ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 167–185.

УДК 517.977

© *М. С. Афанасова, В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян*

ОБ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается нелокальная граничная задача для управляемой системы с обратной связью, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка с бесконечным запаздыванием в сепарабельном банаховом пространстве. Приводится общий принцип существования решений задачи в терминах отличия от нуля топологической степени соответствующего векторного поля. Доказывается конкретный пример (теорема 6) реализации этого общего принципа. Доказывается существование оптимального решения поставленной задачи, минимизирующего заданный полунепрерывный снизу функционал качества.

Ключевые слова: система управления с обратной связью, оптимальное решение, дробное дифференциальное включение, бесконечное запаздывание, мера некомпактности, уплотняющий оператор, неподвижная точка, топологическая степень.

DOI: 10.35634/vm210201

Исследование управляемых систем с нелинейными звеньями является сложным и чрезвычайно важным разделом современной математической теории управления и гармонического анализа, имеющим многочисленные приложения и привлекающим в настоящее время внимание очень многих ученых, как в нашей стране, так и во всем мире. В свою очередь, развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что они являются удобным и естественным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального управления, математической физики, радиофизики, акустики и др. Однако решение этих задач в рамках имеющихся теорий часто является весьма сложной проблемой, поскольку многие из них находят достаточно адекватное описание в терминах дифференциальных уравнений и включений с дробными производными.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последние десятилетия интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [21, 25], статьи [6, 15, 20, 24] и др.). На данный момент разработаны различные подходы к разрешимости дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$. Например, в работах [7, 20] для указанного дробного порядка были разрешены задачи типа Коши для дифференциальных уравнений и включений. Статьи [1, 9] посвящены исследованию траекторий дифференциальных включений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, подчиняющихся обобщенным краевым условиям, выраженным в форме операторных включений. В работах [16, 19] авторы приводят доказательства разрешимости периодических краевых задач для дифференциальных включений того же порядка, а в рукописи [5] доказано существование антипериодических решений для дифференциальных включений. Аппроксимации решений дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ были изучены в статьях [17, 18].

В настоящей работе мы рассматриваем нелокальную граничную задачу для управляемой системы с обратной связью, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка с бесконечным запаздыванием в сепарабельном банаховом пространстве. На основе теории топологической степени приводится общий принцип существования интегральных решений поставленной задачи (теорема 5). Доказывается конкретный пример реализации этого общего принципа (теорема 6). Доказывается существование оптимального решения поставленной задачи, минимизирующего заданный полунепрерывный снизу функционал качества (теорема 7).

§ 1. Основные обозначения и определения

1.1. Дифференциальные включения дробного порядка

В этом разделе приведены некоторые сведения из дробного анализа (более подробно с ними можно ознакомиться в [21,22,25,27]).

Пусть E — вещественное банахово пространство.

Определение 1. *Дробной производной Римана–Лиувилля порядка* $q \in (0,1)$ от непрерывной функции $g\colon [0,a] \to E$ называется функция $D^q g$ следующего вида:

$$D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \, \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-q} g(s)\, ds$$

при условии, что правая часть равенства определена.

Здесь Γ — это гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty s^{r-1} e^{-s} ds.$$

Определение 2. *Дробной производной Капуто порядка* $q \in (0,1)$ от непрерывной функции $g\colon [0,a] \to E$ называется функция ${}^C D^q g$ следующего вида:

$${}^C D^q g(t) = \Big(D^q (g(\cdot) - g(0))\Big)(t)$$

при условии, что правая часть равенства определена.

1.2. Многозначные отображения и меры некомпактности

Нам понадобятся некоторые понятия из многозначного анализа и теории топологической степени для уплотняющих отображений (см. [2,8,11,15,23]).

Пусть X, Y — метрические пространства, $\mathcal{E}$ — нормированное пространство, символом $P(\mathcal{E})$ обозначим совокупность непустых подмножеств $\mathcal{E}$, через $Pb(\mathcal{E})$ — совокупность всех непустых ограниченных подмножеств $\mathcal{E}$. Символами $K(\mathcal{E})$ и $Kv(\mathcal{E})$, соответственно, обозначим совокупность непустых компактных подмножеств и совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathcal{E}$.

Для $\Omega \in K(\mathcal{E})$ определим

$$\|\Omega\| = \max\{\|\omega\| \colon \omega \in \Omega\}.$$

Определение 3 (см. [15, п. 1.1]). Многозначное отображение (мультиотображение)

$$\mathcal{F}\colon X \to K(\mathcal{E})$$

называется *полунепрерывным сверху* (далее п. н. св.), если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X \colon \mathcal{F}(x) \subset V\}$ отрытое подмножество X для каждого открытого $V \subset \mathcal{E}$.

Определение 4 (см. [4, п. 3]). Непустое компактное множество $A \subset Y$ называется *асферичным* (или UV^{∞}-множеством), если для любого $\epsilon > 0$ найдется δ, $0 < \delta < \epsilon$, такое, что для всякого $n = 0, 1, 2, \ldots$ каждое непрерывное отображение $g\colon S^n \to V_{\delta}(A)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{g}\colon B^{n+1} \to V_{\epsilon}(A)$, где $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \|x\| = 1\}$, $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \|x\| \leqslant 1\}$, $V_{\delta}(A), V_{\epsilon}(A)$ — соответственно δ-окрестность и ε-окрестность множества A.

Определение 5 (см. [11, п. 27]). П. н. св. мультиотображение $\mathcal{F}\colon X \to K(Y)$ называется *J-мультиотображением* ($\mathcal{F} \in J(X, Y)$), если каждое значение $\mathcal{F}(x)$ является асферичным множеством.

