ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 226–240.

УДК 517.9

© *А. В. Платонов*

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается нелинейная механическая система, динамика которой описывается векторным дифференциальным уравнением типа Льенара. Предполагается, что коэффициенты данного уравнения могут переключаться с одного набора постоянных значений на другой, причем общее количество этих наборов, вообще говоря, бесконечное. Таким образом, для задания коэффициентов уравнения используются кусочно-постоянные функции с бесконечным числом точек разрыва на всей временной оси. Предлагается способ построения разрывной функции Ляпунова, с помощью которой исследуются достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия изучаемого уравнения. Полученные результаты обобщаются на случай нестационарного уравнения Льенара с разрывными коэффициентами более общего вида. В качестве вспомогательного результата работы разрабатываются методы анализа вопроса знакоопределенности и подходы к получению оценок для алгебраических выражений, представляющих собой сумму слагаемых степенного вида с нестационарными коэффициентами. Ключевой особенностью исследования является отсутствие предположений об ограниченности указанных нестационарных коэффициентов или об их отделенности от нуля. Приводятся некоторые примеры, иллюстрирующие установленные результаты.

*Ключевые слова*: нелинейные механические системы, разрывные коэффициенты, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова.

DOI: 10.35634/vm210205

В работе исследуется проблема устойчивости решений векторного уравнения Льенара. Уравнение такого вида часто используется для моделирования различных нелинейных колебательных процессов. В частности, оно может описывать динамику механической системы, находящейся под воздействием нелинейных диссипативных и потенциальных сил. Вопросы устойчивости решений уравнения Льенара рассматривались во многих работах (см., например, [1, 2] и цитируемую там литературу). Однако, проводимый в настоящей работе анализ усложняется предположением о нестационарности уравнения и допущением о разрывности его коэффициентов.

Хорошо известно, что присутствие в механических системах параметров, меняющихся в зависимости от времени, может приводить к принципиально новым динамическим эффектам [3–7]. Для изучения устойчивости систем указанного типа, наряду с классическими методами Ляпунова, были разработаны различные подходы такие, как метод усреднения, теория сингулярных возмущений, методы декомпозиции, методы сравнения, теория интегральных многообразий, и так далее. Отметим, что наиболее сложна для исследования ситуация, когда нестационарные параметры системы могут неограниченно возрастать, или, напротив, сколь угодно близко приближаться к нулю. Подобные ситуации возникают, например, при рассмотрении механических систем с нестационарными силовыми полями, эволюция которых приводит к их доминированию или исчезновению с течением времени. В этом случае параметры могут не иметь положительных средних значений, их нельзя оценить сверху или снизу положительными константами, промежутки быстрых колебаний параметров могут чередоваться с промежутками медленного изменения параметров, и тогда применение классических методов анализа становится затруднительным. Использование теорем типа Ляпунова, как правило, связано с исследованием знакоопределенности функций Ляпунова и их производных, или с нахождением оценок для этих функций. И если решение данных задач для стационарных выражений, например, полиномиального или степенного типа, достаточно хорошо разработано, то наличие нестационарностей приводит к значительным сложностям.

Непрерывное изменение параметров системы может сопровождаться резкими скачками, вызванными какими-то внешними воздействиями на систему или сменой управляющего момента. Тогда приходится иметь дело с разрывными функциями для описания этих параметров. Заметим, что многие стандартные виды функций Ляпунова, используемые для механических систем, зависят от системных параметров, и соответственно, они также становятся разрывными. В этом случае исследуемую систему можно рассматривать как систему с переключениями. Системы с переключениями представляют собой важный класс гибридных систем, состоящих из семейства подсистем, каждая из которых соответствует определенному режиму функционирования системы. Некоторый закон переключения задает в каждый момент времени, какая из подсистем является активной. Таким образом, происходящие разрывы системных параметров можно понимать как смену режима функционирования системы. В последние десятилетия теория систем с переключениями и систем с импульсными воздействиями активно развивалась. Были предложены многие подходы к анализу устойчивости решений таких систем [8–14]. Наиболее эффективным было признано сочетание метода функций Ляпунова с теорией дифференциальных неравенств. Отметим, что число разрывов у правой части системы может быть бесконечным. Это приводит к необходимости рассматривать бесконечное множество возможных режимов функционирования системы. Однако, четкое задание параметров системы позволяет считать закон переключения между различными режимами конкретно заданным. Специфика настоящей работы заключается в использовании нелинейных и нестационарных дифференциальных неравенств. Задачи, связанные с нелинейными и нестационарными системами с переключениями, стали активно изучаться в последние годы [15–21].

В основной части настоящей работы предполагается, что параметры векторного уравнения Льенара задаются с помощью кусочно-постоянных функций, причем предполагается, что число разрывов этих функций на всей временной оси, вообще говоря, бесконечно. В результате, возникает задача анализа устойчивости решений системы с переключениями, состоящей из бесконечного множества стационарных подсистем. Стоит отметить, что кусочно-постоянные функции часто используются для аппроксимации меняющихся во времени системных коэффициентов, в том числе и непрерывных. С постоянными значениями параметров легче работать, но приходится учитывать смену этих значений в какие-то моменты времени. В заключительной части работы предлагаемый подход распространяется на случай нестационарных разрывных коэффициентов более общего вида.

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, задаваемую уравнением

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}(t,\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; функция $\Pi(t,\mathbf{x})$ кусочно-постоянна относительно переменной $t$ и непрерывно-дифференцируема относительно переменной $\mathbf{x}$; компоненты матрицы $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ кусочно-постоянны относительно переменной $t$ и непрерывны относительно переменной $\mathbf{x}$.

Система (1) представляет собой векторное уравнение типа Льенара. При описании механических колебаний с помощью данного уравнения функцию $\Pi(t,\mathbf{x})$ можно понимать как потенциальную энергию системы, а $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ — как матрицу, описывающую действие диссипативных сил.

