ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 265–284.

УДК 517.9

© ***В. И. Сумин, М. И. Сумин***

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ИТЕРАЦИОННОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРОВА ТИПА

Рассматривается регуляризация *классических условий оптимальности* (КУО) — принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина — в выпуклой задаче оптимального управлении с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства. Управляемая система задается линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве $L_2^m$, основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Целевой функционал задачи является сильно выпуклым. Получение регуляризованных КУО в итерационной форме основано на использовании метода итеративной двойственной регуляризации. Основное предназначение получаемых в работе регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в итерационной форме — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО в итерационной форме формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений. Они «преодолевают» свойства некорректности КУО и являются регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач. В качестве иллюстративного примера рассматривается задача оптимального управления, связанная с гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка.

*Ключевые слова*: выпуклое оптимальное управление, распределенная система, функционально-операторное уравнение вольтеррова типа, некорректность, итеративная регуляризация, двойственность, минимизирующее приближенное решение, регуляризирующий оператор, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.35634/vm210208

При изучении задач оптимального управления, как, впрочем, и других оптимизационных задач, неизбежно приходится иметь дело с двумя принципиально разными подходами к их постановкам. Первый из них предполагает точное задание исходных данных задач. Именно в таком «идеальном» предположении, после открытия принципа максимума Понтрягина, в теории оптимального управления получило фундаментальное развитие направление, связанное с изучением различных условий оптимальности, составляющих, как хорошо известно, основу этой теории (см., например, [1]).

При втором подходе предполагается, что исходные данные могут задаваться с погрешностями. В частности, так приходится считать тогда, когда задача оптимального управления возникает как эквивалент некоторой обратной задачи современного естествознания. Главной отличительной особенностью постановок задач при втором подходе является необходимость учета свойств некорректности оптимизационных задач [2, гл. 9]. С этой некорректностью, в свою очередь, напрямую связана некорректность *классических условий оптимальности* (КУО) — *принципа Лагранжа* (ПЛ) и *принципа максимума Понтрягина* (ПМП), проявляющаяся в их неустойчивости. Мы говорим о неустойчивости КУО, если выделяемые ими в задачах, «близких» к исходной (невозмущенной) задаче элементы фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи (подробности, комментарии и примеры см. в [3–5])[1]. Примеры [3–5] говорят о том, что КУО в каждой конкретной задаче условной оптимизации, в том числе и оптимального управления,

[1] С формальной точки зрения, можно говорить и о таком свойстве некорректности КУО как их возможная

априори следует считать математическими объектами, которым в полной мере присущи проявления некорректности, если не доказано обратное. Заметим, что проверка на корректность конкретных оптимизационных задач и условий оптимальности для них представляет собою, как правило, сложную самостоятельную математическую задачу.

Настоящая статья посвящена вопросу преодоления неустойчивости ПЛ и ПМП в линейно-выпуклых задачах оптимизации распределенных систем с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства и получению для таких задач регуляризованных ПЛ и ПМП в итерационной форме. Эти регуляризованные итерационные КУО имеют вид теорем существования обобщенных минимизирующих последовательностей — *минимизирующих приближенных решений* (МПР) в смысле Дж. Варги [7]. Основное прикладное содержание указанных теорем существования МПР — алгоритмы устойчивого генерирования МПР в задачах оптимального управления для целей непосредственного практического решения таких задач.

Наряду с понятием МПР, центральным в данной работе является понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма (см. определения 1, 3) в задаче оптимального управления (условной оптимизации), введенное ранее в [6]. Оно «жестко привязано» именно к понятию МПР, органично учитывающему как запросы строгой математической оптимизационной теории [7, гл. IV–VIII], так и потребности инженерной практики [7, гл. III], предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых «зазоров» как по выполнению ограничений задачи, так и по близости к значению (нижней грани) задачи. Понятия МПР-образующего алгоритма в совокупности с двойственным подходом [3–5] нацелены прежде всего на устойчивое построение МПР в задаче и позволяют получать регуляризованные КУО при общих предположениях о ее исходных данных. Одновременно понятие МПР естественным образом «встраивается» в формулировки регуляризованных КУО. Применяемое в статье понятие МПР-образующего алгоритма можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между используемыми в [2, гл. 9] понятиями регуляризирующих алгоритмов первого типа (сходимость нижних граней, см. определение 1 [2, гл. 9, § 2, с. 802]) и второго типа (сходимость по аргументу, см. определение 1 [2, гл. 9, § 6, с. 837, 838])[2].

Укажем две существенные, на наш взгляд, особенности настоящей работы. Во-первых, здесь мы занимаемся регуляризацией непосредственно КУО (а не регуляризацией «самой задачи» условной минимизации, как это обычно принято в теории регуляризации, см. [2, 8][3]), естественным образом трансформируя их в теоремы существования МПР и одновременно МПР-образующие (регуляризирующие) алгоритмы для решения задач оптимального управления. Мы продолжаем при этом линию работ [3–5] и опираемся на предложенный ранее и основанный на теории двойственности подход к регуляризации в задачах условной оптимизации (см., например, [9]).

Во-вторых, регуляризация КУО нацелена здесь на преодоление неустойчивости КУО в задачах оптимизации распределенных систем, описываемых линейными функциональны-

невыполнимость (подробности см. в [5, 6]). Однако, так как рассматриваемая в работе задача оптимального управления может быть отнесена к классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства, то ввиду конечномерности образа оператора, задающего ограничения, проблема невыполнимости условий оптимальности в разрешимой задаче, по сути дела, снимается.

[2] Некоторые дополнительные сведения о сравнении используемого здесь понятия МПР-образующего (регуляризирующего) оператора с аналогичными понятиями [2, гл. 9] см. в [6, замечание 2].

[3] Как уже отмечено, рассматриваемую здесь задачу оптимального управления с конечным числом функциональных ограничений можно трактовать как задачу выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Вопросы регуляризации таких и более общих задач математического программирования рассматривались в [2, гл. 9].

ми (иначе, функционально-операторными) уравнениями второго рода общего вида в пространствах типа $L_2$. Отличительная черта рассматриваемых уравнений — квазинильпотентность основного линейного оператора правой части. Подобным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы[4]. Поэтому рассматриваемые уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова типа. К таким уравнениям естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными (гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных, систем таких уравнений, уравнений с запаздываниями разного рода и др., см., например, разнообразные конкретные примеры в [10, глава 2], обзоры в [10, 14, 15]). Это позволило в настоящей работе получить регуляризованные ПЛ и ПМП в итерационной форме единообразно для широкого класса распределенных оптимизационных задач. В качестве конкретного иллюстрирующего примера нами рассматривается задача оптимального управления, связанная с системой уравнений гиперболического типа.

Ранее регуляризованные КУО в итерационной форме рассматривались для выпуклых задач оптимизации распределенных систем, описываемых параболическими уравнениями [4, 16]. Подход, применяемый в данной работе, позволяет единообразно получить регуляризованные КУО для обширного класса оптимизационных задач, существенно отличных от рассмотренных в [4,16]. Результаты регуляризации КУО представляются здесь сразу для широкого класса распределенных систем, описываемых указанными выше линейными функциональными уравнениями вольтеррова типа. В этом состоит принципиальное отличие результатов настоящей работы от полученных ранее в [4, 16].

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbf{R}^n$ — пространство $n$-векторов-столбцов; $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ и $|\cdot|_n$ — евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbf{R}^n$; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\operatorname{col}\{a,\ldots,b\}$ — вектор-столбец с элементами $a,\ldots,b$; * — знак сопряжения и транспонирования; $\Pi\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество изменения независимых переменных, элементы которого обозначаем через $t\equiv\{t^1,\ldots,t^n\}$; $L_p(\Pi)$ — лебегово пространство со стандартной нормой ($1\leqslant p\leqslant\infty$); $L_p^m\equiv L_p^m(\Pi)\equiv(L_p(\Pi))^m$ ($1\leqslant p\leqslant\infty$); $\|\cdot\|_{p,m}$ — стандартная норма прямого произведения в $L_p^m$; $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,m}$ — стандартное скалярное произведение в $L_2^m$; $L_p^{m\times l}\equiv L_p^{m\times l}(\Pi)$ — пространство $(m\times l)$-матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m\times l}$ — стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m\times l}$.

## § 1. Постановка задачи оптимального управления

**Базовая оптимизационная задача.** Пусть заданы: натуральные числа $m$, $n$, $s$; $\Pi\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество, элементы которого обозначаем через $t\equiv$ $\equiv\{t^1,\ldots,t^n\}$; $c(t)$, $t\in\Pi$, — функция класса $L_2^m\equiv L_2^m(\Pi)\equiv(L_2(\Pi))^m$; $A\colon L_2^m\to L_2^m$ — *линейный ограниченный оператор* (ЛОО) с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B\colon L_2^s\to L_2^m$. Рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$z(t)=A[z](t)+B[u](t)+c(t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_2^m,\quad u\in L_2^s,\tag{1.1}$$

[4]Начиная с известных работ L. Tonelli (1929) и А. Н. Тихонова (1938) название «вольтерровы операторы» (операторы типа Вольтерра) присваивалось разными авторами различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.); см., например, краткий обзор определений вольтерровых операторов [10, Дополнение], а также [11]. В случае линейных операторов эти определения так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [12, с. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение [13] функционального оператора, «вольтеррова на системе множеств», являющееся многомерным обобщением определения А. Н. Тихонова, и опирающийся на определение [13] цепочечный признак квазинильпотентности [11, теорема 2]).

считая $u(.)$ управлением. Ввиду квазинильпотентности оператора $A$, уравнение (1.1) имеет для каждого $u(.) \in L_2^s$ единственное в классе $L_2^m$ решение $z(t), t \in \Pi$, и

$$z(t) = S[B[u] + c](t), \quad t \in \Pi, \quad u \in L_2^s, \tag{1.2}$$

где $S\colon L_2^m \to L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана: $S[y] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} A^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(.) \in L_2^s$ решение $z(.)$ уравнения (1.1) обозначаем $z_u(.)$.

