

УДК 517.983.54

© А. И. Сидикова, А. С. Сушков

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ**

Статья посвящена решению обратной граничной задачи для стержня, состоящего из композиционных материалов. В обратной задаче требуется, используя информацию о температуре теплового потока в разделе сред, определить температуру на одном из концов стержня. В работе представлен метод проекционной регуляризации, который позволил приближенно оценить погрешность полученного решения обратной задачи. Для проверки вычислительной эффективности этого метода были проведены тестовые расчеты.

Ключевые слова: оценка погрешности, модуль условной корректности, преобразование Фурье, некорректная задача.

DOI: [10.35634/vm210207](https://doi.org/10.35634/vm210207)

При экспериментальных исследованиях теплоэнергетических устройств определение ряда тепловых величин сводится к решению обратных задач теплопроводности и является достаточно трудной технической задачей, сложность которой на современном этапе развития теплоэнергетики усугубляется высокой температурой рабочего тела и постоянной тенденцией к ее увеличению [1]. Поэтому во многих случаях обратные задачи теплообмена являются основным средством получения необходимой информации при решении задач теплового моделирования. Диагностика и идентификация процессов теплообмена могут быть связаны с решением обратных задач различных типов [2–8], однако граничные обратные задачи – это один из наиболее важных и распространенных в тепловом моделировании классов задач. Постановке и алгоритмизации таких задач, выяснением специфических трудностей их решения посвящены работы [9–18].

В статье исследуется одномерная обратная задача теплопроводности в случае, когда температура измеряется в точке раздела сред x_0 : $0 < x_0 < 1$, а требуется определить граничное значение при $x = 0$. Также особенностью задачи является то, что коэффициент теплопроводности равен константе на интервалах $(0; x_0)$, $(x_0, 1)$, но эти константы не равны, что соответствует случаю двухслойного материала.

Отметим, что решаемая задача является некорректно поставленной, поэтому важно не только определить приближенное решение, но и получить оценку погрешности этого решения. Предложенный в данной работе метод проекционной регуляризации использует преобразование Фурье по t , обрезая при этом высокочастотные гармоники, которые приводят к неустойчивости задачи. Усечение происходит за счет выбора параметра регуляризации по схеме М. М. Лаврентьева [19]. Этот метод позволяет получить неулучшаемую оценку погрешности приближенного решения. На основе предложенного метода разработан численный алгоритм, который показал хорошую точность используемого метода. Полученные в данной статье результаты могут быть использованы в приборостроении при конструировании высокотемпературных термопар.

§ 1. Постановка обратной задачи

Пусть тепловой процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_0, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_0 < x < 1, \quad t > 0, \quad a_1, a_2 > 0, \quad (1.2)$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [0; x_0]; \quad u_2(x, 0) = 0, \quad x \in (x_0; 1], \quad (1.3)$$

$$u_1(0, t) = h(t), \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

$$u_2(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

$$a_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}, \quad t \geq 0, \quad (1.7)$$

где $h(t) \in C^2[0, +\infty)$, $h(0) = h'(0) = 0$ и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \geq t_0$

$$h(t) = 0. \quad (1.8)$$

Заметим, что в реальном эксперименте время протекания процесса длится $[0, T]$, но как известно [20], возникают проблемы с обоснованием единственности решения обратной задачи, потому мы используем условие (1.8). В случае отказа от условия (1.8) можно домножить уравнение на e^{-t} . В работе [21] показано как умножение на e^{-t} может снять условие (1.8), однако этот подход приводит к значительному увеличению объема статьи.

Обратная задача заключается в том, что функция $h(t)$ нам не известна и подлежит определению, а вместо нее в точках (x_0, t) измеряется температура стержня, соответствующая данному процессу

$$u_1(x_0, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Для решения данной обратной задачи будем использовать преобразование Фурье решения $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & 0 \leq x \leq x_0, \\ u_2(x, t), & x_0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ по переменной t на полупрямой $[0, \infty)$.