В настоящей работе будем использовать следующее предположение.

**Предположение 1.** Пусть функция $\Pi(t,\mathbf{x})$ и матрица $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям:

а) при любом фиксированном значении переменной $t \geqslant 0$ функция $\Pi(t,\mathbf{x})$ является однородной функцией порядка $\mu+1$ по отношению к переменной $\mathbf{x}$, $\mu \geqslant 1$;

б) при любом фиксированном значении переменной $t \geqslant 0$ функция $\Pi(t,\mathbf{x})$ положительно определена по отношению к переменной $\mathbf{x}$;

в) при любом фиксированном значении переменной $t \geqslant 0$ компоненты матрицы $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ являются однородными функциями порядка $\nu$ по отношению к переменной $\mathbf{x}$, $\nu > 0$;

г) при любых фиксированных значениях $t \geqslant 0$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ матрица $\mathbf{D}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{D}^T(t,\mathbf{x})$ положительно определена.

Отметим, что во многих задачах нелинейной механики (с существенно нелинейными действующими силами) линейное приближение исследуемой системы может оказаться вырожденным, линейных слагаемых может просто не быть. В таких случаях пытаются разработать критерии устойчивости по нелинейному приближению, и однородные системы (в том числе механические системы с однородными коэффициентами) часто выступают в качестве таких систем нелинейного приближения (см., например, [6,22]).

Учитывая сделанное предположение 1, найдутся (см. [22]) кусочно-постоянные и положительные при $t \geqslant 0$ функции

$$\widehat{a}(t), \quad \overline{a}(t), \quad b(t), \quad c(t), \quad d(t) \tag{2}$$

такие, что оценки

$$\widehat{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1} \leqslant \Pi(t,\mathbf{x}) \leqslant \overline{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1}, \qquad \mathbf{z}^T\,\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\,\mathbf{z} \geqslant b(t)\,\|\mathbf{x}\|^{\nu}\|\mathbf{z}\|^2, \tag{3}$$

$$\left\|\frac{\partial \Pi(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right\| \leqslant c(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu}, \qquad \|\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\| \leqslant d(t)\|\mathbf{x}\|^{\nu} \tag{4}$$

будут иметь место при всех $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее мы используем евклидову норму вектора и полагаем, что норма матрицы ассоциирована с этой нормой вектора.

Обозначим через $\{\tau_i\}_{i=1,2,\ldots}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$, моменты времени, в которые функция $\Pi(t,\mathbf{x})$ и/или матрица $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ терпят разрыв относительно переменной $t$. Будем полагать, что общее число таких точек разрыва на всем временном интервале $[0,+\infty)$ бесконечно, в то время как на любом конечном временном интервале их число конечно. Также, не умаляя общности, будем считать, что функция $\Pi(t,\mathbf{x})$ и компоненты матрицы $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ непрерывны справа относительно переменной $t$ в указанных точках разрыва. Тогда имеем, что

$$\widehat{a}(t) = \widehat{a}_i, \quad \overline{a}(t) = \overline{a}_i, \quad b(t) = b_i, \quad c(t) = c_i, \quad d(t) = d_i$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots$. Здесь $\widehat{a}_i, \overline{a}_i, b_i, c_i, d_i$, $i = 0,1,\ldots$, — некоторые положительные постоянные.

В настоящей работе будем рассматривать только непрерывные решения уравнения (1), т. е. будем считать, что значения $\mathbf{x}(\tau_i - 0)$, $\dot{\mathbf{x}}(\tau_i - 0)$, полученные для решения $(\mathbf{x}^T(t), \dot{\mathbf{x}}^T(t))^T$ уравнения на интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, выступают в качестве начальных данных для решения на следующем временном интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$; $i = 1,2,\ldots$. Целью работы является установление достаточных условий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Известно [1], что если $\Pi(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ стационарны, то тогда при выполнении предположения 1 положение равновесия $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ уравнения (1) будет асимптотически устойчивым (в этом случае функции (2) сохраняют одно постоянное положительное значение при $t \geqslant 0$). В работе [23] система вида (1) исследовалась для ситуации, когда $\Pi(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ переключаются между конечным числом стационарных режимов (в этом случае функции (2) могут принимать конечное число постоянных положительных значений при $t \geqslant 0$). Бесконечное число стационарных режимов, между которыми могут переключаться $\Pi(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$, допускает, в отличие от [23], возможность неограниченности функций (2) на интервале $[0,+\infty)$, а также их сколь угодно близкое приближение к нулю. Поэтому в рассматриваемой в настоящей работе ситуации результаты из [23], вообще говоря, не применимы.

Отметим, что в настоящей работе мы ограничиваемся исследованием случая, когда присутствующие в заданной системе нестационарные слагаемые разрывны только относительно переменной $t$. Подобная ситуация имеет место, например, если параметры системы подвержены резким изменениям, в то время как сама структура системы сохраняется. Однако, используемый подход нетрудно распространить и на случай системы с переменной структурой.

**Замечание 1.** Предположение 1 позволяет использовать в качестве компонент матрицы $\mathbf{D}(t,\mathbf{x})$ однородные функции порядка меньше 1. В этом случае мы не предполагаем изначально единственности решений системы (1). Единственность нулевого решения в положительном направлении будет показана одновременно с его устойчивостью.

## § 2. Построение функции Ляпунова

Пусть заданы кусочно-постоянные при $t \geqslant 0$ функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ такие, что

$$\gamma_1(t) = \gamma_{1i}, \quad \gamma_2(t) = \gamma_{2i}$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$. Здесь $\gamma_{1i}, \gamma_{2i}$, $i = 0, 1, \ldots$, — некоторые положительные константы.