Будем считать, что на прямом произведении $L_2^m \times L_2^s$ определены некоторые функционалы $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\dots$, $\mathcal{J}_k$, $\mathcal{I}_1$, $\dots$, $\mathcal{I}_r$ со свойствами: $\mathcal{J}_0[z,u] \equiv K[z] + M[u]$, $z \in L_2^m$, $u \in L_2^s$, где $K\colon L_2^m \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал, а $M\colon L_2^s \to \mathbf{R}$ — сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклости $\varkappa$; $\mathcal{J}_i[z,u]\colon L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал $(i = 1,\dots,k)$; $\mathcal{I}_i[z,u]\colon L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$ — линейный ограниченный функционал, задаваемый формулой $\mathcal{I}_i[z,u] \equiv \langle a_i, z\rangle_{2,m} + \langle b_i, u\rangle_{2,s}$, где $a_i \in L_2^m$, $b_i \in L_2^s$. Используя (1.2) как формулу подстановки, зададим на $L_2^s$ функционалы: $J_0[u] \equiv \mathcal{J}_0[z_u,u] \equiv K[z_u] + M[u]$, $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u,u]$ $(i = 1,\dots,k)$, $I_i[u] \equiv \mathcal{I}_i[z_u,u]$ $(i = 1,\dots,r)$, $u(.) \in L_2^s$. Функционал $J_0[.]$ сильно выпуклый, функционалы $J_i[.]$ $(i = 1,\dots,k)$ выпуклые, а функционалы $I_i[.]$ $(i = 1,\dots,r)$ аффинные на $L_2^s$. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество в $L_2^s$, $d_1,\dots,d_r$ — некоторые числа. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.1) с минимизируемым целевым функционалом $J_0[u]$ при функциональных ограничениях

$$J_1[u] \leqslant 0, \quad \dots, \quad J_k[u] \leqslant 0, \quad I_1[u] = d_1, \quad \dots, \quad I_r[u] = d_r, \tag{1.3}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$J_0[u] \to \min, \quad (1.3), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{1.4}$$

**Точная и приближенная оптимизационные задачи.** Задача (1.4) полностью определяется набором своих исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{A, B, c, K, M, \mathcal{J}_i\ (i = 1,\dots,k),\ \{a_i, b_i, d_i\}\ (i = 1,\dots,r)\}$. Предположим, что точные исходные данные $\mathsf{f}^0 \equiv \{A^0, B^0, c^0, K^0, M^0, \mathcal{J}_i^0\ (i = 1,\dots,k), \{a_i^0, b_i^0, d_i^0\}(i = 1,\dots,r)\}$ нам не известны, но мы можем оперировать с приближенными исходными данными $\mathsf{f}^\delta \equiv \{A^\delta, B^\delta, c^\delta, K^\delta, M^\delta, \mathcal{J}_i^\delta\ (i = 1,\dots,k),\ \{a_i^\delta, b_i^\delta, d_i^\delta\}\ (i = 1,\dots,r)\}$, где $\delta$ — меняющийся в некотором полуинтервале $(0, \delta_0]$ числовой параметр ($\delta_0$ — фиксированное число), характеризующий близость приближенных данных $\mathsf{f}^\delta$ к точным данным $\mathsf{f}^0$ в указанном ниже условиями $A_1$) и $A_2$) смысле (в соответствии с традициями теории некорректных задач положительным значениям параметра $\delta$ соответствует приближенная оптимизационная задача вида (1.4) с данными $\mathsf{f}^\delta$, а значению $\delta = 0$ — точная оптимизационная задача вида (1.4) с данными $\mathsf{f}^0$). Таким образом, мы считаем, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ существуют следующие объекты: квазинильпотентный ЛОО $A^\delta\colon L_2^m \to L_2^m$; ЛОО $B^\delta\colon L_2^s \to L_2^m$; функция $c^\delta(.) \in L_2^m$; выпуклый функционал $K^\delta[z]\colon L_2^m \to \mathbf{R}$; сильно выпуклый функционал $M^\delta[u]\colon L_2^s \to \mathbf{R}$ с постоянной сильной выпуклости $\varkappa$; выпуклый функционал $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]\colon L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,k)$; линейный ограниченный функционал $\mathcal{I}_i^\delta[z,u]\colon L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$, задаваемый формулой $\mathcal{I}_i^\delta[z,u] \equiv \left\langle a_i^\delta, z\right\rangle_{2,m} + \left\langle b_i^\delta, u\right\rangle_{2,s}$, где $a_i^\delta \in L_2^m$, $b_i^\delta \in L_2^s$ $(i = 1,\dots,r)$; числа $d_i^\delta$ $(i = 1,\dots,r)$. Предполагаем, что выполняется условие

Л) функционалы $K^\delta, M^\delta$ и каждый из функционалов $\mathcal{J}_i^\delta (i = 1,\dots,k)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, липшицевы на каждом ограниченном множестве пространств $L_2^m, L_2^s$ и $L_2^m \times L_2^s$ соответственно, причем липшицевость равномерна по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, то есть соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Считаем, что входные данные оптимизационных задач семейства $(OC^\delta)$, $\delta \in (0, \delta_0]$, связаны с входными данными точной задачи $(OC^0)$ следующим образом:

$A_1$) существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем

$$\left\|A^\delta - A^0\right\| \leqslant C\delta, \quad \left\|B^\delta - B^0\right\| \leqslant C\delta, \quad \left\|c^\delta - c^0\right\|_{2,m} \leqslant C\delta,$$
$$\left\|a_i^\delta - a_i^0\right\|_{2,m} \leqslant C\delta, \quad \left\|b_i^\delta - b_i^0\right\|_{2,s} \leqslant C\delta, \quad \left|d_i^\delta - d_i^0\right| \leqslant C\delta \; (i = 1, \dots, r), \tag{1.5}$$
$$\left|M^\delta[u] - M^0[u]\right| \leqslant C\delta \; (u \in \mathcal{D});$$

$A_2$) существует неубывающая функция $N_1(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при $\|z(.)\|_{2,m} \leqslant l$, $u(.) \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$\left|K^\delta[z] - K^0[z]\right| \leqslant N_1(l)\delta, \quad \left|\mathcal{J}_i^\delta[z,u] - \mathcal{J}_i^0[z,u]\right| \leqslant N_1(l)\delta \; (i = 1, \dots, k). \tag{1.6}$$

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = A^\delta[z](t) + B^\delta[u](t) + c^\delta(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \tag{1.7}$$

ввиду квазинильпотентности оператора $A^\delta$, имеет для каждого $u(.) \in L_2^s$ единственное в классе $L_2^m$ решение $z(t), t \in \Pi$, и справедлива формула

$$z(t) = S^\delta[B^\delta[u] + c^\delta](t), \quad t \in \Pi, \quad u(.) \in L_2^s, \tag{1.8}$$

где $S^\delta \colon L_2^m \to L_2^m$ — ЛОО, задаваемый формулой $S^\delta[y] \equiv \sum\limits_{i=0}^{\infty} (A^\delta)^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(.) \in L_2^s$ решение $z(.)$ уравнения (1.7) обозначаем $z_u^\delta(.)$, $\delta \in [0, \delta_0]$.

Кроме того, при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ мы имеем набор функциональных ограничений

$$J_1^\delta[u] \leqslant 0, \quad \dots, \quad J_k^\delta[u] \leqslant 0, \quad I_1^\delta[u] = d_1^\delta, \quad \dots, \quad I_r^\delta[u] = d_r^\delta, \tag{1.9}$$

где

$$J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \; (i = 1, \dots, k), \quad I_i^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_i^\delta[z_u^\delta, u] \; (i = 1, \dots, r), \quad u(.) \in L_2^s, \tag{1.10}$$

и задачу оптимального управления

$$(OC^\delta) \qquad J_0^\delta[u] \to \min, \quad (1.9), \quad u(.) \in \mathcal{D},$$

где $J_0^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta, u] \equiv K^\delta[z_u^\delta] + M^\delta[u]$, $u(.) \in L_2^s$.

**МПР и МПР-образующий оператор.** Для компактности записи введем следующие обозначения: $J^\delta[u] \equiv \left\{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\right\}$, $I^\delta[u] \equiv \left\{I_1^\delta[u], \dots, I_r^\delta[u]\right\}$, $d^\delta \equiv \left\{d_1^\delta, \dots, d_r^\delta\right\}$. Положим: $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \left\{u(.) \in \mathcal{D} : \left\|I^\delta[u] - d^\delta\right\|_r \leqslant \epsilon, \; J_i^\delta[u] \leqslant \epsilon \; (i = 1, \dots, k)\right\}$, где $\delta \in [0, \delta_0]$, $\epsilon \geqslant 0$; $\mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}^{0,0}$.

Определим обобщенную нижнюю грань $\beta$ задачи $(OC^0)$ как предел $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \neq \emptyset$, и $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Вообще говоря, имеет место очевидное неравенство $\beta \leqslant \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи $(OC^0)$. Однако, специфика этой задачи такова, что $\beta = \beta_0$, причем обе грани достигаются на ее единственном оптимальном элементе $u^0$ в случае его существования.

Как уже было сказано, центральным для нас является понятие МПР в задаче $(OC^0)$. Напомним: последовательность $u^k(.) \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, называется МПР задачи $(OC^0)$, если $J_0^0[u^k(.)] \to \beta$ при $k \to \infty$, причем $u^k \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\epsilon^k$, $k = 1, 2, \dots$. Введем, наконец, другое центральное понятие работы, а именно, понятие МПР-образующего оператора (алгоритма).

**Определение 1.** Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k$, $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\mathsf{f}^{\delta^k}$, удовлетворяющих оценкам (1.5), (1.6) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется *МПР-образующим* в задаче $(OC^0)$, если последовательность $u^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

## § 2. Эквивалентная задача выпуклого программирования и регуляризация принципа Лагранжа

**Задача выпуклого программирования.** Задача оптимального управления $(OC^\delta)$ при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеет форму задачи выпуклого программирования в пространстве $L_2^s$. Мы перепишем ее в несколько ином виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работ [3, 6], посвященных регуляризации КУО в задачах выпуклого программирования и выпуклого оптимального управления в гильбертовом пространстве. Для этого выделим в аффинных функционалах $I_j^\delta[.]$, $j = 1, \ldots, r$, линейную часть. Именно, определим функционалы $\mathbf{I}_j^\delta[u] \equiv I_j^\delta[u] - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \right\rangle_{2,s} \equiv I_j^\delta[z_u^\delta, u] - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \right\rangle_{2,s}$ $(j = 1, \ldots, r)$, $u(.) \in L_2^s$ $(\delta \in [0, \delta_0])$. Для единообразия записи введем обозначения: $\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ $(i = 1, \ldots, k)$, $u(.) \in L_2^s$. Функционал $\mathbf{J}_0^\delta$ — сильно выпуклый, функционалы $\mathbf{J}_i^\delta$ $(i = 1, \ldots, k)$ — выпуклые, а $\mathbf{I}_j^\delta$ $(j = 1, \ldots, r)$ — линейные на $L_2^s$. Положим $e_j^\delta \equiv d_j^\delta - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \right\rangle_{2,s}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Очевидно, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача выпуклого программирования в $L_2^s$

$$(P^\delta) \qquad \mathbf{J}_0^\delta[u] \to \min, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \leqslant 0 \ (i = 1, \ldots, k), \quad \mathbf{I}_j^\delta[u] = e_j^\delta \ (j = 1, \ldots, r), \quad u \in \mathcal{D}$$

эквивалентна задаче оптимального управления $(OC^\delta)$: совпадают множества решений и значения этих задач. Для нас важно, что задачи $(P^\delta)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом простанстве с сильно выпуклыми функционалами цели, изучавшемуся в работах [3, 6].

