z(t) = f\big(t, \theta(t) + y(t), u(t)\big), \quad \widetilde{z}(t) = f\big(t, \theta(t) + \widetilde{y}(t), u(t)\big), \quad t \in [0; t_1].$$

В соответствии с леммой 5, определением оператора F_1, условием $(\mathbf{F}_2)$, а также неравенством (3.1) получаем оценку:

$$\big\|F_1[\widetilde{y}] - F_1[y]\big\|_{E_1} = \big\|A_1[\widetilde{z} - z]\big\|_{E_1} \leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \big\|\widetilde{z}(s) - z(s)\big\|_X\, ds =$$

$$= K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \big\|f\big(s, \theta(s) + \widetilde{y}(s), u(s)\big) - f\big(s, \theta(s) + y(s), u(s)\big)\big\|_X\, ds \leqslant$$

$$\leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \mathcal{N}\big(s, \alpha(s) + \beta(s)\big)\, \|\widetilde{y}(s) - y(s)\|_X\, ds \leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_1} \mathcal{N}\big(s, M\big)\, ds\, \big\|\widetilde{y} - y\big\|_{E_1} \leqslant \frac{1}{2}\big\|\widetilde{y} - y\big\|_{E_1}.$$

По принципу сжимающих отображений, заключаем, что уравнение

$$y = F_1[y], \quad y \in Y_1,$$

имеет единственное решение на множестве Y_1. Это означает, что существует функция $y = y_1 \in E_1$, являющаяся решением уравнения (3.3) при $j = 1$ и удовлетворяющая оценке $\big\|y_1(t)\big\|_X \leqslant \beta(t)$ п. в. $t \in [0; t_1]$.

Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали существование функции $y = y_{i-1} \in E_{i-1}$, являющейся решением уравнения (3.3) при $j = i - 1$ и удовлетворяющей оценке $\big\|y_{i-1}(t)\big\|_X \leqslant \beta(t)$ для п. в. $t \in [0; t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $y = y_i \in E_i$, являющейся решением уравнения (3.3) при $j = i$ и удовлетворяющей оценке

$$\big\|y_i(t)\big\|_X \leqslant \beta(t) \quad \text{п. в. } t \in [0; t_i]. \tag{3.4}$$

Определим Y_i как множество всех $y \in E_i$ таких, что

$$\big\|y(t)\big\|_X \leqslant \beta(t) \quad \text{п. в. } t \in [t_{i-1}; t_i]; \quad y\,\Big|_{t \in [0; t_{i-1}]} \equiv y_{i-1}.$$

Отметим, что множество Y_i не пусто, так как содержит функцию

$$y(t) = \begin{cases} y_{i-1}(t), & t \in [0; t_{i-1}]; \\ 0, & t \in (t_{i-1}; t_i]. \end{cases}$$

Определим оператор $F_i \colon Y_i \to E_i$ с помощью формулы $F_i[y] = \eta$, где

$$\eta(t) = A_i[z](t), \quad z(t) = f\big(t, \theta(t) + y(t), u(t)\big), \quad t \in [0; t_i].$$

В силу леммы 5, условия $(\mathbf{F}_3)$ и определения функции $\beta(t)$ как решения задачи (2.1) получаем:

$$\big\|\eta(t)\big\|_X \leqslant K_\lambda \int\limits_0^t \|z(s)\|_X \, ds \leqslant K_\lambda \int\limits_0^t \mathcal{N}_1\big(s, \alpha(s) + \beta(s)\big)\, ds = \beta(t), \ t \in [0; t_i].$$

Заметим, что при $t \in [0; t_{i-1}]$ имеем:

$$z(t) = f\big(t, \theta(t) + y_{i-1}(t)\big) \equiv z_{i-1}(t),$$

и по построению,

$$\eta(t) = A_i[z](t) = A_{i-1}[z_{i-1}](t) = y_{i-1}(t).$$

Таким образом, $\eta \in Y_i$. Иными словами, $F_i \colon Y_i \to Y_i$.