Функцию Ляпунова для уравнения (1) будем строить в виде

$$V(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \Pi(t,\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{x}} - \delta\gamma_1(t)\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta-1}\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{x}} + \delta\gamma_2(t)\|\mathbf{x}\|^{k-1}\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{x}}, \tag{5}$$

где $\beta \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $\delta$ — достаточно малая положительная константа.

Дифференцируя функцию (5) в силу уравнения (1), получим соотношения

$$\begin{aligned}\dot{V}\big|_{(1)} = {}& -\delta\gamma_2(t)(\mu+1)\|\mathbf{x}\|^{k-1}\Pi(t,\mathbf{x}) - \delta\gamma_1(t)\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta+1} - \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - \\ & - \delta\gamma_1(t)\mathbf{x}^T\frac{\partial\left(\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta-1}\dot{\mathbf{x}}\right)}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\left(-\frac{\partial\Pi(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} - \mathbf{D}(t,\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}\right) + \\ & + \delta\gamma_2(t)\dot{\mathbf{x}}^T\frac{\partial\left(\|\mathbf{x}\|^{k-1}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} - \delta\gamma_2(t)\|\mathbf{x}\|^{k-1}\mathbf{x}^T\mathbf{D}(t,\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

справедливые при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$.

Следовательно, оценки

$$\begin{aligned}&\left(\widehat{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1} + \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\right) - \left(\delta\gamma_1(t)\|\mathbf{x}\|\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta} + \delta\gamma_2(t)\|\mathbf{x}\|^{k}\|\dot{\mathbf{x}}\|\right) \leqslant V(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) \leqslant \\ &\leqslant \left(\overline{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1} + \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\right) + \left(\delta\gamma_1(t)\|\mathbf{x}\|\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta} + \delta\gamma_2(t)\|\mathbf{x}\|^{k}\|\dot{\mathbf{x}}\|\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}\big|_{(1)} \leqslant {}& -\left(\delta\gamma_2(t)\widehat{a}(t)(\mu+1)\|\mathbf{x}\|^{k+\mu} + \delta\gamma_1(t)\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta+1} + b(t)\|\mathbf{x}\|^{\nu}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\right) + \\ & + p\big(\delta\gamma_1(t)c(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1}\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta-1} + \delta\gamma_1(t)d(t)\|\mathbf{x}\|^{\nu+1}\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta} + \\ & + \delta\gamma_2(t)\|\mathbf{x}\|^{k-1}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + \delta\gamma_2(t)d(t)\|\mathbf{x}\|^{k+\nu}\|\dot{\mathbf{x}}\|\big)\end{aligned}$$

будут иметь место при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Здесь $p$ — некоторая положительная постоянная.

Для дальнейшего анализа потребуются некоторые вспомогательные результаты.

## § 3. Вспомогательные результаты

Пусть задана функция

$$W(t, \mathbf{z}) = -\alpha(t) z_1^p - \beta(t) z_2^q + r(t) z_1^u z_2^v,$$

где $t \geqslant 0$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $z_1, z_2 \in [0, +\infty)$; $p$ и $q$ — положительные постоянные; $u$ и $v$ — неотрицательные постоянные, $u + v > 0$; функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $r(t)$ кусочно-непрерывны и положительны при $t \geqslant 0$.

**Лемма 1.** *Пусть выполнено неравенство*

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} > 1, \tag{6}$$

*и существует константа $\varepsilon$, удовлетворяющая ограничениям*

$$\max\{0;\ v - q\} \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left\{v;\ v - \frac{(p-u)q}{p}\right\}, \tag{7}$$

*такая, что функция*

$$\frac{r(t)}{\alpha(t)} \left(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right)^{\frac{v-\varepsilon}{q}} \tag{8}$$

*ограничена при $t \geqslant 0$. Тогда для любого $M \in (0, 1)$ можно выбрать $H > 0$ так, что оценка*

$$W(t, \mathbf{z}) \leqslant M\left(-\alpha(t) z_1^p - \beta(t) z_2^q\right)$$

*будет справедлива при $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{z}\| < H$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем константу $\widetilde{\varepsilon}$, исходя из равенства

$$\frac{u - \widetilde{\varepsilon}}{p} + \frac{v - \varepsilon}{q} = 1.$$

Тогда для любого $L > 0$ существует $H > 0$ такое, что

$$W(t, \mathbf{z}) \leqslant -\alpha(t) z_1^p - \beta(t) z_2^q + L r(t) z_1^{u-\widetilde{\varepsilon}} z_2^{v-\varepsilon}$$

при $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{z}\| < H$.

Обозначим $\alpha(t) z_1^p = \widetilde{z}_1$, $\beta(t) z_2^q = \widetilde{z}_2$. Получаем, что при $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{z}\| < H$ выполнено неравенство

$$W(t, \mathbf{z}) \leqslant \widetilde{W}(t, \widetilde{\mathbf{z}}),$$

где $\widetilde{\mathbf{z}} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2)^T$, и

$$\widetilde{W}(t, \widetilde{\mathbf{z}}) = -\widetilde{z}_1 - \widetilde{z}_2 + L \frac{r(t)}{\alpha(t)} \left(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right)^{\frac{v-\varepsilon}{q}} \widetilde{z}_1^{\frac{u-\widetilde{\varepsilon}}{p}} \widetilde{z}_2^{\frac{v-\varepsilon}{q}}.$$

Возьмем любое $M \in (0, 1)$. Принимая во внимание ограниченность функции (8) при $t \geqslant 0$, имеем, что если константа $L$ выбрана достаточно малой, то тогда будет выполнена оценка

$$\widetilde{W}(t, \widetilde{\mathbf{z}}) \leqslant M(-\widetilde{z}_1 - \widetilde{z}_2)$$

при $t \geqslant 0$, $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2 \in [0, +\infty)$. Возвращаясь к старым переменным, получаем требуемое. □

Нетрудно заметить, что если функция $\alpha(t)/\beta(t)$ ограничена сверху при $t \geqslant 0$, то тогда ограниченность функции (8) в условиях леммы 1 достаточно проверить для $\varepsilon = \max\{0; v - q\}$. Если же $\alpha(t)/\beta(t) \geqslant m = \mathrm{const} > 0$ при $t \geqslant 0$, то тогда ограниченность функции (8) достаточно проверить для $\varepsilon = \min\{v; v - (p - u)q/p\}$.