Условие Л) влечет за собой следующее равномерное по $\delta \in [0, \delta_0]$ свойство липшицевости функционалов $\mathbf{J}_i^\delta$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ на любом ограниченном множестве пространства $L_2^s$: существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ для любого $l > 0$ имеем: $\left|\mathbf{J}_i^\delta[u_1] - \mathbf{J}_i^\delta[u_2]\right| \leqslant \mathbf{N}_2(l) \left\|u_1 - u_2\right\|_{2,s}$, $u_1, u_2 \in L_2^s$, $\|u_1\|_{2,s}$, $\|u_2\|_{2,s} \leqslant l$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$.

Из условий $A_1$) и $A_2$), связывающих входные данные задачи оптимального управления $(OC^0)$ с входными данными задач $(OC^\delta)$ при $\delta \in (0, \delta_0]$, получаем следующую связь входных данных задачи $(P^0)$ с входными данными задач $(P^\delta)$, $\delta \in (0, \delta_0]$.

**Лемма 1.** *Существует постоянная $\Gamma$, зависящая лишь от операторов $A^0, B^0$, функционалов $K^0, \mathcal{J}_i^0 (i = 1, \ldots, k)$, функций $c^0, a_i^0 (i = 1, \ldots, r), b_i^0 (i = 1, \ldots, r), N_1$, чисел $C, \delta_0$ и множества $\mathcal{D}$, такая, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} \left|\mathbf{J}_i^\delta[u] - \mathbf{J}_i^0[u]\right| \leqslant \Gamma\delta, \quad u \in \mathcal{D} \quad (i = 0, 1, \ldots, k), \\ \left|\mathbf{I}_i^\delta[u] - \mathbf{I}_i^0[u]\right| \leqslant \Gamma\delta \left\|u\right\|_{2,s}, \quad u \in L_2^s \ (i = 1, \ldots, r); \quad \left|e_i^\delta - e_i^0\right| \leqslant \Gamma\delta \ (i = 1, \ldots, r). \end{gathered} \tag{2.1}$$

**МПР и МПР-образующий оператор в задаче выпуклого программирования.** Положим: $\mathbf{J}^\delta[u] \equiv \left\{\mathbf{J}_1^\delta[u], \ldots, \mathbf{J}_k^\delta[u]\right\}$, $\mathbf{I}^\delta[u] \equiv \left\{\mathbf{I}_1^\delta[u], \ldots, \mathbf{I}_r^\delta[u]\right\}$, $e^\delta \equiv \left\{e_1^\delta, \ldots, e_r^\delta\right\}$. Имеем: $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} = \left\{u \in \mathcal{D} : \left\|\mathbf{I}^\delta[u] - e^\delta\right\|_r \leqslant \epsilon, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \leqslant \epsilon \ (i = 1, \ldots, k)\right\}$, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\epsilon \geqslant 0$. Так как обобщенная нижняя грань задачи $(P^0)$ определяется фактически той же самой формулой, что и обобщенная нижняя грань задачи $(OC^0)$, и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней то же обозначение $\beta$. Имеем: $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} \mathbf{J}_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \neq \emptyset$; $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Как уже отмечалось, вообще говоря, имеет место очевидное неравенство $\beta \leqslant \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи $(P^0)$. Однако, специфика задачи $(P^0)$ (она является выпуклой с сильно выпуклым функционалом цели) такова, что $\beta = \beta_0$, причем обе грани достигаются на ее единственном оптимальном элементе $u^0$ в случае его существования.

**Определение 2.** Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов множества $\mathcal{D}$, для которой существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^{\infty}$, что $u^j \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^j}$ $(j = 1, 2, \dots)$ и $\mathbf{J}_0^0[u^j] \to \beta = \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ при $j \to \infty$ называется *минимизирующим приближенным решением* (МПР) задачи $(P^0)$.

**Лемма 2.** *В силу ограниченности $\mathcal{D}$ существование МПР в задаче $(P^0)$ равносильно неравенству $\beta < +\infty$. Если $\beta < +\infty$ и сильно выпуклый функционал $\mathbf{J}_0^0$ является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$, то для любого МПР $u^k,\ k = 1, 2, \dots$, в разрешимой единственным образом в этом случае задаче $(P^0)$ справедливо предельное соотношение: $u^k \to u^0,\ k \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, можно заметить, что, так как $\beta < +\infty$, а функционал $\mathbf{J}_0^0$ непрерывный и сильно выпуклый, то последовательность $u^k$, $k = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в лемме, является ограниченной. Во-вторых, благодаря единственности решения $u^0$ и слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathbf{J}_0^0[u]$, $\mathbf{J}_i^0[u]$ $(i = 1, \dots, k)$, $\mathbf{I}_i^0[u]$ $(i = 1, \dots, r)$, $u \in \mathcal{D}$, получаем, что элементы $u^k$ при $k \to \infty$ сходятся слабо к решению $u^0$ задачи $(P^0)$. И наконец, в третьих, так как $\mathbf{J}_0^0[u^k] \to \mathbf{J}_0^0[u^0]$ при $k \to \infty$, то, с учетом субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ в точках $\mathcal{D}$, получаем сильную сходимость $u^k$ к $u^0$ при $k \to \infty$. $\square$

Введем для задачи $(P^0)$ понятие МПР-образующего (регуляризирующего) оператора [6], согласованное с понятием МПР. Набором исходных данных задачи $(P^\delta)$ является набор $\hat{\mathsf{f}}^\delta \equiv \{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$.

**Определение 3.** Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k$, $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}\}$, удовлетворяющих условиям (2.1) леммы 1 при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется *МПР-образующим* в задаче $(P^0)$, если последовательность $u^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

**Двойственная задача.** Определим двойственную задачу к задаче выпуклого программирования $(P^\delta)$. Введем с этой целью регулярную функцию Лагранжа задачи $(P^\delta)$

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv \mathbf{J}_0^\delta[u] + \left\langle \lambda, \mathbf{I}^\delta[u] - e^\delta \right\rangle_r + \left\langle \mu, \mathbf{J}^\delta[u] \right\rangle_k, \tag{2.2}$$

где $u \in L_2^s, \lambda \in \mathbf{R}^r, \mu \in \mathbf{R}_+^k$. При любых $\lambda \in \mathbf{R}^r, \mu \in \mathbf{R}_+^k$ и каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ функция $L^\delta(u, \lambda, \mu)$ сильно выпукла и непрерывна (липшицева) как функция переменной $u$ в $L_2^s$, а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в $L_2^s$ множестве $\mathcal{D}$, причем в единственной точке $u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname*{argmin}\limits_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu), \quad \lambda \in \mathbf{R}^r,\ \mu \in \mathbf{R}_+^k$ (см., например, [2, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче $(P^\delta)$ является задача

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r,\ \mu \in \mathbf{R}_+^k.$$

**Лемма 3.** *Ввиду ограниченности $\mathcal{D}$ справедлива оценка*

$$|V^\delta(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu)| \leqslant \mathbf{K}\delta(1 + \|\lambda\|_k + \|\mu\|_r), \tag{2.3}$$

*в которой постоянная $\mathbf{K} > 0$ зависит от $\sup\limits_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}$, но не зависит от $\delta$, $\lambda$, $\mu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3 проводится так же, как и оценки (2.32) в [6]. □

**Итеративная двойственная регуляризация.** Пусть опять задача $(P^0)$ имеет решение; обозначаем его, как и раньше, через $u^0$. Через $\partial V^\delta(\lambda,\mu)$ обозначаем супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V^\delta\colon \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k_+ \to \mathbf{R}$. Вектор $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda,\mu) \equiv \left\{\mathbf{I}^\delta\left[u^\delta[\lambda,\mu]\right] - e^\delta, \mathbf{J}^\delta\left[u^\delta[\lambda,\mu]\right]\right\}$ лежит в $\partial V^\delta(\lambda,\mu)$. Пусть последовательность $\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}$, $j=0,1,2,\ldots$, конструируется по итерационному правилу

$$\left\{\bar\lambda^{j+1},\bar\mu^{j+1}\right\} = Pr_\Lambda\left(\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\} + \beta^j\widetilde{\partial V^{\delta^j}}\left(\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right) - 2\beta^j\alpha^j\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}\right),\ \ j=0,1,2,\ldots;$$
$$\left\{\bar\lambda^0,\bar\mu^0\right\} \in \Lambda \equiv \mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+, \quad (2.4)$$

где последовательности $\delta^j$, $\alpha^j$, $\beta^j$, $j=1,2,\ldots$, удовлетворяют условиям согласования

$$\delta^j \geqslant 0,\ \alpha^j > 0,\ \beta^j > 0,\ \lim_{j\to\infty}(\delta^j+\alpha^j+\beta^j) = 0,$$
$$\frac{\alpha^j}{\alpha^{j+1}} \leqslant C_0,\ \ \frac{|\alpha^{j+1}-\alpha^j|}{(\alpha^j)^3\beta^j} \leqslant \tilde C,\ \ \frac{\beta^j}{(\alpha^j)^3} \leqslant \tilde C,\ \ \frac{\delta^j}{(\alpha^j)^6} \leqslant \tilde C,\ \ \sum_{j=1}^\infty \alpha^j\beta^j = +\infty, \quad (2.5)$$

при некоторых положительных $\tilde C$, $C_0$. Такие последовательности существуют. Можно взять, например, $\alpha^j = j^{-1/6}$, $\beta^j = j^{-1/(5/3)}$, $\delta^j = j^{-1}$.