Для правомерности применения этого преобразования необходимо выполнение условий следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $h(t)$ удовлетворяет условию (1.8). Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.7) такое, что

$$u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in C([0, 1] \times (0, \infty)),$$

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \\ a_2 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \end{cases} \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} \in C([0, x_0] \times (0, \infty)) \\ a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} \in C([x_0, 1] \times (0, \infty)). \end{cases}$$

Доказательство теоремы для данного класса задач приведено в работе [21]. Теорема 1 доказывается через построение решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.7) в виде ряда и дальнейшего исследования этого ряда и его производных на равномерную сходимость.

§ 2. Сведение обратной граничной задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть $\overline{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$ над полем комплексных чисел, а множество $M_r \subset \overline{H}$ определено формулой

$$M_r = \left\{ h(t) : h(t) \in L_2[0, \infty), \int_0^\infty |h(t)|^2 dt + \int_0^\infty |h'(t)|^2 dt \leq r^2 \right\},$$

где $h'(t)$ — производная от функции $h(t)$, а r — известное положительное число. Тогда предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, участвующем в условии (1.9), существует функция $h_0(t)$, принадлежащая множеству M_r , но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{\overline{H}} \leq \delta. \tag{2.1}$$

Требуется, используя f_δ , δ и M_r , определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) и оценить уклонение $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{\overline{H}}$ приближенного решения $h_\delta(t)$ от точного $h_0(t)$.

Для решения данной задачи введем оператор F , отображающий \overline{H} в \overline{H} и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h(t)e^{-irt} dt; \quad \tau \geq 0.$$

После применения преобразования F к задаче (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) сведем ее следующей:

$$\begin{aligned} i\tau \hat{u}_1(x, \tau) &= a_1^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_1(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, x_0); & i\tau \hat{u}_2(x, \tau) &= a_2^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad x \in (x_0, 1), \quad \tau \geq 0, \\ \hat{u}_1(x_0, \tau) &= \hat{f}(\tau), \quad \hat{u}_2(1, \tau) = 0, & \tau &\geq 0, \\ \hat{u}_1(x_0, \tau) &= \hat{u}_2(x_0, \tau), \quad a_1 \frac{\partial \hat{u}_1(x_0, \tau)}{\partial x} &= a_2 \frac{\partial \hat{u}_2(x_0, \tau)}{\partial x}, \quad \tau &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\hat{u}_1(x, \tau) = F[u_1(x, t)]$, $\hat{u}_2(x, \tau) = F[u_2(x, t)]$, $\hat{u}(x, \tau) = \begin{cases} \hat{u}_1(x, \tau), & x \in [0, x_0], \\ \hat{u}_2(x, \tau), & x \in [x_0, 1]. \end{cases}$

Из (2.2) получим

$$\begin{aligned} \text{sh } \mu_0 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{a_1} \right) \cdot \text{sh}^{-1} \mu_0(1-x_0) \frac{\sqrt{\tau}}{a_2} \cdot \hat{f}(\tau) &= \hat{h}(\tau), \\ \mu_0 &= (1+i)/\sqrt{2}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Далее, используя предыдущую формулу, определим оператор R , положив

$$R\hat{f}(\tau) = \text{sh } \mu_0 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{a_1} \right) \cdot \text{sh}^{-1} \mu_0(1-x_0) \frac{\sqrt{\tau}}{a_2} \cdot \hat{f}(\tau), \tag{2.4}$$

$$D(R) = \{ \hat{f}(\tau) : \hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty) \text{ и } R\hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty) \}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что оператор R линеен, неограничен, замкнут и

$$R\hat{f}(\tau) = \hat{h}(\tau). \tag{2.6}$$

Пусть $\hat{h}_0(\tau) = R\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau) = F[f_0(t)]$, а $\hat{f}_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$.

Из формулы (2.1) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\| \leq \sqrt{2}\delta. \quad (2.7)$$

Множество M_r при преобразовании F перейдет в множество $\hat{M}_r \supset F[M_r]$, определяемое формулой

$$\hat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in L_2[0, \infty), \int_0^\infty (1 + \tau^2) |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq 2r^2 \right\}. \quad (2.8)$$

Из того, что $h_0(t) \in M_r$, получаем

$$\hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_r. \quad (2.9)$$

Тем самым обратная задача (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) свелась к приближенному вычислению значения неограниченного оператора R .