Рассмотрим теперь более сложную функцию

$$\widehat{W}(t, \mathbf{z}) = -\alpha(t) z_1^p - \beta(t) z_2^q - \gamma(t) z_1^\xi z_2^\eta + r(t) z_1^u z_2^v.$$

Здесь $t \geqslant 0$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $z_1, z_2 \in [0, +\infty)$; $p$, $q$, $\xi$ и $\eta$ — положительные постоянные; $u$ и $v$ — неотрицательные постоянные, $u + v > 0$; функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $r(t)$ кусочно-непрерывны и положительны при $t \geqslant 0$. Будем считать, что

$$\frac{\xi}{p} + \frac{\eta}{q} < 1.$$

**Лемма 2.** *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

а) *справедливо неравенство* (6)*, и существует константа $\varepsilon$, удовлетворяющая ограничениям* (7)*, такая, что функция* (8) *ограничена при $t \geqslant 0$;*

б) *справедливы неравенства*

$$u > \xi, \quad \frac{u - \xi}{p - \xi} + \frac{v}{\eta} > 1, \tag{9}$$

*и существует константа $\varepsilon$, удовлетворяющая ограничениям*

$$\max\{0;\ v - \eta\} \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left\{v;\ v - \frac{(p - u)\eta}{p - \xi}\right\},$$

*такая, что функция*

$$\frac{r(t)}{\alpha(t)} \left(\frac{\alpha(t)}{\gamma(t)}\right)^{\frac{v - \varepsilon}{\eta}}$$

*ограничена при $t \geqslant 0$;*

в) *справедливы неравенства*

$$v > \eta, \quad \frac{u}{\xi} + \frac{v - \eta}{q - \eta} > 1, \tag{10}$$

*и существует константа $\varepsilon$, удовлетворяющая ограничениям*

$$\max\{0;\ v - q\} \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left\{v - \eta;\ v - \eta - \frac{(\xi - u)(q - \eta)}{\xi}\right\},$$

*такая, что функция*

$$\frac{r(t)}{\gamma(t)} \left(\frac{\gamma(t)}{\beta(t)}\right)^{\frac{v - \eta - \varepsilon}{q - \eta}}$$

*ограничена при* $t \geqslant 0$.
*Тогда для любого* $M \in (0,1)$ *можно выбрать* $H > 0$ *так, что оценка*

$$\widehat{W}(t,\mathbf{z}) \leqslant M\left(-\alpha(t)z_1^p - \beta(t)z_2^q - \gamma(t)z_1^\xi z_2^\eta\right)$$

*будет иметь место при* $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{z}\| < H$.

Доказательство. Заметим, что

$$\widehat{W}(t,\mathbf{z}) = -\beta(t)z_2^q + z_1^\xi\left(-\alpha(t)z_1^{p-\xi} - \gamma(t)z_2^\eta + r(t)z_1^{u-\xi}z_2^v\right),$$

если $u > \xi$, и

$$\widehat{W}(t,\mathbf{z}) = -\alpha(t)z_1^p + z_2^\eta\left(-\gamma(t)z_1^\xi - \beta(t)z_2^{q-\eta} + r(t)z_1^u z_2^{v-\eta}\right),$$

если $v > \eta$. Тогда требуемое будет следовать из леммы 1. □

Как и ранее, отметим, что если функции $\alpha(t)/\gamma(t)$ и $\gamma(t)/\beta(t)$ ограничены сверху или снизу некоторыми положительными постоянными, то тогда реккомендации по выбору параметра $\varepsilon$ в условиях б) и в) леммы 2 можно конкретизировать. Также отметим, что строгие неравенства (6), (9) и (10) формулировках лемм 1 и 2 можно заменить на нестрогие, если вместо функции $r(t)$ использовать функцию $\delta r(t)$, где $\delta$ — достаточно малая положительная постоянная.

## § 4. Условия устойчивости

Применим леммы 1 и 2 для нахождения оценок на функцию Ляпунова (5) и ее производную в силу уравнения (1).

Положим

$$k = \max\{\mu - \nu;\ \nu + 1\}, \qquad \beta = 1 + \max\left\{\frac{2\nu}{\mu+1};\ \frac{2(k-1)}{k+\mu-\nu}\right\}.$$

Выберем коэффициенты $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ так, чтобы следующие функции:

1) $\gamma_1(t)\widehat{\alpha}^{\frac{\beta-2-\varepsilon_1}{2}}(t)$,
2) $\gamma_2(t)\widehat{\alpha}^{-\frac{1+\varepsilon_2}{2}}(t)$,
3) $\dfrac{\gamma_1(t)c(t)}{b(t)}\left(\dfrac{\gamma_2(t)\widehat{a}(t)}{b(t)}\right)^{\frac{\beta-3-\varepsilon_3}{2}}$ (если $\mu \geqslant \nu - 1$) или $c(t)\left(\dfrac{b(t)}{\gamma_1(t)}\right)^{-\frac{2+\varepsilon_4}{\beta-1}}$ (если $\mu \leqslant \nu - 1$),
4) $\dfrac{\gamma_1(t)d(t)}{b(t)}\left(\dfrac{\gamma_2(t)\widehat{a}(t)}{b(t)}\right)^{\frac{\beta-2-\varepsilon_5}{2}}$ или $d(t)\left(\dfrac{b(t)}{\gamma_1(t)}\right)^{-\frac{1+\varepsilon_6}{\beta-1}}$ (если $\beta \geqslant 2$),
5) $\dfrac{\gamma_2(t)}{b(t)}\left(\dfrac{\gamma_2(t)\widehat{a}(t)}{b(t)}\right)^{-\frac{\varepsilon_7}{2}}$ или $\dfrac{\gamma_2(t)}{b(t)}$,
6) $\dfrac{\gamma_2(t)d(t)}{b(t)}\left(\dfrac{\gamma_2(t)\widehat{a}(t)}{b(t)}\right)^{-\frac{1+\varepsilon_8}{2}}$