Установим сжимаемость оператора F_i. Выберем произвольно функции $y, \widetilde{y} \in Y_i$. Обозначим

$$z(t) = f\big(t, \theta(t) + y(t), u(t)\big), \quad \widetilde{z}(t) = f\big(t, \theta(t) + \widetilde{y}(t), u(t)\big), \quad t \in [0; t_i].$$

В соответствии с леммой 5, определением оператора F_i, условием $(\mathbf{F}_2)$, а также неравенством (3.1) получаем оценку:

$$\big\|F_i[\widetilde{y}] - F_i[y]\big\|_{E_i} = \big\|A_i[\widetilde{z} - z]\big\|_{E_i} \leqslant K_\lambda \int\limits_0^{t_i} \big\|\widetilde{z}(s) - z(s)\big\|_X \, ds =$$

$$= K_\lambda \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \big\| f\big(s, \theta(s) + \widetilde{y}(s), u(s)\big) - f\big(s, \theta(s) + y(s), u(s)\big)\big\|_X \, ds \leqslant$$

$$\leqslant K_\lambda \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}\big(s, \alpha(s) + \beta(s)\big)\, \big\|\widetilde{y}(s) - y(s)\big\|_X \, ds \leqslant K_\lambda \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}\big(s, M\big)\, ds\, \big\|\widetilde{y} - y\big\|_{E_i} \leqslant \frac{1}{2}\big\|\widetilde{y} - y\big\|_{E_i}.$$

По принципу сжимающих отображений, заключаем, что уравнение

$$y = F_i[y], \quad y \in Y_i,$$

имеет единственное решение на множестве Y_i. Это означает, что существует функция $y = y_i \in E_i$, являющаяся решением уравнения (3.3) при $j = i$ и удовлетворяющая оценке (3.4). По индукции делаем вывод, что аналогичное утверждение справедливо и при $j = k$. А это, в свою очередь, означает, что уравнение (1.10) имеет решение

$$x = \theta + y_k \in \mathbb{C}_w\big([0; T]; X\big),$$

удовлетворяющее оценке

$$\|x(t)\|_X \leqslant \|\theta(t)\|_X + \|y_k(t)\|_X \leqslant \|\theta(t)\|_X + \beta(t), \quad \text{п. в. } t \in [0;T].$$

□

§ 4. Примеры

Пусть $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество с границей Γ. Положим $Q = \Omega \times (0;T]$, $\Sigma = \Gamma \times (0;T]$. Следуя [39], мы предполагаем, что область Ω класса $\mathbf{C}^\infty$ с ограниченной границей Γ.

4.1. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [0;T] \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = f(t,\varphi,u), \quad (x,t) \in Q; \tag{4.1}$$

$$\varphi\,\big|_\Sigma = 0; \tag{4.2}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа. В [39, sec. 10.1] рассматривалась аналогичная задача при $f \equiv 0$. Следуя [39, sec. 10.1], возьмем

$$\varphi(t) = \varphi(\cdot,t), \quad X = L_2(\Omega), \quad G\varphi = \Delta\varphi, \quad D(G) = \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие (4.2) встраивается в область определения $D(G)$. В итоге задача (4.1)–(4.3) переписывается в виде абстрактного дифференциального уравнения (1.9). Относительно функции f можно считать, что она удовлетворяет условиям $(\mathbf{F}_1)$–$(\mathbf{F}_3)$ или (Φ_1)–(Φ_3). Как показано в [39, sec. 10.1], оператор $(-G)$ является максимальным монотонным. Стало быть, выполнено условие $(\mathbf{G}_\lambda)$ при $\lambda = 0$, и применимы теоремы из § 2 при $K_\lambda = 1$.

4.2. Волновое уравнение

Рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [0;T] \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = g(t,\varphi,u), \quad (x,t) \in Q; \tag{4.4}$$

$$\varphi\,\big|_\Sigma = 0; \tag{4.5}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.7}$$

В [39, sec. 10.3] рассматривалась аналогичная задача при $g \equiv 0$. Следуя [39, sec. 10.3], перепишем уравнение (4.4) в виде системы уравнений первого порядка

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \Delta\varphi + g(t,\varphi,u), \end{aligned} \right. \qquad (x,t) \in Q. \tag{4.8}$$