§ 3. Решение задачи (2.4)–(2.9)

Для решения задачи (2.3)–(2.8) используем метод проекционной регуляризации [22]. В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{R_\beta : \beta > 0\}$, определяемое формулой

$$R_\beta \hat{f}(\tau) = \begin{cases} R\hat{f}(\tau), & 0 \leq \tau \leq \beta, \\ 0, & \tau > \beta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Регуляризующее значение $\hat{h}_\delta^\beta(\tau)$ задачи (2.3) определим формулой

$$\hat{h}_\delta^\beta(\tau) = R_\beta \hat{f}_\delta(\tau); \quad \tau \geq 0. \quad (3.2)$$

Для выбора параметра регуляризации $\bar{\beta} = \bar{\beta}(\delta)$ в формуле (3.2), рассмотрим оценку

$$\|\hat{h}_\delta^\beta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq \|\hat{h}_\delta^\beta(\tau) - \hat{h}_0^\beta(\tau)\| + \|\hat{h}_0^\beta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|, \quad (3.3)$$

где $\hat{h}_0^\beta(\tau) = R_\beta \hat{f}_0(\tau)$. Так как из (2.7), (3.1) и (3.2) следует, что $\|\hat{h}_\delta^\beta(\tau) - \hat{h}_0^\beta(\tau)\| \leq \|R_\beta\|\delta$, то перейдем к оценке $\|R_\beta\|$.

Лемма 1. Пусть оператор R_β определен формулой (3.1). Тогда существует $\beta_2 > 0$ такое, что для любых β , $|\beta| \geq \beta_2$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}} \leq \|R_\beta(\tau)\| \leq 2 \cdot e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}}.$$

Доказательство. По определению, норма оператора $\|R_\beta\| = \sup_{0 \leq \tau \leq \beta} |R(\tau)|$.

Так как $\mu_0 = (1+i)\sqrt{\tau}/\sqrt{2}$, то

$$\left| \operatorname{sh} \mu_0 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{a_1} \right) \right| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_1} \right) - \operatorname{cos}^2 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_1} \right)},$$

$$\left| \operatorname{sh} \frac{\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}}{a_2} \right| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_2} + \operatorname{sin}^2 \frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_2}}.$$

В результате получим существование τ_1 такого, что для любого $\tau \geq \tau_1$ справедливо соотношение

$$|R(\tau)| = \left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{a_1} \right)}{\operatorname{sh} \mu_0(1-x_0)\frac{\sqrt{\tau}}{a_2}} \right| \leq \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_1} \right)}{\operatorname{sh} \frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}a_2}} \leq 2e^{\frac{x_0\sqrt{\tau/2}}{a_1}}.$$

Учитывая вышесказанное, получим существование $\beta_1 = \tau_1$ такого, что для всех $\beta \geq \beta_1$ справедлива формула $\|R_\beta(\tau)\| \leq e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}}$.

Аналогично доказывается существование $\beta_2 > \beta_1$ такого, что для любого $\beta \geq \beta_2$ справедлива оценка снизу $\|R_\beta(\tau)\| \geq \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}}$. Тем самым лемма доказана. \square

Теперь получим оценку для $\|\hat{h}_0^\beta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|$ в формуле (3.3). Пусть

$$\Delta_1^2(\beta) = \sup \left\{ \int_\beta^\infty |\hat{h}_0(\tau)|^2 d\tau : \hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_r \right\}. \quad (3.4)$$

Из (2.8) получаем, что при условии $\hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_r$

$$\int_\beta^\infty (1 + \tau^2) |\hat{h}_0(\tau)|^2 d\tau \leq 2r^2. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что $\Delta_1^2(\beta) \leq 2r^2/(1 + \beta^2)$.