были ограниченными на интервале $[0,+\infty)$ при некоторых значениях $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_8$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\max\{0;\ \beta-2\} \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \beta - \frac{2\mu}{\mu+1}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \min\left\{1;\ \frac{2k-\mu-1}{\mu+1}\right\},$$
$$0 \leqslant \varepsilon_3 \leqslant \beta - 1 - \frac{2(k-1)}{k+\mu-\nu}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_4 \leqslant -2 + \frac{(\mu+1)(\beta-1)}{\nu},$$
$$\max\{0;\ \beta-2\} \leqslant \varepsilon_5 \leqslant \beta - 2 + \frac{2}{k+\mu-\nu}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_6 \leqslant \beta - 2,$$
$$0 \leqslant \varepsilon_7 \leqslant 2 - \frac{2(\mu+1)}{k+\mu-\nu}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon_8 \leqslant \min\left\{1;\ 1 - \frac{2(\mu-\nu)}{k+\mu-\nu}\right\}.$$

Простейший анализ функций 1)–6) показывает, что всегда можно добиться их ограниченности посредством выбора коэффициентов $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, то есть накладываемые условия на параметры функции Ляпунова корректные.

Тогда, согласно леммам 1 и 2, для любых $M_1 \in (0,1)$, $M_2 > 1$ и $M_3 \in (0,1)$ можно найти $\delta > 0$ и $H > 0$ такие, что оценки

$$M_1\left(\widehat{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1} + \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\right) \leqslant V(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) \leqslant M_2\left(\overline{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1} + \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\right), \tag{11}$$

$$\dot{V}\Big|_{(1)} \leqslant -M_3\left(\delta\gamma_2(t)\widehat{a}(t)(\mu+1)\|\mathbf{x}\|^{k+\mu} + \delta\gamma_1(t)\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta+1} + b(t)\|\mathbf{x}\|^{\nu}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\right) \tag{12}$$

будут выполнены при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, если $\|\mathbf{x}\| < H$, $\|\dot{\mathbf{x}}\| < H$.

Учитывая (11), (12), получаем, что

$$V(\tau_i + 0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leqslant \varkappa_i V(\tau_i - 0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$\dot{V}\Big|_{(1)} \leqslant -Mh(t)V^{1+\rho}(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) \quad \text{при} \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

если $\|\mathbf{x}\| < H$, $\|\dot{\mathbf{x}}\| < H_1$, где $H_1 = \min\{H; 1\}$, $M$ — некоторая положительная постоянная, $\rho = (k-1)/(\mu+1)$,

$$\varkappa_i = \frac{M_2}{M_1}\max\left\{\frac{\overline{a}(\tau_i+0)}{\widehat{a}(\tau_i-0)}; 1\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$
$$h(t) = \min\left\{\gamma_2(t)\widehat{a}(t)\overline{a}^{\,-(1+\rho)}(t); \gamma_1(t)\right\}.$$

Для любого значения $t \geqslant 0$ можно найти неотрицательное целое число $k$ такое, что $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$. В результате получаем кусочно-постоянную функцию $k = k(t)$.

Построим вспомогательную функцию $\psi(t)$ по следующим формулам:

$$\psi(t) = \int_0^t h(s)\,ds \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_1), \tag{15}$$

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h(s)\,ds\,(\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_k)^{-\rho} + \int_{\tau_k}^t h(s)\,ds \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau_1. \tag{16}$$

Отметим, что найденная функция $h(t)$ кусочно-постоянна при $t \geqslant 0$. Обозначим для краткости $h_i = h(t)$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда формулы (15), (16) можно переписать в более простом виде:

$$\psi(t) = h_0 t \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_1),$$
$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{k-1} h_i(\tau_{i+1} - \tau_i)\,(\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_k)^{-\rho} + h_k(t - \tau_k) \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau_1.$$

Также заметим, что $\overline{a}(\tau_i + 0) = \overline{a}_i$, $\widehat{a}(\tau_i - 0) = \widehat{a}_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

**Теорема 1.** *Пусть оценки вида* (11), (13), (14) *построены для уравнения* (1). *Тогда если* $\psi(t) \to +\infty$ *и* $\widehat{a}^{\,\rho}(t)\psi(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *то положение равновесия* $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы 1 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 из [20].