Справедлива (см. [4, теорема 3.2], [9, теорема 2]) следующая теорема.

**Теорема 1** (итеративная двойственная регуляризация). *Пусть $u^0$ — решение задачи $(P^0)$ и выполняются условия согласования (2.5). Тогда*

$$\alpha^j\left\|\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}\right\| \to 0,\ \ \mathbf{J}^0_0\left[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]\right] \to \mathbf{J}^0_0\left[u^0\right],\ \ \mathbf{I}^0\left[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]\right] \to e^0 \ \ \textit{при}\ \ j\to\infty,$$

*и существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varkappa^j\}_{j=1}^\infty$, что $\mathbf{J}^0_i\left[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]\right] \leqslant \varkappa^j$ $(i=1,\ldots,k)$, $j=1,2,\ldots$. При дополнительном условии субдифференцируемости $\mathbf{J}^0_0$ (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$ имеем:*

$$\left\|u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j] - u^0\right\|_{2,s} \to 0 \ \ \textit{при}\ \ j\to\infty. \quad (2.6)$$

*Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к $(P^0)$ задача, алгоритм $R(\cdot,\delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathbf{J}^{\delta^j}_0, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{I}^{\delta^j}, e^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ для каждого набора исходных данных $(\mathbf{J}^{\delta^j}_0, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{I}^{\delta^j}, e^{\delta^j})$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta=\delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 3, причем в случае субдифференцируемости $\mathbf{J}^0_0$ в точках $\mathcal{D}$ имеет место и сильная сходимость (2.6); если такой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, можно гарантировать лишь слабую сходимость $u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ к $u^0$ при $\delta^j\to 0$, $j\to\infty$. Кроме того, справедливы соотношения*

$$\left\langle\bar\mu^j, \mathbf{J}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]\right]\right\rangle_k + \left\langle\bar\lambda^j, \mathbf{I}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]\right] - e^{\delta^j}\right\rangle_r \to 0 \quad \textit{при} \quad j\to\infty,$$
$$V^0\left(\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right) \to \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+} V^0(\lambda,\mu) = \mathbf{J}^0_0\left[u^0\right] \quad \textit{при} \quad j\to\infty.$$

Сформулированная теорема сходимости метода итеративной двойственной регуляризации может быть дополнена и регуляризирующим правилом останова итерационного процесса (2.4) в случае, когда ошибка задания исходных данных $\delta$ является конечной и не стремится к нулю (см., например, теорему 3 из [9]).

**Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа.** Теперь сформулируем и докажем регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме в задаче $(P^0)$.

**Теорема 2** (регуляризованный итерационный принцип Лагранжа). *Для существования в задаче* $(P^0)$ *МПР необходимо и достаточно, чтобы для последовательности* $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} \in \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k_+$, $j = 0, 1, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.4) *с условиями согласования* (2.5), *выполнялось предельное соотношение*

$$\left\langle \bar{\lambda}^j, \mathbf{I}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j,\right]\right] - e^{\delta^j}\right\rangle_r + \left\langle \bar{\mu}^j, \mathbf{J}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]\right]\right\rangle_k \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{2.7}$$

*и нашлась такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел* $\{\epsilon^j\}_{j=1}^{\infty}$, *что*

$$u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \epsilon^j}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{2.8}$$

*В этом случае последовательность* $u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$, $j = 0, 1, \ldots$, *есть МПР задачи* $(P^0)$ *и, вне зависимости от того, разрешима двойственная к* $(P^0)$ *задача или нет, при субдифференцируемости* $\mathbf{J}_0^0$ *на* $\mathcal{D}$, *имеет место сильная сходимость в* $L_2^s$:

$$u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right] \to u^0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.9}$$

*Одновременно выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \to \sup_{(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k_+} V^0(\lambda, \mu) = \mathbf{J}_0^0\left[u^0\right] \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.10}$$

*Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* $(P^0)$ *задача, алгоритм* $R(\cdot, \delta^j)$, *задаваемый равенством* $R(\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{I}^{\delta^j}, e^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$ *для каждого набора исходных данных* $(\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{I}^{\delta^j}, e^{\delta^j})$, *удовлетворяющих оценкам* (2.1) *леммы* 1 *при* $\delta = \delta^j$, *является МПР-образующим в смысле определения* 3, *а в случае субдифференцируемости* $\mathbf{J}_0^0$ *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (2.9). *Если же этой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, гарантирована лишь слабая сходимость* $u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$ *к* $u^0$ *при* $\delta^j \to 0$, $j \to \infty$.

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, что выпуклая задача $(P^0)$, все функционалы которой непрерывны, разрешима в силу существования МПР и ограниченности $\mathcal{D}$. Поэтому соотношения (2.7), (2.8), (2.10) следуют из теоремы 1.

Для доказательства достаточности заметим, что выпуклая задача $(P^0)$, все функционалы которой непрерывны, разрешима благодаря включениям (2.8) и ограниченности последовательности $u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$, $j = 0, 1, \ldots$. Следовательно, в силу теоремы 1 последовательность $\left\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, итерационного процесса (2.4) с условиями согласования (2.5), удовлетворяет, помимо предельных соотношений (2.7) и включений (2.8), еще и предельному соотношению $\mathbf{J}_0^0(u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]) \to \mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j \to \infty$. Поэтому последовательность $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$, $j = 0, 1, \ldots$ является МПР в задаче $(P^0)$, а потому в случае субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ на $\mathcal{D}$ она сходится к $u^0$ в норме $L_2^s$. Одновременно, ввиду ограниченности $\mathcal{D}$, предельного соотношения $\alpha^j \|(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j)\| \to 0$, $j \to \infty$, теоремы 1, условий согласования (2.5) и оценки (2.3), получаем предельное соотношение $V^{\delta^j}(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) - V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \to 0$, $j \to \infty$. Так как при этом, в силу доказанной сходимости $\mathbf{J}_0^0(u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]) \to \mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j \to \infty$, и условия (2.7), имеет место сходимость $V^{\delta^j}(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \to \mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j \to \infty$, то справедливо предельное соотношение (2.10). □

## § 3. Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления распределенными системами

**Переформулировка теорем 1 и 2 в терминах исходной задачи оптимального управления.** Функция Лагранжа задачи оптимального управления $(OC^\delta)$, совпадающая с функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования $(P^\delta)$, имеет вид

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv J_0^\delta[u] + \left\langle \lambda, I^\delta[u] - d^\delta\right\rangle_r + \left\langle \mu, J^\delta[u]\right\rangle_k, \quad u \in L_2^s, \ \lambda \in \mathbf{R}^r, \ \mu \in \mathbf{R}^k_+,$$

где $J^\delta[u] \equiv \left\{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\right\}$, $I^\delta[u] \equiv \left\{I_1^\delta[u], \dots, I_r^\delta[u]\right\}$, $d^\delta \equiv \left\{d_1^\delta, \dots, d_r^\delta\right\}$. Соответственно двойственная к $(OC^\delta)$ задача имеет вид

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k.$$

«Расшифровка» теорем 1 и 2 в терминах задачи оптимального управления $(OC^0)$ приводит соответственно к алгоритму итеративной двойственной регуляризации и регуляризованному принципу Лагранжа в итерационной форме для этой задачи. Пусть последовательность $\left\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, конструируется по итерационному правилу (2.4) с $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda, \mu) \equiv \left\{I^\delta\left[u^\delta[\lambda, \mu]\right] - d^\delta, J^\delta\left[u^\delta[\lambda, \mu]\right]\right\}$ и с условиями согласования (2.5).

**Теорема 3** (итеративная двойственная регуляризация в задаче оптимального управления $(OC^0)$). *Пусть $u^0$ — решение задачи $(OC^0)$ и выполняются условия (2.5). Тогда*

$$\alpha^j \left\|\left\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right\}\right\| \to 0, \;\; J_0^0\left[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]\right] \to J_0^0\left[u^0\right], \quad I^0\left[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]\right] \to d^0 \;\; \textit{при} \;\; j \to \infty,$$

*и существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varkappa^j\}_{j=1}^\infty$, что $J_i^0\left[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]\right] \leqslant \varkappa^j$ $(i = 1, \dots, k)$, $j = 1, 2, \dots$. При дополнительном условии субдифференцируемости $J_0^0$ (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$ выполняется предельное соотношение*

$$\left\|u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] - u^0\right\|_{2,s} \to 0 \;\; \textit{при} \;\; j \to \infty. \tag{3.1}$$

*Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к $(OC^0)$ задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathsf{f}^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$ для каждого набора исходных данных $\mathsf{f}^{\delta^j}$, удовлетворяющих оценкам (1.5), (1.6) при $\delta = \delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 1, причем, в случае субдифференцируемости $J_0^0$ в точках $\mathcal{D}$, имеет место и сильная сходимость (3.1); если такой субдифференцируемости нет, то, вообще говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$ к $u^0$ при $\delta^j \to 0$, $j \to \infty$. Кроме того, справедливы предельные соотношения*

$$\left\langle \bar{\mu}^j, J^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]\right]\right\rangle_k + \left\langle \bar{\lambda}^j, I^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]\right] - d^{\delta^j}\right\rangle_r \to 0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty,$$
$$V^0\left(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right) \to \sup_{(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0\left[u^0\right] \quad \textit{при} \quad j \to \infty.$$

**Теорема 4** (регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи $(OC^0)$). *Для существования МПР в задаче $(OC^0)$ необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\left\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right\} \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$, $j = 0, 1, \dots$, порождаемой итерационным процессом (2.4) с $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda, \mu) \equiv \left\{I^\delta\left[u^\delta[\lambda, \mu]\right] - d^\delta, J^\delta\left[u^\delta[\lambda, \mu]\right]\right\}$ и с условиями согласования (2.5), выполнялось предельное соотношение*

$$\left\langle \bar{\lambda}^j, I^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]\right] - d^{\delta^j}\right\rangle_r + \left\langle \bar{\mu}^j, J^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]\right]\right\rangle_k \to 0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty, \tag{3.2}$$

*и нашлась стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$ такая, что*

$$u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \epsilon^j}, \quad j = 0, 1, \dots. \tag{3.3}$$

*В этом случае последовательность $u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right]$, $j = 0, 1, \dots$, есть МПР задачи $(OC^0)$ и, вне зависимости от того, разрешима двойственная к $(OC^0)$ задача или нет, при субдифференцируемости $J_0^0$ на $\mathcal{D}$, имеет место сходимость в $L_2^s$ :*

$$u^{\delta^j}\left[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\right] \to u^0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty. \tag{3.4}$$

*Одновременно и* $V^0(\bar\lambda^j,\bar\mu^j) \to \sup\limits_{(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+} V^0(\lambda,\mu) = J_0^0[u^0]$ *при* $j\to\infty$. *Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* $(OC^0)$ *задача, алгоритм* $R(\cdot,\delta^j)$*, задаваемый равенством* $R(\mathrm{f}^{\delta^j},\delta^j) = u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ *для каждого набора исходных данных* $\mathrm{f}^{\delta^j}$*, удовлетворяющих оценкам* (1.5), (1.6) *при* $\delta=\delta^j$*, является МПР-образующим в смысле определения* 1*, причем в случае субдифференцируемости* $J_0^0$ *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (3.4). *Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости* $u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ *к* $u^0$ *при* $\delta^j\to 0,\ j\to\infty$.