Таким образом, из (3.3), (3.5), предыдущего соотношения и леммы 1 получим, что

$$\|\hat{h}_\delta^\beta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq \sqrt{2}r/\sqrt{1 + \beta^2} + 2 \cdot e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}} \delta.$$

Параметр регуляризации $\bar{\beta} = \bar{\beta}(\delta)$ в формуле (3.2) выберем из условия

$$\sqrt{1 + \beta^2} \cdot \|R_\beta\| \cdot \delta = \sqrt{2}r. \quad (3.6)$$

Учитывая вышесказанное, получим

$$\|\hat{h}_\delta^{\bar{\beta}(\delta)}(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq 2\sqrt{2}r/\sqrt{1 + \bar{\beta}^2(\delta)}. \quad (3.7)$$

Поскольку функция $\sqrt{1 + \beta^2} e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}}$ строго возрастает по β и изменяется от β_2 до ∞ , β_2 введено в лемме 1, следовательно, существует единственное решение $\bar{\beta}(\delta, r)$ уравнения (3.6) и $\bar{\beta}(\delta, r) \geq \beta_2$.

Ввиду того что уравнение (3.6) не имеет решения в элементарных функциях, аппроксимируем его парой уравнений

$$e^{\frac{x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}} = \frac{2r}{\delta}, \quad e^{\frac{2x_0\sqrt{\beta/2}}{a_1}} = \frac{r}{2\delta}. \quad (3.8)$$

Решения уравнений (3.8) обозначим через $\bar{\beta}_1(\delta, r)$ и $\bar{\beta}_2(\delta, r)$, соответственно. Тогда при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\bar{\beta}_2(\delta, r) \leq \bar{\beta}(\delta, r) \leq \bar{\beta}_1(\delta, r). \quad (3.9)$$

Из (3.8) будем иметь $\bar{\beta}_1(\delta, r) = \frac{2a_1^2}{x_0^2} \ln^2 \frac{2}{\delta}$ и $\bar{\beta}_2(\delta, r) = \frac{a_1^2}{2x_0^2} \ln^2 \frac{r}{2\delta}$, а из (3.9), что

$$\bar{\beta}(\delta, r) \sim \ln^2 \delta \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Решение задачи (2.3)–(2.8) определим формулой $\hat{h}_\delta(\tau) = \hat{h}_\delta^{\bar{\beta}(\delta, r)}(\tau)$. Тогда из соотношения (3.7), следует, что $\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq \frac{2r}{\sqrt{1 + \bar{\beta}^2(\delta, r)}}$.

Окончательно, решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} F^{-1}[\bar{h}_\delta(\tau)], & t \in [0, t_0], \\ 0, & t > t_0, \end{cases}$$

где F^{-1} — оператор, обратный F .

Учитывая вышесказанное, для $h_\delta(t)$ будет справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \leq \frac{2r}{\sqrt{1 + \bar{\beta}^2(\delta, r)}}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) следует существование числа $d > 0$ такого, что для любого достаточно малого δ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \leq d \cdot r \ln^{-2} \delta.$$

§ 4. Алгоритм численного решения задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) методом проекционной регуляризации

Исходные данные: $a_1, a_2, x_0, T, f_\delta(t), \delta$.

1. Применяем к $f_\delta(t)$ преобразование Фурье, находим $\hat{f}(\tau)$.
2. Приближенное решение задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9) найдем методом проекционной регуляризации

$$\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \left(\frac{(1-x_0)\sqrt{\tau}}{a_2} + \frac{x_0\sqrt{\tau}}{a_1} \right)}{\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_0) \frac{\sqrt{\tau}}{a_2}} \cdot \hat{f}_\delta(\tau), & \tau \leq \alpha, \\ 0, & \tau > \alpha. \end{cases} \quad (4.1)$$

Значение параметра регуляризации α получим из принципа невязки

$$\int_\alpha^\infty |\hat{f}_\delta(\tau)|^2 d\tau = 9\delta^2. \quad (4.2)$$

Обозначим полученное значение параметра регуляризации через $\bar{\alpha}(\hat{f}_\delta(\tau), \delta)$.

3. Используя (4.1), (4.2), определим

$$\hat{h}_\delta^{\bar{\alpha}(\hat{f}_\delta(\tau), \delta)} = \hat{h}_\delta(\tau).$$

4. Применяя обратное преобразование Фурье F^{-1} , получаем приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7), (1.9)

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re}[F^{-1}[\hat{h}_\delta(\tau)]], & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

§ 5. Контрольный пример

Рассмотрим функцию $h_0(t) = \begin{cases} t \sin(\pi t), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, \infty). \end{cases}$

Полагаем $T = 1$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $x_0 = 0,5$, $N = 1000$.