**Пример 1.** Рассмотрим скалярное уравнение

$$\ddot{x} + u(t)x^{2/3}\dot{x} + v(t)x^3 = 0,$$

где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, а функции $u(t)$ и $v(t)$ кусочно-постоянны и положительны при $t \geqslant 0$. Таким образом, здесь $\nu = 2/3$, $\mu = 3$, $\widehat{a}(t) = \overline{a}(t) = v(t)/4$, $c(t) = v(t)$, $b(t) = d(t) = u(t)$. Находим $k = 7/3$, $\beta = 11/7$, $\rho = 1/3$. Для установления оценок (11), (12) параметры $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ достаточно выбрать в соответствии с неравенствами

$$0 < \gamma_2(t) \leqslant \min\left\{\frac{v(t)}{u(t)};\ u(t);\ v^{1/2}(t)\right\},$$

$$0 < \gamma_1(t) \leqslant \min\left\{v^{3/14}(t);\ \gamma_2^{5/7}(t)\left(\frac{u(t)}{v(t)}\right)^{2/7};\ \left(\frac{\gamma_2(t)u(t)}{v(t)}\right)^{3/14}\right\}.$$

Предположим для определенности, что $v(t) \equiv 1$ при $t \in [0, +\infty)$; $u(t) = u_i = \mathrm{const} \geqslant 3$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$. Таким образом, будем считать, что коэффициент при потенциальных силах в рассматриваемом уравнении сохраняет свое постоянное значение на всей временной оси. В то же время коэффициент при диссипативных силах может переключаться с одного постоянного значения на другое, причем множество всех этих значений ограничено снизу положительной константой, но может быть неограниченным сверху (допускается доминирование диссипативных сил). В этом случае можно положить $\gamma_2(t) = u^{-1}(t)$, $\gamma_1(t) = u^{-3/7}(t)$. Тогда получим $h(t) = \sqrt[3]{4}\,u^{-1}(t)$. Выберем $\varkappa_i = \varkappa$, $i = 1, 2, \ldots$, где в качестве $\varkappa$ можно взять любую константу, большую 1. Согласно теореме 1, для асимптотической устойчивости положения равновесия $x = \dot{x} = 0$ рассматриваемого уравнения достаточно выполнения предельного соотношения:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{T_i}{u_i}\varkappa^{-(k-i)/3} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Здесь $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, \ldots$. Например, асимптотическая устойчивость будет гарантирована, если

$$\frac{T_k}{u_k} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

т. е. если длины временных промежутков между точками разрыва коэффициента $u(t)$ возрастают со скоростью, превышающей скорость роста самого данного коэффициента.

## § 5. Распространение результатов на более общий случай

В данном разделе статьи заменим предположение о кусочной постоянности относительно переменной $t$ функции $\Pi(t, \mathbf{x})$ и компонент матрицы $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$ более общим предположением. Будем теперь считать, что функция $\Pi(t, \mathbf{x})$ кусочно-непрерывно-дифференцируема относительно переменной $t$ и непрерывно-дифференцируема относительно переменной $\mathbf{x}$; компоненты матрицы $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$ кусочно-непрерывны относительно переменной $t$ и непрерывны относительно переменной $\mathbf{x}$.

Учитывая предположение 1, можно построить кусочно-непрерывную функцию $e(t)$ такую, что

$$\frac{\partial \Pi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \leqslant e(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1}$$

при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Здесь, как и ранее, через $\{\tau_i\}_{i=1,2,\ldots}$ обозначена последовательность моментов времени, в которые функция $\Pi(t, \mathbf{x})$ и/или матрица $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$ терпят разрыв относительно переменной $t$.

Если $e(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то тогда будут применимы все результаты, полученные в предыдущих разделах статьи. В самом деле, также сконструируем функцию Ляпунова вида (5) с кусочно-постоянными коэффициентами $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$. В качестве функций (2) в условиях (3), (4) будем использовать кусочно-непрерывные функции. Опираясь на леммы 1 и 2, снова придем к оценкам (13), (14). Построив функцию $\psi(t)$ по формулам (15), (16), найдем условия асимптотической устойчивости с помощью теоремы 1. Кроме того, отметим, что функции (2) можно огрубить на каждом из интервалов $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, положительными константами и тем самым свести их к рассмотренному ранее более простому кусочно-постоянному виду. Такой подход будет уместен, если на указанных временных интервалах функции (2) меняются не слишком сильно.

Предположим теперь, что функция $e(t)$ — знакопеременная на интервале $[0, +\infty)$. Найдем моменты времени, в которые функция $e(t)$ меняет свой знак, и присоединим их к последовательности $\{\tau_i\}_{i=1,2,\ldots}$. Таким образом, далее без потери общности будем считать, что на каждом из интервалов $(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, функция $e(t)$ сохраняет знак. Тогда вместо оценки (14) получим оценку

$$\dot{V}\big|_{(1)} \leqslant \omega(t) V(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - M h(t) V^{1+\rho}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad \text{при} \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

если $\|\mathbf{x}\| < H$, $\|\dot{\mathbf{x}}\| < H_1$, где

$$\omega(t) = \max\left\{0;\ \frac{e(t)}{M_1 \widehat{a}(t)}\right\},$$

а величины $H$, $H_1$, $M$, $M_1$, $h(t)$, $\rho$ определяются так же, как и в предыдущем разделе статьи.

Исследование устойчивости гибридных нелинейных систем на основе дифференциальных неравенств вида (17), полученных для используемых функций Ляпунова, проводилось в работе [21]. Определим кусочно-постоянную функцию $k = k(t)$ так же, как и в предыдущем разделе статьи. Следуя [21], построим функцию $\widetilde{\psi}(t)$ по формулам:

$$\widetilde{\psi}(t) = e^{-\rho J(t)} \int_0^t h(s)\, e^{\rho J(s)}\, ds \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_1),$$

$$\widetilde{\psi}(t) = e^{-\rho J(t)} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h(s)\, e^{\rho J(s)}\, ds\, (\varkappa_{i+1} \ldots \varkappa_k)^{-\rho} + \int_{\tau_k}^t h(s)\, e^{\rho J(s)}\, ds \right) \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau_1.$$

Здесь $J(t) = \int_0^t \omega(s)\, ds$.

**Теорема 2.** *Пусть оценки вида* (11), (13), (17) *построены для уравнения* (1). *Тогда если* $\widetilde{\psi}(t) \to +\infty$ *и* $\widehat{a}^{\rho}(t)\widetilde{\psi}(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *то положение равновесия* $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы 2 проводится по аналогичной схеме, что и доказательство теоремы 2 из [21].