В случае субдифференцируемости $J_0^0$ на D, пользуясь свойством компактности единичной сферы $\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k$ и переходя очевидным образом к пределу при $j\to\infty$ в соотношениях (3.2), (3.3), получаем для задачи $(OC^0)$ (как следствие теоремы 4) следующее КУО в форме недифференциального принципа Лагранжа.

**Следствие 1.** *Если* $u^0\in\mathcal{D}^0$ *оптимальное управление для* $(OC^0)$*, то существует невырожденный набор множителей Лагранжа* $\{\nu,\lambda,\mu\}$*,* $\nu\geqslant 0,\ \lambda\in\mathbf{R}^r,\ \mu\in\mathbf{R}^k_+$*, такой что*

$$\nu J_0^0[u^0] + \left\langle \lambda, I^0[u^0]-d^0\right\rangle_r + \left\langle \mu, J^0[u^0]\right\rangle_k \leqslant \nu J_0^0[u] + \left\langle \lambda, I^0[u]-d^0\right\rangle_r + \left\langle \mu, J^0[u]\right\rangle_k \quad \forall\, u\in\mathcal{D},$$
$$\mu_i J_i^0[u^0] = 0 \ \ (i=1,\ldots,k).$$

**О минимизации функции Лагранжа.** Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближенного решения задачи $(OC^0)$, а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимизации является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^\delta(u,\lambda,\mu)$, $\{\lambda,\mu\}\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+$, задачи $(OC^\delta)$

$$L^\delta(u,\lambda,\mu) \ \to\ \min,\quad u(.)\in\mathcal{D}, \tag{3.5}$$

решение которой мы обозначили через $u^\delta[\lambda,\mu]$. От «качества» решения этой «простейшей» задачи напрямую зависит и «качество» решения исходной задачи $(OC^0)$ на основе регуляризованных КУО. Предположим для упрощения изложения, что при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ функционалы $K^\delta[z]\colon L_2^m\to\mathbf{R}$, $M^\delta[u]\colon L_2^s\to\mathbf{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]\colon L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$ $(i=1,\ldots,k)$ дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ дифференцируемы по Фреше функционалы $\mathbf{J}_i^\delta[u]\colon L_2^s\to\mathbf{R}$ $(i=0,1,\ldots,k)$ и функционал Лагранжа $L^\delta(u,\lambda,\mu)$. В этом случае решение $u^\delta[\lambda,\mu]$ выпуклой задачи на минимум (3.5) удовлетворяет критерию минимума

$$L^{\delta\,/}_{\ u}\left(u^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu\right)\left[u-u^\delta[\lambda,\mu]\right]\geqslant 0,\qquad u\in\mathcal{D}, \tag{3.6}$$

где $L^{\delta\,/}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)\,[.]$ — производная Фреше функционала $L^\delta(u,\lambda,\mu)$ по переменной $u$ в точке $\bar u\in L_2^s$ при фиксированных $\lambda$, $\mu$. Пусть $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](.)\in L_2^s$ — функция Рисса линейного непрерывного функционала $L^{\delta\,/}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)\,[.]\in(L_2^s)^*$. Критерий (3.6) можно записать как

$$\left\langle \Psi^\delta[u^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu],u-u^\delta[\lambda,\mu]\right\rangle_{2,s}\geqslant 0,\qquad u\in\mathcal{D}. \tag{3.7}$$

Найдем представление функции $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t), t\in\Pi$, в терминах задачи $(OC^\delta)$, $\delta>0$, а точнее — в терминах уравнения (1.7) и функционалов $K^\delta[z]$, $M^\delta[u]$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]$ $(i=1,\ldots,k)$, $\mathcal{I}_j^\delta[z,u]$ $(j=1,\ldots,r)$, $\delta>0$. Непосредственно из (1.8), (1.10) и (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} L^{\delta\,/}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)\,[v] &= K^{\delta\,/}_{\ z}\left(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta\right)S^\delta B^\delta\,[v] + M^{\delta\,/}_{\ u}(\bar u)\,[v] + \\ &+\sum_{i=1}^k \mu_i \mathcal{J}^{\delta\,/}_{i\ z}\left(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u\right)S^\delta B^\delta\,[v] + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathcal{J}^{\delta\,/}_{i\ u}\left(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u\right)[v] + \\ &+\sum_{i=1}^r \lambda_i\left\langle a_i^\delta, S^\delta B^\delta v\right\rangle_{2,m} + \sum_{i=1}^r \lambda_i\left\langle b_i^\delta, v\right\rangle_{2,s},\qquad v\in L_2^s,\ \ \bar u\in L_2^s. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть $\Gamma^\delta[\bar u](.) \in L_2^m$, $\Upsilon^\delta[\bar u](.) \in L_2^s$, $\Theta_i^\delta[\bar u](.) \in L_2^m$, $\Xi_i^\delta[\bar u](.) \in L_2^s$, $\Lambda_j^\delta(.) \in L_2^m$ — функции Рисса, соответственно, функционалов $K^{\delta/}_{\ z}\left(S^\delta B^\delta \bar u + S^\delta c^\delta\right) S^\delta \in (L_2^m)^*$, $M^{\delta/}_{\ u}(\bar u) \in (L_2^s)^*$, $\mathcal{J}^{\delta/}_{i\ z}\left(S^\delta B^\delta \bar u + S^\delta c^\delta, \bar u\right) S^\delta \in (L_2^m)^*$, $J^{\delta/}_{i\ u}\left(S^\delta B^\delta \bar u + S^\delta c^\delta, \bar u\right) \in (L_2^s)^*$, $\left\langle a_j^\delta, S^\delta[.]\right\rangle_{2,m} \in (L_2^m)^*$ $(i = 1,\ldots,k,\ j = 1,\ldots,r)$. Формулу (3.8) перепишем следующим образом:

$$L^{\delta/}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)[v] = -\left\langle \psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\ ,\ B^\delta[v]\right\rangle_{2,m} + \left\langle \phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\ ,\ v\right\rangle_{2,s}, \qquad v \in L_2^s, \tag{3.9}$$

$$\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu] \equiv -\Gamma^\delta[\bar u] - \sum_{i=1}^k \mu_i \Theta_i^\delta[\bar u] - \sum_{j=1}^r \lambda_j \Lambda_j^\delta\ , \tag{3.10}$$

$$\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu] \equiv \Upsilon^\delta[\bar u] + \sum_{i=1}^k \mu_i \Xi_i^\delta[\bar u] + \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j^\delta. \tag{3.11}$$

Пусть $\Phi^\delta[\bar u](.) \in L_2^m$ и $\Omega_i^\delta[\bar u](.) \in L_2^m$ — функции Рисса, соответственно, функционалов $K^{\delta/}_{\ z}\left(S^\delta B^\delta \bar u + S^\delta c^\delta\right) \in (L_2^m)^*$ и $\mathcal{J}^{\delta/}_{i\ z}\left(S^\delta B^\delta \bar u + S^\delta c^\delta, \bar u\right) \in (L_2^m)^*$ $(i = 1,\ldots,k)$. По определению сопряженного оператора имеем: $\Gamma^\delta[\bar u] = \left(S^\delta\right)^* \Phi^\delta[\bar u]$, $\Theta_i^\delta[\bar u] = \left(S^\delta\right)^* \Omega_i^\delta[\bar u]$ $(i = 1,\ldots,k)$, $\Lambda_j^\delta = \left(S^\delta\right)^* a_j^\delta$ $(j = 1,\ldots,r)$. Так как $\left(S^\delta\right)^* \equiv \left(\left(E - A^\delta\right)^{-1}\right)^* = \left(\left(E - A^\delta\right)^*\right)^{-1} = \left(E - \left(A^\delta\right)^*\right)^{-1}$, где $E$ — единичный оператор в $L_2^m$, то определяемая формулой (3.10) функция $\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ есть (единственное в $L_2^m$) решение уравнения

$$\psi(t) - \left(A^\delta\right)^*[\psi](t) = -\Phi^\delta[\bar u](t) - \sum_{i=1}^k \mu_i \Omega_i^\delta[\bar u](t) - \sum_{j=1}^r \lambda_j a_j^\delta(t), \qquad t \in \Pi, \qquad \psi \in L_2^m, \tag{3.12}$$

правая часть которого записана в терминах задачи $(OC^\delta)$. Таким образом, из (3.9) получаем такое представление производной $L^{\delta/}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)$ в терминах этой задачи:

$$L^{\delta/}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)[v] = \left\langle -\left(B^\delta\right)^*\left[\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\right] + \phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\ ,\ v\right\rangle_{2,s}, \qquad v \in L_2^s. \tag{3.13}$$

Первый сомножитель правой части (3.13) и дает искомое представление $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$:

$$\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t) = -\left(B^\delta\right)^*\left[\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\right](t) + \phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t), \quad t \in \Pi, \tag{3.14}$$

где $\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ — $L_2^m$-решение (3.12), $\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ задается формулой (3.11), $\bar u \in L_2^s$.

**Случай ограниченных управлений.** Пусть $\mathcal{D} \equiv \{u(.) \in L_\infty^s : u(t) \in U,\ t \in \Pi\}$), где $U \subset \mathbf{R}^s$ — ограниченное замкнутое и выпуклое множество. В этом случае критерий (3.7) эквивалентен следующему линеаризованному поточечному принципу максимума.