Далее из решения прямой задачи (1.1)–(1.7) находим $f_0(t) = u(x_0, t)$.

Задаем разбиение временного отрезка с числом узлов N такое, что

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T, \quad t_k = \frac{k}{N}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Находим $f_\delta(t)$, внося погрешность $\tilde{\delta}_1 = 0,01$ и $\tilde{\delta}_2 = 0,05$ в $f_0(t)$ по формуле

$$f_\delta^k = f_0(t_k) + \frac{\tilde{\delta}_j}{\sqrt{T}} \cdot \gamma, \quad j = 1, 2,$$

$$\delta_1^2 = \frac{T}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f_\delta^k}{10^4}, \quad \delta_2^2 = \frac{T}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f_\delta^k}{400},$$

где $\gamma: |\gamma| \leq 1$ – псевдослучайное число.

Получив f_δ^k , δ_1 и δ_2 , переходим к алгоритму численного решения, описанному выше, из которого получаем $h_\delta(t)$.

Далее определяем оценку уклонения приближенного решения $h_0(t)$ от точного $h_\delta(t)$ по формуле

$$\tilde{\Delta}(\delta) = \sqrt{\frac{T}{N} \sum_{k=0}^N |h_0(t) - h_\delta(t)|^2}.$$

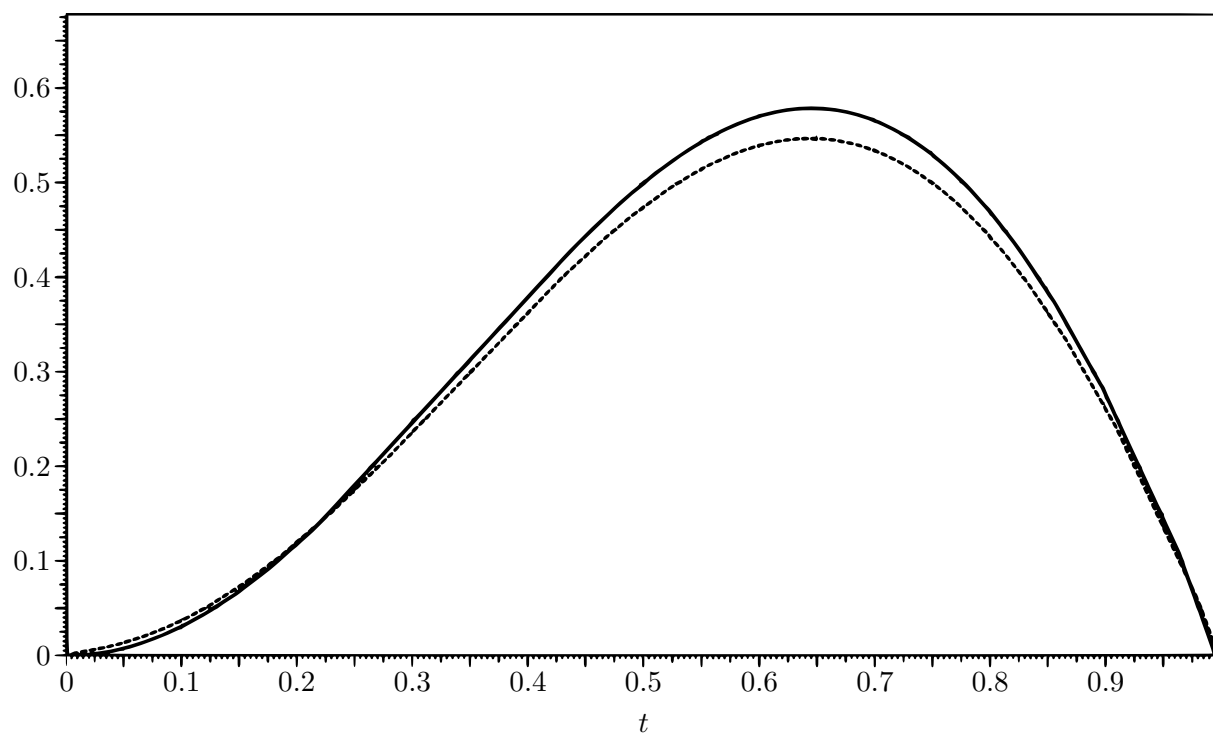
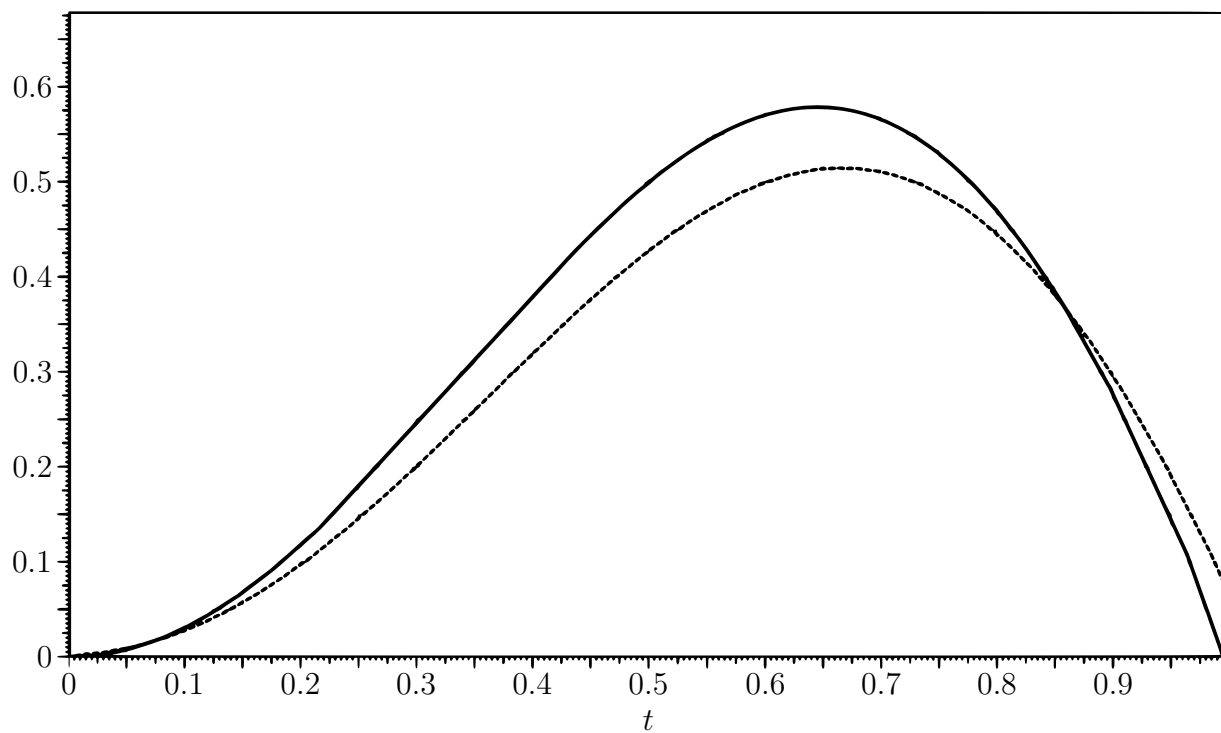
На рис. 1 представлена визуализация решения задачи. Приближенное решение отображено пунктирной линией.

Вычисляя погрешность приближенного решения с точностью до четвертого знака после запятой, получаем, что

$$\tilde{\Delta}_1(\delta) = \sqrt{\frac{T}{N} \sum_{k=0}^N |h_0^k - h_\delta^k|^2} \approx 0,01363.$$

Визуализация результатов численного эксперимента при $\delta = 0,05$, $N = 1000$ приведена на рис. 2, для которого погрешность

$$\tilde{\Delta}_2(\delta) = \sqrt{\frac{T}{N} \sum_{k=0}^N |h_0^k - h_\delta^k|^2} \approx 0,02548.$$

Рис. 1: Визуализация решения задачи при $\delta = 0,01$ Рис. 2: Визуализация решения задачи при $\delta = 0,05$