Обозначим $\eta = (\varphi, \psi)^*$ (здесь $*$ — знак транспонирования); $\eta(t) = \eta(\cdot, t)$. Тогда систему (4.8) можно переписать в виде:

$$\frac{d\eta}{dt} = G\eta + f(\cdot, \eta, u), \quad G\eta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\eta = \begin{pmatrix} \psi \\ \Delta\varphi \end{pmatrix}, \quad f(t, \eta, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, \varphi, u) \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Опять же следуя [39, sec. 10.3], возьмем $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[\eta_1, \eta_2]_X = \int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\, dx + \int\limits_\Omega \varphi_1\varphi_2\, dx + \int\limits_\Omega \psi_1\psi_2\, dx; \quad D(G) = \bigl\{\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr\} \times \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие (4.5) встраивается в область определения $D(G)$. В итоге задача (4.4)–(4.7) переписывается в виде абстрактного дифференциального уравнения (1.9). Заметим, что

$$\|f\|_X = \sqrt{[f, f]_X} = \bigl\|g(t, \varphi, u)\bigr\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, условия $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_2)$, конкретизируются следующим образом:

$(\mathbf{F}_1)$ для всех $u \in \mathcal{D}$, $\varphi \in E$ отображение $[0; T] \ni t \to g\bigl(t, \varphi(t), u(t)\bigr)$ принадлежит классу $Z = L_2\bigl([0; T]; L_2(\Omega)\bigr)$;

$(\mathbf{F}_2)$ существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M)\colon [0; T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0; T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in \mathcal{D}$, $\varphi_i \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\varphi_i\| \leqslant M$, $i = 1, 2$, п. в. $t \in [0; T]$ имеем:

$$\Bigl\|g\bigl(t, \varphi_1, u(t)\bigr) - g\bigl(t, \varphi_2, u(t)\bigr)\Bigr\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{N}(t, M)\, \bigl\|\varphi_1 - \varphi_2\bigr\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Как показано в [39, sec. 10.3], оператор $(I - G)$ является максимальным монотонным. Это означает, что условие $(\mathbf{G}_\lambda)$ выполнено при $\lambda = 1$. Поэтому применимы теоремы из § 2 при $K_\lambda = e^T$.

Как указано в [39, sec. 10.3, remark 7, p. 338] со ссылкой на [39, corollary 9.19], в случае, когда множество Ω ограничено, можно использовать на $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ скалярное произведение

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\, dx,$$

а на $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ — скалярное произведение

$$[\eta_1, \eta_2]_X = \int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\, dx + \int\limits_\Omega \psi_1\psi_2\, dx.$$

При этом оказывается, что оба оператора G и $(-G)$ являются максимальными монотонными. Стало быть, выполнено условие $(\mathbf{G}_\lambda)$ при $\lambda = 0$, и применимы теоремы из § 2 при $K_\lambda = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 3. С. 95–107. http://mi.mathnet.ru/ivm7249
2. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102. http://mi.mathnet.ru/znsl1983
3. Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21. http://mi.mathnet.ru/zvmmf3318
4. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
5. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
6. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. https://zbmath.org/?q=an:0938.93003
7. Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 6. С. 142–161. http://mi.mathnet.ru/smj6526
8. Чернов А. В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629. http://mi.mathnet.ru/zvmmf9539
9. Чернов А. В. О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 83–94. http://mi.mathnet.ru/ivm9252
10. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Mathematische Annalen. 1993. Vol. 296. No. 2. P. 215–234. https://doi.org/10.1007/BF01445103
11. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: A Cauchy problem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1995. Vol. 24. No. 8. P. 1193–1206. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00190-S
12. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 281. No. 1. P. 108–124. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00558-9
13. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal L_p–L_q regularity class // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264. No. 3. P. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
14. Сумин В. И. Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. . . . канд. физ.-матем. наук / ГГУ. Горький, 1975. 158 с.
15. Сумин В. И. О функциональных вольтерровых уравнениях // Изв. вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77. http://mi.mathnet.ru/ivm1805
16. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами: дис. . . . д-ра физ.-матем. наук / ННГУ. Н. Новгород, 1998. 346 с.
17. Сумин В. И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. № 2 (19). С. 138–151.
18. Сумин В. И., Чернов А. В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений / ННГУ. Н. Новгород, 2000. 75 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.00, № 1198–В00.