**Лемма 4.** *Функция $\bar u \in \mathcal{D}$ будет решением задачи* (3.5) *тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle \Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t), \bar u(t)\right\rangle_s = \max_{w\in U}\left\langle \Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t), w\right\rangle_s \ \text{ при почти всех } \ t \in \Pi, \tag{3.15}$$

*где $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ задается формулой* (3.14)*, в которой $\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ — решение сопряженного уравнения* (3.12)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость доказывается простейшим игольчатым варьированием, а достаточность — стандартным применением теоремы А. А. Ляпунова (см., например, [17, § 2.4, § 8.2]). □

Благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество управлений $\bar u(.)$ из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных предположениях дифференцируемости) условию (3.15), состоит ровно из одного элемента, обозначим его $u_m^\delta[\lambda,\mu]$, и $u_m^\delta[\lambda,\mu] = u^\delta[\lambda,\mu]$. То есть непосредственно из теоремы 4 и леммы 4 получаем следующий регуляризованный ПМП в итерационной форме для задачи $(OC^0)$.

**Теорема 5** (регуляризованный ПМП в итерационной форме для задачи оптимального управления $(OC^0)$). *При сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости все утверждения теоремы 4 останутся справедливыми, если в них заменить везде* $u^{\delta j}\left[\bar{\lambda}^j,\bar{\mu}^j\right]$ *на* $u_m^{\delta j}\left[\bar{\lambda}^j,\bar{\mu}^j\right]$.

## § 4. Иллюстративный пример: регуляризация классических условий оптимальности в задаче оптимизации для гиперболической системы

Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению второго рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью функциональных уравнений вольтеррова типа можно найти, например, в [10] (см. также обзоры и библиографию в [10, 14, 15]). Из огромного множества самых различных соответствующих оптимизационных задач для иллюстрации изложенной выше теории нами выбрана задача оптимального управления, связанная с гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка. Мы выпишем для нее те основные конструкции, которые и участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция, сопряженное уравнение, …). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО — конкретные реализации теорем 3, 4, 5 читателю будет совсем нетрудно.

Пусть $n=2$, $\Pi=[0,1]\times[0,1]$; $\xi^i>0\,(i=1,2,\dots,m)$ — заданные числа; $\alpha(.)\in L_\infty^{m\times m}$, $\gamma(.)\in L_\infty^{m\times s}$, $\theta_j(.)\in L_2^m[0,1]$ $(j=1,2)$ — фиксированные функции. Рассмотрим краевую задачу для управляемой линейной гиперболической системы первого порядка

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^1}+\xi^i\frac{\partial x^i}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^m\alpha_{ij}(t)x^j(t)+\sum_{j=1}^s\gamma_{ij}(t)u^j(t),\quad t\in\Pi,\quad i=1,2,\dots,m,\tag{4.1}$$

$$x(t^1,0)=\theta_1(t^1),\ 0\leqslant t^1\leqslant 1;\quad x(0,t^2)=\theta_2(t^2),\ 0\leqslant t^2\leqslant 1,\tag{4.2}$$

где $u(.)\in L_2^s$ — управление. Левую часть $i$-го уравнения (4.1) понимаем как полную производную функции $x^i(.)$ по $t^1$ вдоль характеристики $l_i$ дифференциального выражения этой левой части; такую производную обозначаем $\partial x^i(.)/\partial l_i$ $(i=1,\dots,m)$. Пусть $W$ — класс функций $x(.)$ из $L_2^m$, у которых при любом $i=1,\dots,m$ компонента $x^i(.)$ абсолютно непрерывна вдоль почти каждой в $\Pi$ характеристики $l_i$ и (перебирая все такие характеристики, имеем) $\partial x^i/\partial l_i\in L_2$.

Назовем решением задачи (4.1)–(4.2) при данном $u(.)$ функцию $x(.)$ из $W$, удовлетворяющую почти всюду граничным условиям (4.2), $i$-я компонента которой удовлетворяет $i$-му уравнению (4.1) почти всюду (по линейной мере) вдоль почти каждой в $\Pi$ характеристики $l_i$, $i=1,2,\dots,m$. Приведем задачу (4.1)–(4.2) к эквивалентному уравнению вида (1.1), показав тем самым, что каждому $u(.)\in L_2^s$ отвечает единственное решение этой задачи. Введем обозначения: $l_i(\bar{t})$ — характеристика $l_i$, проходящая через точку $\bar{t}\in\Pi$; $a_i(\bar{t})$ (соответственно, $b_i(\bar{t})$) — точка из $l_i(\bar{t})\cap\Pi$, имеющая минимальную (соответственно, максимальную) координату $t^1$; $t^2=\eta^i(\bar{t};t^1)\equiv\xi^i(t^1-\bar{t}^1)+\bar{t}^2$ — уравнение $l_i(\bar{t})$; $\Theta^i(t)\equiv\{\theta_2^i(a_i^2(t))$, если $t^2\geqslant\xi^i t^1$; $\theta_1^i(a_i^1(t))$, если $t^2<\xi^i t^1\}$, $i=1,2,\dots,m$; $\Theta(t)\equiv\operatorname{col}\{\Theta^1(t),\dots,\Theta^m(t)\}$; $l_i[c,t]$ — направленный отрезок прямой $l_i(t)$ от $c\in l_i(t)$ до $t$; $\displaystyle\int_{l_i[c,t]}y(.)\,dl$ — криволинейный интеграл от функции двух переменных $y(.)$, равный определенному интегралу $\int_{c^1}^{t^1} y(\xi, \eta^i(t;\xi))\,d\xi$. Формула

$$x^i(t) = \Theta^i(t) + \int\limits_{l_i[a_i(t),t]} z^i(.)\,dl, \quad t \in \Pi, \quad i = 1,2,\ldots,m, \tag{4.3}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом $L_2^m$ функций $z(.)$ и классом удовлетворяющих граничным условиям (4.2) функций $x(.)$ из $W$. Сделав в (4.1)–(4.2) замену (4.3), получаем:

$$z^i(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(t)\Sigma_j\left[z^j\right](t) + \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij}(t)u^j(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(t)\Theta^j(t), \;\; t \in \Pi, \;\; i = 1,2,\ldots,m,$$

где $\Sigma_j\left[y\right](t) \equiv \int_{l_j[a_j(t),t]} y(.)\,dl, \; t \in \Pi, \quad j = 1,2,\ldots,m$. Или, в более компактной записи,

$$z(t) = \alpha(t)\Sigma\left[z\right](t) + \gamma(t)u(t) + \alpha(t)\Theta(t), \quad t \in \Pi, \tag{4.4}$$

где $\Sigma\left[z\right](t) \equiv \mathrm{col}\left\{\Sigma_1\left[z^1\right](t),\ldots,\Sigma_m\left[z^m\right](t)\right\}$. Запишем и (4.3) более компактно:

$$x(t) = \Theta(t) + \Sigma[z](t), \quad t \in \Pi. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.4) и есть уравнение вида (1.1), эквивалентное краевой задаче (4.1)–(4.2). Здесь: $A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma\left[z\right](t)$, $z(.) \in L_2^m$, $t \in \Pi$ (квазинильпотентность ЛОО $A[.]\colon L_2^m \to L_2^m$ легко следует из признака [11]); $B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t)$, $u(.) \in L_2^s$, $t \in \Pi$; $c(t) \equiv \alpha(t)\Theta(t)$, $t \in \Pi$. Если $x(.) \in W$ — решение задачи (4.1)–(4.2) при некотором $u(.) \in L_2^s$, то связанная с $x(.)$ формулой (4.5) функция $z(.) \in L_2^m$ есть решение уравнения (4.4) при том же $u(.)$. И наоборот, если $z(.) \in L_2^m$ — решение уравнения (4.4) при данном $u(.) \in L_2^s$, то функция $x(.)$, связанная с $z(.)$ формулой (4.5), есть решение задачи (4.1)–(4.2) при этом $u(.)$. Отвечающие управлению $u(.) \in L_2^s$ решения задачи (4.1)–(4.2) и уравнения (4.4) обозначим $x_u$ и $z_u$ соответственно.

Пусть заданы: выпуклые функции $G_0(y)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $G_i(y,w)\colon \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,k$; функции $\mathbf{a}_j(.) \in L_2^m$ и $\mathbf{b}_j(.) \in L_2^s$, действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j = 1,\ldots,r$, Формулами $F_0[x,u] \equiv G_0\left(\int_\Pi x(t)\,dt\right) + \|u\|_{2,s}^2$, $F_i[x,u] \equiv G_i\left(\int_\Pi x(t)\,dt, \int_\Pi u(t)\,dt\right)$, $Q_j[x,u] \equiv \equiv \langle \mathbf{a}_j(.), x(.)\rangle_{2,m} + \langle \mathbf{b}_j(.), u(.)\rangle_{2,s}$ при $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,r$, для $x \in W$, $u \in L_2^s$ определены функционалы. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства $L_2^s$. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (4.1)–(4.2) с минимизируемым функционалом цели $F_0[x,u]$ при функциональных ограничениях

$$F_1[x,u] \leqslant 0, \;\; \ldots, \;\; F_k[x,u] \leqslant 0, \;\; Q_1[x,u] = \mathbf{d}_1, \;\; \ldots, \;\; Q_r[x,u] = \mathbf{d}_r, \;\; x \in W, \;\; u \in L_2^s, \tag{4.6}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u,u] \to \min, \;\; F_i[x_u,u] \leqslant 0 \;(i = 1,\ldots,k), \;\; Q_j[x_u,u] = \mathbf{d}_j \;(j = 1,\ldots,r), \;\; u \in \mathcal{D}. \tag{4.7}$$

Сделав в задаче (4.7) замену (4.5), получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы (4.4). При этом минимизируемый функционал принимает вид $W_0[z_u,u] \equiv \equiv F_0[\Theta + \Sigma[z_u], u]$, $u(.) \in L_2^s$, а ограничения (4.6) преобразуются в ограничения

$$W_1[z,u] \leqslant 0, \;\; \ldots, \;\; W_k[z,u] \leqslant 0, \;\; E_1[z,u] = d_1, \;\; \ldots, \;\; E_r[z,u] = d_r, \;\; z \in L_2^m, \;\; u \in L_2^s,$$

где $W_i[z,u] \equiv F_i[\Theta + \Sigma[z], u]$ $(i = 1,\dots,k)$ — выпуклые функционалы на $L_2^m \times L_2^s$, $E_j[z,u] \equiv \langle \mathbf{a}_j, \Sigma[z]\rangle_{2,m} + \langle \mathbf{b}_j, u\rangle_{2,s}$ $(j = 1,\dots,r)$ — линейные функционалы на $L_2^m \times L_2^s$, $d_j \equiv \mathbf{d}_j - \langle \mathbf{a}_j, \Theta\rangle_{2,m}$ $(j = 1,\dots,r)$. Полученную задачу оптимизации управляемой системы (4.4), эквивалентную задаче (4.7), запишем в виде

$$W_0[z_u,u] \to \min,\ W_i[z_u,u] \leqslant 0\ (i = 1,\dots,k),\ E_j[z_u,u] = d_j\ (j = 1,\dots,r),\ u \in \mathcal{D}.$$

Это задача вида (1.4), здесь $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u,u] \equiv W_i[z_u,u]$ $(i = 0,1,\dots,k)$, $I_j[u] \equiv \mathcal{I}_j[z_u,u] \equiv$ $\equiv E_j[z_u,u]$ $(j = 1,\dots,r)$, $K[z] \equiv G_0\left(\int_\Pi (\Theta(t) + \Sigma[z](t))\,dt\right)$, $M[u] \equiv \|u\|_{2,s}^2$.