Заключение

В работе решалась обратная граничная задача теплопроводности для стержня, состоящего из однородных частей с различными теплофизическими свойствами. Для решения этой задачи был использован численный алгоритм, основанный на методе проекционной регуляризации. Практическая значимость представленного алгоритма состоит в повышении точности и надежности результатов обработки и интерпретации данных тепловых экспериментов и испытаний.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FENU-2020-0022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988.
2. Романов В. Г. Обратная бесфазовая задача для уравнений электродинамики в анизотропной среде // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488. № 4. С. 367–371. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524884367-371>
3. Hasanov A., Itou H. A priori estimates for the general dynamic Euler–Bernoulli beam equation: Supported and cantilever beams // Applied Mathematics Letters. 2019. Vol. 87. P. 141–146. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.07.038>
4. Prilepko A. I., Kamynin V. L., Kostin A. B. Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2018. Vol. 26. No. 4. P. 523–539. <https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0049>
5. Данилин А. Р. Асимптотика решения бисингулярной задачи оптимального граничного управления в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 11. С. 1804–1814. <https://doi.org/10.31857/S004446690003534-8>
6. Vasin V. V., Belyaev V. V. Approximation of solution components for ill-posed problems by the Tikhonov method with total variation // Doklady Mathematics. 2018. Vol. 97. No. 3. P. 266–270. <https://doi.org/10.1134/S1064562418030250>
7. Pektas B., Tamci E. The heat flux identification problem for a nonlinear parabolic equation in 2D // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 312. P. 134–142. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.041>
8. Hasanov A. An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation // Applied Mathematics Letters. 2011. Vol. 24. No. 7. P. 1269–1273. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.02.023>
9. Короткий А. И., Ковтунов Д. А. Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 76–101. <http://mi.mathnet.ru/timm530>
10. Korolev Yu. M., Kubo H., Yagola A. G. Parameter identification problem for a parabolic equation — application to the Black–Scholes option pricing model // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2012. Vol. 20. No. 3. P. 327–337. <https://doi.org/10.1515/jip-2012-0043>
11. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: ФГУП «Издательство СО РАН», 2018. <https://doi.org/10.15372/INVERSE2018KSI>
12. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некоторые задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
13. Денисов В. Я. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
14. Денисов А. М. Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1754–1759. <https://doi.org/10.7868/S0044466916100069>

15. Tanana V. R. A comparison of error estimates at a point and on a set when solving ill-posed problems // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2018. Vol. 26. No. 4. P. 541–550. <https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0078>
16. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1967. Т. 7. № 4. С. 910–914. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf8947>
17. Танана В. П. О сведении обратной граничной задачи к последовательному решению двух некорректных задач // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2020. Вып. 2. С. 219–232. <https://doi.org/10.15372/SJNM20200208>
18. Ягола А. Г., Титаренко В. Н., Степанова И. Э., Ван Янфей. Обратные задачи и методы их решения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
19. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.
20. Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // *УМН*. 1959. Т. 14. Вып. 1 (85). С. 21–85. <http://mi.mathnet.ru/umn7263>
21. Танана В. П., Ершова А. А. О решении обратной граничной задачи для композиционных материалов // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 474–488. <https://doi.org/10.20537/vm180404>
22. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 15.09.2020

Сидикова Анна Ивановна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел обратных и некорректно поставленных задач, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6077-0929>

E-mail: sidikovaai@susu.ru

Сушков Андрей Сергеевич, аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4134-389X>

E-mail: mesocyclon@yandex.ru

Цитирование: А. И. Сидикова, А. С. Сушков. Численное решение обратной граничной задачи теплообмена для неоднородного стержня // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 253–264.

A. I. Sidikova, A. S. Sushkov

Numerical solution of the inverse boundary value heat transfer problem for an inhomogeneous rod

Keywords: error estimation, modulus of conditional correctness, Fourier series transformation, ill-posed problem.

MSC2020: 80A23, 35K05, 35R30

DOI: [10.35634/vm210207](https://doi.org/10.35634/vm210207)

The article is devoted to solving an inverse boundary value problem for a rod consisting of composite materials. In the inverse problem, it is required, using information about the temperature of the heat flow in the media section, to determine the temperature at one of the ends of the rod. The paper presents a method of projection regularization, which made it possible to approximately estimate the error of the obtained solution to the inverse problem. To check the computational efficiency of this method, test calculations were carried out.

Funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (government order FENU-2020-0022).