Теорему 2 можно применять в случае, когда длины промежутков отрицательности функции $e(t)$ значительно превалируют над длинами промежутков неотрицательности этой функции. Также теорема 2 может оказаться полезной для исследования устойчивости механических систем с затухающей скоростью изменения потенциальных сил (когда $e(t) \to 0$ при $t \to +\infty$).

Отметим, что если функция $\Pi(t, \mathbf{x})$ непрерывно-дифференцируема относительно переменной $t \geqslant 0$ (разрывов нет), то коэффициенты $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ при построении функции Ляпунова (5) целесообразно также искать в виде непрерывно-дифференцируемых при $t \geqslant 0$ функций. Тогда дифференцирование этой функции Ляпунова в силу уравнения (1) приведет к появлению двух новых слагаемых

$$-\delta{\gamma_1}'(t)\|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta-1}\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{x}}, \qquad \delta{\gamma_2}'(t)\|\mathbf{x}\|^{k-1}\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{x}},$$

что вызовет в результате применения лемм 1 и 2 некоторое ужесточение ограничений, накладываемых на выбор параметров $k$, $\beta$ и коэффициентов $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$. Однако, в этом случае функция Ляпунова станет непрерывной, и соответственно, можно будет положить $\varkappa_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, в неравенствах (13). Это значительно ослабит условия асимптотической устойчивости, задаваемые теоремами 1 и 2.

## § 6. Заключение

Второй метод Ляпунова является основным методом анализа устойчивости решений нелинейных систем. За последние десятилетия он активно развивался. Делались многочисленные попытки ослабить требования, предъявляемые к функциям Ляпунова. Метод успешно применялся не только к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, но и к динамические системам более сложного вида, например, к разностным, дифференциально-разностным или, вообще, к гибридным системам, сочетающим в себе черты как непрерывного, так и дискретного поведения. Тем не менее, главной проблемой, связанной с применением указанного метода, остается вопрос построения подходящей функции Ляпунова для изучаемой системы. В настоящей работе был рассмотрен один класс механических систем, имеющий важные практические приложения. Для него был предложен способ построения функции Ляпунова, учитывающий возможность резкого изменения параметров системы, их неограниченного роста или, напротив, постепенного исчезновения с течением времени. Для нахождения условий асимптотической устойчивости использовалось сочетание метода функций Ляпунова с теорией дифференциальных неравенств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
2. Вульфсон И. И. Учет нелинейных диссипативных сил при ограниченной исходной информации // Теория механизмов и машин. 2003. Т. 1. № 1. С. 70–77. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17092689
3. Козлов В. В. Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 12–19.
4. Хатвани Л. О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 725–732.
5. Sun J., Wang Q.-G., Zhong Q.-C. A less conservative stability test for second-order linear time-varying vector differential equations // International Journal of Control. 2007. Vol. 80. Issue 4. P. 523–526. https://doi.org/10.1080/00207170601028899
6. Александров А. Ю. Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 3. С. 361–376. https://elibrary.ru/item.asp?id=9518585

7. Андреев А. С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.
8. Liberzon D. Switching in systems and control. Boston: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0017-8
9. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King G. Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Review. 2007. Vol. 49. Issue 4. P. 545–592. https://doi.org/10.1137/05063516X
10. Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N. Disturbance attention properties of time-controlled switched systems // Journal of the Franklin Institute. 2001. Vol. 338. Issue 7. P. 765–779. https://doi.org/10.1016/S0016-0032(01)00030-8
11. Ding X., Liu X. On stabilizability of switched positive linear systems under state-dependent switching // Applied Mathematics and Computation. 2017. Vol. 307. P. 92–101. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.007
12. Xiang W., Xiao J. Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching // Automatica. 2014. Vol. 50. Issue 3. P. 940–945. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.12.028
13. Yang H., Jiang B., Cocquempot V. A survey of results and perspectives on stabilization of switched nonlinear systems with unstable modes // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2014. Vol. 13. P. 45–60. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2013.12.005
14. Ларина Я. Ю., Родина Л. И. Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 490–502. https://doi.org/10.20537/vm160404
15. Cruz-Zavala E., Moreno J. A. Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach // Automatica. 2017. Vol. 80. P. 232–238. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.02.039
16. Wang R., Xing J., Xiang Z. Finite-time stability and stabilization of switched nonlinear systems with asynchronous switching // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 316. P. 229–244. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.017
17. Wang F., Zhang X., Chen B., Lin C., Li X., Zhang J. Adaptive finite-time tracking control of switched nonlinear systems // Information Sciences. 2017. Vol. 421. P. 126–135. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.08.095
18. Shen Y., Huang Y., Gu J. Global finite-time observers for Lipschitz nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2011. Vol. 56. Issue 2. P. 418–424. https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2088610
19. Zhang B. On finite-time stability of switched systems with hybrid homogeneous degrees // Mathematical Problems in Engineering. 2018. Vol. 2018. P. 1–7. https://doi.org/10.1155/2018/3096986
20. Платонов А. В. Об асимптотической устойчивости нелинейных нестационарных систем с переключениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 6. С. 20–32. https://doi.org/10.31857/S000233880003491-9
21. Платонов А. В. Анализ устойчивости нестационарных систем с переключениями // Изв. вузов. Матем. 2020. № 2. С. 63-73. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-2-63-73
22. Zubov V. I. Methods of A. M. Lyapunov and their applications. Groningen: Noordhoff Ltd, 1964.
23. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Lakrisenko P. A., Platonov A. V., Chen Y. Asymptotic stability conditions for some classes of mechanical systems with switched nonlinear force fields // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2015. Vol. 15. No. 2. P. 127–140. https://zbmath.org/?q=an:1335.34087

Поступила в редакцию 30.12.2020

Платонов Алексей Викторович, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры управления медико-биологическими системами, Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9797-6768
E-mail: a.platonov@spbu.ru

**Цитирование:** А. В. Платонов. Исследование устойчивости решений уравнения Льенара с разрывными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 226–240.