Пусть $\mathsf{f} \equiv \{\alpha, \gamma, \theta_1, \theta_2, G_i\ (i = 0,1,\dots,k);\ \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j, \mathbf{d}_j\ (j = 1,\dots,r)\}$ — набор входных данных задачи (4.7), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор $\mathsf{f}^0 \equiv$ $\equiv \{\alpha^0, \gamma^0, \theta_1^0, \theta_2^0, G_i^0\ (i = 0,1,\dots,k);\ \mathbf{a}_j^0, \mathbf{b}_j^0, \mathbf{d}_j^0\ (j = 1,\dots,r)\}$ нам неизвестен, но можно оперировать с приближенными наборами $\mathsf{f}^\delta \equiv \{\alpha^\delta, \gamma^\delta, \theta_1^\delta, \theta_2^\delta, G_i^\delta\ (i = 0,1,\dots,k);\ \mathbf{a}_j^\delta, \mathbf{b}_j^\delta, \mathbf{d}_j^\delta$ $(j = 1,\dots,r)\}$, $\delta \in (0,\delta_0]$ ($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором $\mathsf{f}^0$ следующими условиями $\Gamma_1$)–$\Gamma_3$).

$\Gamma_1$) функции $G_0^\delta(y)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ и $G_i^\delta(y,w)\colon \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0,\delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0,\delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве[5];

$\Gamma_2$) существует постоянная $\mathbf{C} > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0,\delta_0]$ величины

$$\left\|\alpha^\delta - \alpha^0\right\|_{\infty,m\times m};\quad \left\|\gamma^\delta - \gamma^0\right\|_{\infty,m\times s};\quad \left\|\theta_i^\delta - \theta_i^0\right\|_{L_2^m[0,1]}\ \ (i = 1,\dots,m);$$
$$\left\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\right\|_{2,m},\quad \left\|\mathbf{b}_j^\delta - \mathbf{b}_j^0\right\|_{2,s},\quad \left|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0\right|\quad (j = 1,\dots,r)$$

не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$;

$\Gamma_3$) существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(.)\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0,\delta_0]$ величины $\left|G_0^\delta(y) - G_0^0(y)\right|$, $\left|G_i^\delta(y,w) - G_i^0(y,w)\right|$ $(i = 1,\dots,k)$ при $\|y\|_m, \|w\|_s \leqslant l$ не превосходят величины $\mathbf{N}_1(l)\delta$.

При любом $\delta \in [0,\delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial x^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^\delta(t) x^j(t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}^\delta(t) u^j(t),\quad t \in \Pi,\quad i = 1,2,\dots,m, \tag{4.8}$$

$$x(t^1,0) = \theta_1^\delta(t^1),\ 0 \leqslant t^1 \leqslant 1;\quad x(0,t^2) = \theta_2^\delta(t^2),\ 0 \leqslant t^2 \leqslant 1, \tag{4.9}$$

минимизируемый функционал $F_0^\delta[x,u] \equiv G_0^\delta\left(\int_\Pi x(t)\,dt\right) + \|u\|_{2,s}^2$, набор ограничений

$$\begin{gathered} F_1^\delta[x,u] \leqslant 0,\quad \dots,\quad F_k^\delta[x,u] \leqslant 0,\quad Q_1^\delta[x,u] = \mathbf{d}_1^\delta,\quad \dots,\\ Q_r^\delta[x,u] = \mathbf{d}_r^\delta,\quad x \in W,\quad u \in L_2^s, \end{gathered} \tag{4.10}$$

где

$$F_i^\delta[x,u] \equiv G_i^\delta\left(\int_\Pi x(t)\,dt, \int_\Pi u(t)\,dt\right),$$
$$Q_j^\delta[x,u] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta(.)\,,\, x(.)\right\rangle_{2,m} + \left\langle \mathbf{b}_j^\delta(.)\,,\, u(.)\right\rangle_{2,s}\quad (i = 1,\dots,k,\quad j = 1,\dots,r),$$

и задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} F_0^\delta[x_u^\delta,u] \to \min,\quad F_i^\delta[x_u^\delta,u] \leqslant 0\ (i = 1,\dots,k),\\ Q_j^\delta[x_u^\delta,u] = \mathbf{d}_j\ (j = 1,\dots,r),\quad u \in \mathcal{D}, \end{gathered} \tag{4.11}$$

[5]Условие $\Gamma_1$) выполняется, в частности, если выпуклые функции $G_i^\delta$ $(i = 0,1,\dots,k)$ равномерно по $\delta \in$ $\in [0,\delta_0]$ ограничены на любом ограниченном множестве (см., например, [18, теорема 8.2]).

где $x_u^\delta(.)$ — отвечающее управлению $u(.)$ решение начальной задачи (4.8)–(4.9)

Положим: $\Theta^{\delta i}(t) \equiv \left\{\theta_2^{\delta i}(a_i^2(t)),\ t^2 \geqslant \xi^i t^1;\ \theta_1^{\delta i}(a_i^1(t)),\ t^2 < \xi^i t^1\right\}$, $t \in \Pi$, $i = 1, \ldots, m$. Сделав в задаче (4.11) замену $x(t) = \Theta^\delta(t) + \Sigma[z](t)$, $\Theta^\delta(t) \equiv \operatorname{col}\left\{\Theta^{\delta 1}(t), \ldots, \Theta^{\delta m}(t)\right\}$, $t \in \Pi$, получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы

$$z(t) = \alpha^\delta(t)\Sigma\left[z\right](t) + \gamma^\delta(t)u(t) + \alpha^\delta(t)\Theta^\delta(t), \quad t \in \Pi. \tag{4.12}$$

При этом ограничения (4.10) преобразуются в ограничения

$$W_1^\delta[z,u] \leqslant 0,\ \ \ldots,\ \ W_k^\delta[z,u] \leqslant 0,\ E_1^\delta[z,u] = d_1^\delta,\ \ \ldots,\ \ E_r^\delta[z,u] = d_r^\delta,\ z \in L_2^m,\ u \in L_2^s,$$

где $W_i^\delta[z,u] \equiv F_i^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z], u]$ $(i = 1, \ldots, k)$ — выпуклые функционалы на $L_2^m \times L_2^s$, $E_j^\delta[z,u] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, \Sigma[z]\right\rangle_{2,m} + \left\langle \mathbf{b}_j^\delta, u\right\rangle_{2,s}$ $(j = 1, \ldots, r)$ — линейные функционалы на $L_2^m \times L_2^s$, $d_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, \Theta^\delta\right\rangle_{2,m}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Эту задачу оптимизации управляемой системы (4.12) запишем в виде ($z_u^\delta$ — решение уравнения (4.12), отвечающее управлению $u$)

$$W_0^\delta[z_u^\delta, u] \to \min,\ W_i[z_u^\delta, u] \leqslant 0\ (i = 1, \ldots, k),\ E_j[z_u^\delta, u] = d_j^\delta\ (j = 1, \ldots, r),\ u \in \mathcal{D}, \tag{4.13}$$

где $W_0^\delta[z,u] \equiv F_0^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z], u]$. Приняв $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma[z](t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_2^m$; $B^\delta[u](t) \equiv \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $t \in \Pi$, $u \in L_2^s$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\Theta^\delta(t)$, $t \in \Pi$, переписываем (4.12) в форме (1.7). Таким образом, задача (4.13) имеет вид $(OC^\delta)$, здесь

$$J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta, u]\ \ (i = 0, 1, \ldots, k),\ \ I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] \equiv E_j^\delta[z_u^\delta, u]\ \ (j = 1, \ldots, r),$$

$$K^\delta[z] \equiv G_0^\delta\left(\int_\Pi \left(\Theta^\delta(t) + \Sigma[z](t)\right)\, dt\right),\ \ M^\delta \equiv M.$$

При сделанных относительно семейства задач (4.11), $\delta \in [0, \delta_0]$, предположениях семейство задач (4.13), $\delta \in [0, \delta_0]$, обладает свойствами Л), $A_1$), $A_2$). Действительно, свойство Л) — прямое следствие предположений $\Gamma_1$)–$\Gamma_3$), а неравенства $A_1$) получаются элементарными выкладками из $\Gamma_2$). Чтобы доказать $A_2$), оценим величину $\left|J_i^\delta[z,u] - J_i^0[z,u]\right| \equiv \equiv \left|W_i^\delta[z,u] - W_i^0[z,u]\right|$ при произвольных $u \in \mathcal{D}$, $l > 0$ и $z \in L_2^m$ таких, что $\|z\|_{2,m} \leqslant l$, для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$. Она не превосходит суммы

$$\left|F_i^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z], u] - F_i^0[\Theta^\delta + \Sigma[z], u]\right| + \left|F_i^0[\Theta^\delta + \Sigma[z], u] - F_i^0[\Theta + \Sigma[z], u]\right|. \tag{4.14}$$

Вследствие $\Gamma_2$) справедлива оценка

$$\left\|\int_\Pi \left(\Theta^\delta + \Sigma[z]\right) dt\right\|_m \leqslant \nu \cdot \left(2\mathbf{C}\delta_0 + \left\|\theta_1^0\right\|_{L_2^m[0,1]} + \left\|\theta_2^0\right\|_{L_2^m[0,1]}\right) + l \cdot \|\Sigma\|, \tag{4.15}$$