19. Чернов А. В. Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. ... канд. физ.-матем. наук / ННГУ. Н. Новгород, 2000. 177 с.
20. Чернов А. В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73. http://mi.mathnet.ru/ivm8446
21. Чернов А. В. О тотальном сохранении глобальной разрешимости задачи Гурса для управляемого полулинейного псевдопараболического уравнения // Владикавк. матем. журн. 2014. Т. 16. № 3. С. 55–63. http://mi.mathnet.ru/vmj513
22. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 230–243. https://doi.org/10.20537/vm150207
23. Чернов А. В. Об одном мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 112–122. https://doi.org/10.1134/S037406411601009X
24. Сумин В. И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107. https://zbmath.org/?q=an:1067.49002
25. Сумин В. И., Чернов А. В. Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: тр. Междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 293–300.
26. Сумин В. И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
27. Чернов А. В. О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2095-2111. https://doi.org/10.31857/S004446690003555-1
28. Сумин В. И. Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения // Вестник Тамбовского Университета. Сер. Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 453–466.
29. Чернов А. В. О тотальном сохранении глобальной разрешимости дифференциально-операторного уравнения // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 2. С. 94–111. https://elibrary.ru/item.asp?id=29675515
30. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111. https://doi.org/10.35634/vm200107
31. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
32. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
33. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
34. Функциональный анализ / под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1979.
35. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
36. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
37. Ramaswamy M., Shaiju A. J. Construction of approximate saddle-point strategies for differential games in a Hilbert space // Journal of Optimization Theory and Applications. 2009. Vol. 141. Issue 2. P. 349–370. https://doi.org/10.1007/s10957-008-9478-z
38. Dautray R., Lions J.-L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5. Evolution problems. Berlin: Springer-Verlag, 1992. https://zbmath.org/?q=an:0755.35001

39. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York: Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7

Поступила в редакцию 28.08.2020

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с неограниченным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 331–349.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 2. Pp. 331–349.

A. V. Chernov

On totally global solvability of evolutionary equation with unbounded operator

Keywords: semilinear evolutionary equation in a Hilbert space, maximal monotone operator, totally global solvability.

MSC2020: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.35634/vm210212

Let X be a Hilbert space, U be a Banach space, $G\colon X \to X$ be a linear operator such that the operator $B_\lambda = \lambda I - G$ is maximal monotone with some (arbitrary given) $\lambda \in \mathbb{R}$. For the Cauchy problem associated with controlled semilinear evolutionary equation as follows

$$x'(t) = Gx(t) + f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [0;T]; \quad x(0) = x_0 \in X,$$

where $u = u(t)\colon [0;T] \to U$ is a control, $x(t)$ is unknown function with values in X, we prove the totally (with respect to a set of admissible controls) global solvability subject to global solvability of the Cauchy problem associated with some ordinary differential equation in the space $\mathbb{R}$. Solution x is treated in weak sense and is sought in the space $\mathbb{C}_w\big([0;T];X\big)$ of weakly continuous functions. In fact, we generalize a similar result having been proved by the author formerly for the case of bounded operator G. The essence of this generalization consists in that postulated properties of the operator B_λ give us the possibility to construct Yosida approximations for it by bounded linear operators and thus to extend required estimates from "bounded" to "unbounded" case. As examples, we consider initial boundary value problems associated with the heat equation and the wave equation.

REFERENCES

1. Chernov A. V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. https://doi.org/10.3103/S1066369X11030108
2. Kalantarov V. K., Ladyzhenskaya O. A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, issue 1, pp. 53–70. https://doi.org/10.1007/BF01109723
3. Sumin V. I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90002-A
4. Sumin V. I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1992.
5. Lions J.-L. *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Paris: Bordas, 1983. https://zbmath.org/?q=an:0514.93001
6. Fursikov A. V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Providence, RI: AMS, 2000. https://zbmath.org/?q=an:1027.93500
7. Plotnikov V. I., Sumin V. I. Optimization of distributed systems in Lebesgue space, *Siberian Mathematical Journal*, 1981, vol. 22, no. 6, pp. 913–929. https://doi.org/10.1007/BF00968060
8. Chernov A. V. On the convergence of the conditional gradient method in distributed optimization problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1510–1523. https://doi.org/10.1134/S0965542511090077
9. Chernov A. V. On total preservation of solvability of controlled Hammerstein-type equation with non-isotone and non-majorizable operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 72–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X1706010X

10. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity, *Mathematische Annalen*, 1993, vol. 296, no. 2, pp. 215–234. https://doi.org/10.1007/BF01445103
11. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1995, vol. 24, no. 8, pp. 1193–1206. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00190-S
12. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 281, no. 1, pp. 108–124. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00558-9
13. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal L_p–L_q regularity class, *Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
14. Sumin V. I. *Optimization of controlled generalized Volterra systems*, Cand. Sci. (Phys. and Math.) Dissertation, Gorkii, 1975, 158 p. (In Russian).
15. Sumin V. I. On functional Volterra equations, *Russian Mathematics*, 1995, vol. 39, no. 9, pp. 65–75. https://zbmath.org/?q=an:0861.45004
16. Sumin V. I. *Functional Volterra equations in the mathematical theory of optimal control of distributed systems*, Dr. Sci. (Phys. and Math.) Dissertation, Nizhny Novgorod, 1998, 346 p. (In Russian).
17. Sumin V. I. Controlled functional Volterra equations in Lebesgue spaces, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Optimal'noe Upravlenie*, 1998, no. 2 (19), pp. 138–151 (in Russian).
18. Sumin V. I., Chernov A. V. *Volterra operator equations in Banach spaces: the stability of existence of global solutions*, NNSU, Nizhny Novgorod, 2000, 75 p. Deposited in VINITI 25.04.00, no. 1198–V00 (in Russian).
19. Chernov A. V. *Volterra operator equations and their application in the optimization theory of hyperbolic systems*, Cand. Sci. (Phys.&Math.) Dissertation, Nizhny Novgorod, 2000, 177 p. (In Russian).
20. Chernov A. V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X12030085
21. Chernov A. V. On total preservation of global solvability for a Goursat problem associated with a controlled semilinear pseudoparabolic equation, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 55–63 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj513
22. Chernov A. V. On the totally global solvability of a controlled Hammerstein type equation with a varied linear operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 230–243 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm150207
23. Chernov A. V. On a majorant–minorant criterion for the total preservation of global solvability of distributed controlled systems, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 111–121. https://doi.org/10.1134/S0012266116010092
24. Sumin V. I. The problem of sustainability of existence global solutions of controlled boundary value problems and Volterra functional equations, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta. Matematika*, 2003, no. 1, pp. 91–107 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:1067.49002
25. Sumin V. I., Chernov A. V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimization of distributed systems, *Systems Dinamics and Control Processes (SDCP-2014): Proceedings of Int. Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of the birth of Acad. N. N. Krasovskii*, Yekaterinburg: UMTS UPI, 2015, pp. 293–300 (in Russian).
26. Sumin V. I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 262–278 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
27. Chernov A. V. Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 2018–2030. https://doi.org/10.1134/S0965542518120096

28. Sumin V. I. Equiquasinilpotency: definitions, conditions, examples of application, *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Seriya Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2010, vol. 15, issue 1, pp. 453–466 (in Russian).
29. Chernov A. V. On total preservation of global solvability of a differential operator equation, *Prikladnaya Matematika i Voprosy Upravleniya*, 2017, no. 2, pp. 94–111 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=29675515
30. Chernov A. V. On totally global solvability of controlled second kind operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 92–111 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200107
31. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
32. Balakrishnan A. V. *Applied functional analysis*, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1976. https://zbmath.org/?q=an:0333.93051
33. Hille E., Phillips R. S. *Functional analysis and semi-groups*, Providence, R. I.: American Mathematical Society (AMS), 1957. https://zbmath.org/?q=an:0078.10004
34. *Funktsional'nyi analiz* (Functional analysis) / S. G. Krein (Ed.), Moscow: Nauka, 1979.
35. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen* (Nonlinear operator equations and operator differential equations), Berlin: Akademie, 1974. https://zbmath.org/?q=an:0289.47029
36. Krein S. G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* (Linear differential equations in a Banach space), Moscow: Nauka, 1967.
37. Ramaswamy M., Shaiju A. J. Construction of approximate saddle-point strategies for differential games in a Hilbert space, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, vol. 141, issue 2, pp. 349–370. https://doi.org/10.1007/s10957-008-9478-z
38. Dautray R., Lions J.-L. x *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5. Evolution problems*, Berlin: Springer-Verlag, 1992. https://zbmath.org/?q=an:0755.35001
39. Brezis H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, New York: Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7

Received 28.08.2020

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia;
Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On totally global solvability of evolutionary equation with unbounded operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 331–349.