*A. V. Platonov*

**Stability analysis for the Lienard equation with discontinuous coefficients**

*Keywords*: nonlinear mechanical systems, discontinuous coefficients, asymptotic stability, Lyapunov functions.

MSC2020: 34A38, 34D20

DOI: 10.35634/vm210205

A nonlinear mechanical system, whose dynamics is described by a vector ordinary differential equation of the Lienard type, is considered. It is assumed that the coefficients of the equation can switch from one set of constant values to another, and the total number of these sets is, in general, infinite. Thus, piecewise constant functions with infinite number of break points on the entire time axis, are used to set the coefficients of the equation. A method for constructing a discontinuous Lyapunov function is proposed, which is applied to obtain sufficient conditions of the asymptotic stability of the zero equilibrium position of the equation studied. The results found are generalized to the case of a nonstationary Lienard equation with discontinuous coefficients of a more general form. As an auxiliary result of the work, some methods for analyzing the question of sign-definiteness and approaches to obtaining estimates for algebraic expressions, that represent the sum of power-type terms with non-stationary coefficients, are developed. The key feature of the study is the absence of assumptions about the boundedness of these non-stationary coefficients or their separateness from zero. Some examples are given to illustrate the established results.

## REFERENCES

1. Matrosov V. M. *Metod vektornykh funktsii Lyapunova: analiz dinamicheskikh svoistv nelineinykh sistem* (The method of vector Lyapunov functions: the analysis of a dynamical properties of nonlinear systems), Moscow: Fizmatlit, 2001.
2. Vulfson I. I. Description of nonlinear dissipative forces under limited starting information, *The Theory of Mechanisms and Machines*, 2003, vol. 1, issue 1, pp. 70–77 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17092689
3. Kozlov V. V. On the stability of equilibrium positions in non-stationary force fields, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, vol. 55, issue 1, pp. 14–19. https://doi.org/10.1016/0021-8928(91)90054-X
4. Hatvani L. The effect of damping on the stability properties of equilibria of non-autonomous systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, vol. 65, issue 4, pp. 707–713. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(01)00076-4
5. Sun J., Wang Q.-G., Zhong Q.-C. A less conservative stability test for second-order linear time-varying vector differential equations, *International Journal of Control*, 2007, vol. 80, issue 4, pp. 523–526. https://doi.org/10.1080/00207170601028899
6. Aleksandrov A. Yu. The stability of the equilibrium positions of non-linear non-autonomous mechanical systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, issue 3, pp. 324–338. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.07.015
7. Andreyev A. S. The stability of the equilibrium position of a non-autonomous mechanical system, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, issue 3, pp. 381–389. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00048-2
8. Liberzon D. *Switching in systems and control*, Boston: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0017-8
9. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King G. Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM Review*, 2007, vol. 49, issue 4, pp. 545–592. https://doi.org/10.1137/05063516X
10. Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N. Disturbance attention properties of time-controlled switched systems, *Journal of the Franklin Institute*, 2001, vol. 338, issue 7, pp. 765–779. https://doi.org/10.1016/S0016-0032(01)00030-8

11. Ding X., Liu X. On stabilizability of switched positive linear systems under state-dependent switching, *Applied Mathematics and Computation*, 2017, vol. 307, pp. 92–101. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.007
12. Xiang W., Xiao J. Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching, *Automatica*, 2014, vol. 50, issue 3, pp. 940–945. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.12.028
13. Yang H., Jiang B., Cocquempot V. A survey of results and perspectives on stabilization of switched nonlinear systems with unstable modes, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2014, vol. 13, pp. 45–60. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2013.12.005
14. Larina Ya. Yu., Rodina L. I. Asymptotically stable sets of control systems with impulse actions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 490–502 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160404
15. Cruz-Zavala E., Moreno J. A. Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach, *Automatica*, 2017, vol. 80, pp. 232–238. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.02.039
16. Wang R., Xing J., Xiang Z. Finite-time stability and stabilization of switched nonlinear systems with asynchronous switching, *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 316, pp. 229–244. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.017
17. Wang F., Zhang X., Chen B., Lin C., Li X., Zhang J. Adaptive finite-time tracking control of switched nonlinear systems, *Information Sciences*, 2017, vol. 421, pp. 126–135. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.08.095
18. Shen Y., Huang Y., Gu J. Global finite-time observers for lipschitz nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, vol. 56, issue 2, pp. 418–424. https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2088610
19. Zhang B. On finite-time stability of switched systems with hybrid homogeneous degrees, *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, vol. 2018, pp. 1–7. https://doi.org/10.1155/2018/3096986
20. Platonov A. V. On the asymptotic stability of nonlinear time-varying switched systems, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, issue 6, pp. 854–863. https://doi.org/10.1134/S1064230718060084
21. Platonov A. V. Stability analysis for nonstationary switched systems, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, issue 2, pp. 56–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X20020061
22. Zubov V. I. *Methods of A. M. Lyapunov and their applications*, Groningen: Noordhoff, 1964.
23. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Lakrisenko P. A., Platonov A. V., Chen Y. Asymptotic stability conditions for some classes of mechanical systems with switched nonlinear force fields, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2015, vol. 15, issue 2, pp. 127–140. https://zbmath.org/?q=an:1335.34087

Received 30.12.2020

Platonov Alexey Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Medical and Biological Systems Control, Saint Petersburg State University, Universitetskaya Nab., 7/9, Saint Petersburg, 199034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9797-6768
E-mail: a.platonov@spbu.ru

**Citation:** A. V. Platonov. Stability analysis for the Lienard equation with discontinuous coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 226–240.