где $\|\Sigma\|$ — норма ЛОО $\Sigma\colon L_2^m \to L_2^m$, $\nu \equiv \nu\left(\xi^1, \ldots, \xi^m\right)$ — постоянная, зависящая от чисел $\xi^i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Из этой оценки и условия $\Gamma_3$) следует, что первое слагаемое (4.14) не превосходит величины $\delta \cdot \mathbf{N}_1\left(\max\left\{\sigma, \max_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}\right\}\right)$, где $\sigma \equiv \sigma\left(\xi_1, \ldots, \xi_m, \mathbf{C}, \delta_0, \theta_1^0, \theta_2^0, l\right)$ — правая часть неравенства (4.15). Так как функция $G_i^0$ липшицева на любом ограниченном множестве, то существует неубывающая $\mu(.)\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что

$$\left|G_i^0(y_1, w_1) - G_i^0(y_2, w_2)\right| \leqslant \mu(\mathbf{l})\left(\|y_1 - y_2\|_m + \|w_1 - w_2\|_s\right),$$

если $\|y_1\|_m \leqslant \mathbf{l}$, $\|y_2\|_m \leqslant \mathbf{l}$, $\|w_1\|_s \leqslant \mathbf{l}$, $\|w_2\|_s \leqslant \mathbf{l}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Ввиду (4.15) второе слагаемое правой части (4.14) не больше произведения

$$\mu\left(\max\left\{\sigma, \max_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}\right\}\right) \cdot \left\|\int_\Pi \left(\Theta^\delta - \Theta^0\right)\, dt\right\|_m,$$

второй сомножитель которого не превосходит числа $2\mathbf{C}\delta \cdot \nu(\xi^1, \dots, \xi^m)$. Таким образом, неравенства условия $A_2$) для функционалов $\mathcal{J}_1^\delta, \dots, \mathcal{J}_k^\delta$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, выполняются с функцией $N_1(l) \equiv 2\mathbf{C}\cdot\nu(\xi^1, \dots, \xi^m)\cdot\mu(\max\{\sigma(\xi_1, \dots, \xi_m, \mathbf{C}, \delta_0, \theta_1^0, \theta_2^0, l), l\})$, $l > 0$. Аналогичные выкладки можно провести и для функционалов $K^\delta$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

Предположив дополнительно, что функции $G_i^\delta$, $i = 0, 1, \dots, k$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, непрерывно дифференцируемы, можем выписать для данного примера критерий решения задачи (3.5). Сопряженный к оператору $\Sigma\colon L_2^m \to L_2^m$ оператор $\Sigma^*\colon L_2^m \to L_2^m$ имеет вид: $\Sigma^*[z] \equiv \mathrm{col}\{\Sigma_1^*[z^1], \dots, \Sigma_m^*[z^m]\}$, где $\Sigma_j^*[y](t) \equiv \int_{l_j[t, b_j(t)]} y(.)\, dl$, $t \in \Pi$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Введем обозначения: $\nu_\delta(\bar{u}) \equiv \int_\Pi x_{\bar{u}}^\delta(\zeta)\, d\zeta$, $\nu(\bar{u}) \equiv \int_\Pi \bar{u}(\zeta)\, d\zeta$. Непосредственно вычисляя, получаем:

$$\Phi^\delta[\bar{u}](t) \equiv \Sigma^*\left[\left\{G_0^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u}))\right\}^*\right](t), \quad \Upsilon^\delta[\bar{u}](t) \equiv 2\bar{u}(t),$$
$$\Omega_i^\delta[\bar{u}](t) \equiv \Sigma^*\left[\left\{G_{iy}^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u}), \nu(\bar{u}))\right\}^*\right](t), \quad (i = 1, \dots, k),$$
$$\Xi_i^\delta[\bar{u}](t) \equiv \left\{G_{iw}^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u}), \nu(\bar{u}))\right\}^* \quad (i = 1, \dots, k), \quad t \in \Pi;$$
$$b_j^\delta \equiv \mathbf{b}_j^\delta \quad (j = 1, \dots, r); \quad a_j^\delta \equiv \Sigma^*\left[\mathbf{a}_j^\delta\right] \quad (j = 1, \dots, r).$$

То есть сопряженное уравнение (3.12) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\psi(t) - \Sigma^*\left[\alpha^{\delta*}\psi\right](t) = -\Sigma^*\left[\left\{G_0^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u}))\right\}^*\right](t) - \\ - \Sigma^*\left[\sum_{j=1}^k \mu_j \left\{G_{jy}^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u}), \nu(\bar{u}))\right\}^* + \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta\right](t), \quad t \in \Pi,\end{gathered} \tag{4.16}$$

и его решение принадлежит классу $W$. Уравнение (4.16) эквивалентно краевой задаче

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial t^1} + \xi^i\frac{\partial\psi^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji}^\delta(t)\psi^j(t) + G_{0y^i}^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u})) + \sum_{j=1}^k \mu_j G_{jy^i}^{\delta\prime}(\nu_\delta(\bar{u}), \nu(\bar{u})) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \left(\mathbf{a}_j^\delta\right)^i(t),$$
$$t \in \Pi, \quad i = 1, \dots, m; \qquad \psi(t^1, 1) = 0_m, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1; \qquad \psi(1, t^2) = 0_m, \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1,$$

основные уравнения которой получаются из (4.16) дифференцированием вдоль характеристик, краевые условия — соответствующими подстановками независимых переменных.

**Финансирование.** Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20–01–00199_а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации: в 2-х книгах. М.: МЦНМО, 2011.
3. Сумин М. И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615. https://elibrary.ru/item.asp?id=16766246
4. Sumin M. I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications // Applied Mathematics. 2012. Vol. 3. № 10A. P. 1334–1350. https://doi.org/10.4236/am.2012.330190
5. Сумин М. И. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279–296. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296

6. Сумин М. И. О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 252–269. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269
7. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
9. Сумин М. И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журнал вычислительной математики и матемематической физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625. https://elibrary.ru/item.asp?id=9535238
10. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Нижний Новгород: ННГУ, 1992.
11. Сумин В. И., Чернов А. В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411. http://mi.mathnet.ru/de9796
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
13. Сумин В. И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Доклады АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059. http://mi.mathnet.ru/dan7167
14. Sumin V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
15. Сумин В. И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
16. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении. II. Оптимизация распределенной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 26–41. https://doi.org/10.20537/vm170103
17. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
18. Дмитрук А. В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. М.: МАКС Пресс, 2012.

Поступила в редакцию 30.12.2020

Сумин Владимир Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7479-2181
E-mail: v_sumin@mail.ru

Сумин Михаил Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33;
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобаческого, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: m.sumin@mail.ru

**Цитирование:** В. И. Сумин, М. И. Сумин. Регуляризованные классические условия оптимальности в итерационной форме для выпуклых задач оптимизации распределенных систем вольтеррова типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 265–284.

*V. I. Sumin, M. I. Sumin*

**Regularized classical optimality conditions in iterative form for convex optimization problems for distributed Volterra-type systems**

*Keywords*: convex optimal control, distributed system, functional-operator equation of Volterra type, ill-posedness, iterative regularization, duality, minimizing approximate solution, regularizing operator, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle.

MSC2020: 49K20, 39B22, 49N15, 47A52

DOI: 10.35634/vm210208

We consider the regularization of the *classical optimality conditions* (COCs) — the Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle — in a convex optimal control problem with functional constraints of equality and inequality type. The system to be controlled is given by a general linear functional-operator equation of the second kind in the space $L_2^m$, the main operator of the right-hand side of the equation is assumed to be quasinilpotent. The objective functional of the problem is strongly convex. Obtaining regularized COCs in iterative form is based on the use of the iterative dual regularization method. The main purpose of the regularized Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle obtained in the work in iterative form is stable generation of minimizing approximate solutions in the sense of J. Warga. Regularized COCs in iterative form are formulated as existence theorems in the original problem of minimizing approximate solutions. They "overcome" the ill-posedness properties of the COCs and are regularizing algorithms for solving optimization problems. As an illustrative example, we consider an optimal control problem associated with a hyperbolic system of first-order differential equations.

**Funding.** The study was funded by RFBR, project number 20–01–00199_a.

REFERENCES

1. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal Control*, Springer: Boston, 1987. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7551-1
2. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* (Optimization methods), vols. 1, 2, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011.
3. Sumin M. I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1489–1509. https://doi.org/10.1134/S0965542511090156
4. Sumin M. I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications, *Applied Mathematics*, 2012, vol. 3, no. 10A, pp. 1334–1350. https://doi.org/10.4236/am.2012.330190
5. Sumin M. I. Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 279–296 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296
6. Sumin M. I. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 252–269 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269
7. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York; London: Academic Press, 1972.
Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977.
8. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Solutions of ill-posed problems*, Washington: Winston; New York: Halsted Press, 1977.
9. Sumin M. I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, issue 4, pp. 579–600. https://doi.org/10.1134/S0965542507040045

10. Sumin V. I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University, 1992.
11. Sumin V. I., Chernov A. V. Operators in spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403–1411. https://zbmath.org/?q=an:0958.47014
12. Gokhberg I. Ts., Krein M. G. *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Providence: American Mathematical Society, 1970.
13. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems, *Sov. Math., Dokl.*, 1989, vol. 39, issue 2, pp. 374–378. https://zbmath.org/?q=an:0695.49006
14. Sumin V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
15. Sumin V. I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 262–278 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
16. Kuterin F. A., Sumin M. I. The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. II. Optimization of a distributed system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 26–41 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170103
17. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Theory of extremal problems*, Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979.
18. Dmitruk A. V. *Vypuklyi analiz. Ehlementarnyi vvodnyi kurs* (Convex analysis. Elementary introductory course), Moscow: MAKS Press, 2012.

Received 30.12.2020

Sumin Vladimir Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Nizhnii Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia;
Tambov State University, ul. Internatsionalnaya, 33, Tambov, 392000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7479-2181
E-mail: v_sumin@mail.ru

Sumin Mikhail Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tambov State University, ul. Internatsionalnaya, 33, Tambov, 392000, Russia;
Nizhnii Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: m.sumin@mail.ru

**Citation:** V. I. Sumin, M. I. Sumin. Regularized classical optimality conditions in iterative form for convex optimization problems for distributed Volterra-type systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 265–284.