REFERENCES

1. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* (Extreme methods for solving ill-posed problems and their application to inverse problems of heat transfer), Moscow: Nauka, 1988.
2. Romanov V. G. An inverse phaseless problem for electrodynamic equations in an anisotropic medium, *Doklady Akademii Nauk*, 2019, vol. 488, no. 4, pp. 367–371 (in Russian). <https://doi.org/10.31857/S0869-56524884367-371>
3. Hasanov A., Itou H. A priori estimates for the general dynamic Euler–Bernoulli beam equation: Supported and cantilever beams, *Applied Mathematics Letters*, 2019, vol. 87, pp. 141–146. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.07.038>
4. Prilepko A. I., Kamynin V. L., Kostin A. B. Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 523–539. <https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0049>
5. Danilin A. R. Asymptotics of the solution of a bisingular optimal boundary control problem in a bounded domain, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 11, pp. 1737–1747. <https://doi.org/10.1134/S0965542518110040>
6. Vasin V. V., Belyaev V. V. Approximation of solution components for ill-posed problems by the Tikhonov method with total variation, *Doklady Mathematics*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 266–270. <https://doi.org/10.1134/S1064562418030250>
7. Pektas B., Tamci E. The heat flux identification problem for a nonlinear parabolic equation in 2D, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 312, pp. 134–142. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.041>
8. Hasanov A. An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation, *Applied Mathematics Letters*, 2011, vol. 24, no. 7, pp. 1269–1273. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.02.023>
9. Korotkii A. I., Kovtunov D. A. Optimal boundary control of a system describing thermal convection, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 74–100. <https://doi.org/10.1134/S0081543811020076>
10. Korolev Yu. M., Kubo H., Yagola A. G. Parameter identification problem for a parabolic equation — application to the Black–Scholes option pricing model, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2012, vol. 20, no. 3, pp. 327–337. <https://doi.org/10.1515/jip-2012-0043>

11. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-posed problems), Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2018, <https://doi.org/10.15372/INVERSE2018KSI>
12. Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Nekotorye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* (Some problems of mathematical physics and analysis), Moscow: Nauka, 1980.
13. Denisov V. Ya. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* (Introduction to the theory of inverse problems), Moscow: Mocsow State University, 1994.
14. Denisov A. M. Uniqueness and nonuniqueness of the solution to the problem of determining the source in the heat equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1737–1742. <https://doi.org/10.1134/S0965542516100067>
15. Tanana V. R. A comparison of error estimates at a point and on a set when solving ill-posed problems, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 541–550. <https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0078>
16. Tikhonov A. N., Glasko V. B. Methods of determining the surface temperature of a body, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, no. 4, pp. 267–273. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(67\)90161-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90161-9)
17. Tanana V. P. On reducing an inverse boundary-value problem to the synthesis of two ill-posed problems and their solution, *Numerical Analysis and Applications*, 2020, vol. 13, issue 2, pp. 180–192. <https://doi.org/10.1134/S1995423920020081>
18. Yagola A. G., Titarenko V. N., Stepanova I. E., Van Yanfei. *Obratnye zadachi i metody ikh resheniya* (Inverse problems and methods for their solution), Moscow: BINOM, 2014.
19. Lavrent'ev M. M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki* (On some ill-posed problems of mathematical physics), Novosibirsk: Nauka, 1962.
20. Landis E. M. Some questions in the qualitative theory of elliptic and parabolic equations, *Six Papers on Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1962, pp. 173–238. <https://zbmath.org/?q=an:0122.33701>
21. Tanana V. P., Ershova A. A. On the solution of an inverse boundary value problem for composite materials, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 474–488. <https://doi.org/10.20537/vm180404>
22. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*, De Gruyter, 2002. <https://doi.org/10.1515/9783110944822>

Received 15.09.2020

Sidikova Anna Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of inverse and ill-posed LPC problems, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6077-0929>

E-mail: sidikovaai@susu.ru

Sushkov Andrei Sergeevich, Post-Graduate Student, Department of Management Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4134-389X>

E-mail: mesocyclon@yandex.ru

Citation: A. I. Sidikova, A. S. Sushkov. Numerical solution of the inverse boundary value heat transfer problem for an inhomogeneous rod, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 253–264.