Напомним (см. [3, гл. V, п. 1]), что метрическое пространство Z называется абсолютным ретрактом (AR-пространством) (соответственно, абсолютным окрестностным ретрактом (ANR-пространством)), если для каждого гомеоморфизма h, отображающего его на замкнутое подмножество метрического пространства $Z^{'}$, множество $h(Z)$ является ретрактом $Z^{'}$ (соответственно, некоторой своей открытой окрестности в $Z^{'}$). Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк: в частности, компактное подмножество конечномерного пространства является ANR-пространством тогда и только тогда, когда оно локально стягиваемо. Объединение конечного числа выпуклых замкнутых подмножеств нормированного пространства является ANR-пространством.

Определение 6 (см. [14]). Непустое компактное пространство $\mathcal{A}$ называется *R_{δ}-множеством*, если оно может быть представлено как пересечение убывающей последовательности компактных AR-пространств.

Отметим, что если $\mathcal{A}$ является непустым компактным подмножеством ANR-пространства, то оно является R_{δ}-множеством тогда и только тогда, когда оно может быть представлено как пересечение убывающей последовательности компактных стягиваемых множеств (см. [14]).

Предложение 1 (см. [11, п. 27]). *Пусть Z — ANR-пространство. В каждом из следующих случаев п. н. св. мультиотображение $\mathcal{F}\colon X \to K(Z)$ является J-мультиотображением:*

для каждого $x \in X$ значение $\mathcal{F}(x)$ является

(a) *выпуклым множеством;*

(b) *R_{δ}-множеством;*

(c) *AR-пространством.*

В частности, каждое непрерывное отображение $\omega\colon X \to Z$ является J-мультиотображением.

Определение 7 (см. [11, п. 27]). Символом $J^c(X, Y)$ мы будем обозначать совокупность всех мультиотображений $\mathcal{F}\colon X \to K(Y)$, которые могут быть представлены в виде композиции $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n \circ \ldots \circ \mathcal{F}_1$, $n \geqslant 1$, где $\mathcal{F}_i \in J(X_{i-1}, X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $X_0 = X$, $X_n = Y$ и X_i для $0 < i < n$ являются открытыми подмножествами нормированных пространств. Композиция $\mathcal{F}_n \circ \ldots \circ \mathcal{F}_1$ называется разложением $\mathcal{F}$, а само $\mathcal{F}$ называют при этом *J^c-мультиотображением.*

Заметим (см. [11, п. 27]), что мультиотображение может допускать различные разложения и $J(X, Y) \subset J^c(X, Y)$.

Предложение 2 (см. [15, п. 3.4.1]). *Если $\mathcal{F},\mathcal{G}\colon X\subset\mathcal{E}\to K(\mathcal{E})$ — J^c-мультиоторажения, то их сумма $\mathcal{F}+\mathcal{G}\colon X\to K(\mathcal{E})$,*

$$\big(\mathcal{F}+\mathcal{G}\big)(x)=\mathcal{F}(x)+\mathcal{G}(x)$$

тоже является J^c-мультиотображением.

Определение 8 (см. [15, п. 2.1.1]). Пусть $\mathcal{E}$ — нормированное пространство, $(\mathcal{A},\geqslant)$ частично упорядоченное множество. Функция $\beta\colon Pb(\mathcal{E})\to\mathcal{A}$ *называется мерой некомпактности* (далее мнк) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega\in Pb(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega)=\beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:
(a) *монотонной*, если для любых $\Omega_0,\Omega_1\in Pb(\mathcal{E})$, из $\Omega_0\subseteq\Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0)\leqslant\beta(\Omega_1)$;
(b) *несингулярной*, если для любого $a\in\mathcal{E}$ и любого $\Omega\in Pb(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\}\cup\Omega)=$ $=\beta(\Omega)$;
(c) *инвариантный относительно объединения с компактными множествами*, если $\beta(\Omega\cup$ $\cup K)=\beta(\Omega)$ для любого $\Omega\in Pb(\mathcal{E})$, K относительно компактного в $\mathcal{E}$;
(d) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.
Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:
(e) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0+\Omega_1)\leqslant\beta(\Omega_0)+\beta(\Omega_1)$ для любых Ω_0, $\Omega_1\in Pb(\mathcal{E})$;
(f) *правильной (регулярной)*, если $\beta(\Omega)=0$ равносильно относительной компактности Ω.
Примером вещественной меры некомпактности в пространстве $\mathcal{E}$, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является *мера некомпактности Хаусдорфа*:

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega)=\inf\{\varepsilon>0,\ \text{для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Определение 9 (см. [15, п. 2.2]). Мультиотображение $\mathcal{F}\colon X\subseteq\mathcal{E}\to K(\mathcal{E})$ называется *уплотняющим относительно мнк β* (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega\subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено:

$$\beta(\mathcal{F}(\Omega))\ngeqslant\beta(\Omega).$$

В качестве примеров вещественных мнк, определенных на пространстве непрерывных функций $C([a,b];E)$ со значениями в банаховом пространстве E, мы можем рассмотреть:

(i) *модуль послойной некомпактности*

$$\varphi_C(\mathcal{D})=\sup_{t\in[a,b]}\chi(\mathcal{D}(t));$$

(ii) *модуль равностепенной непрерывности*

$$\mathrm{mod}_C(\mathcal{D})=\lim_{\delta\to0}\sup_{x\in\mathcal{D}}\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\|$$

для каждого ограниченного $\mathcal{D}\subset C([a,b];E)$.

Эти мнк обладают всеми вышеперечисленными свойствами. Более того, если мы обозначим через χ_C меру некомпактности Хаусдорфа в $C([a,b];E)$, то получим следующее соотношение (см. [15, пример 2.1.3]):

$$\varphi_C(\mathcal{D}) \leqslant \chi_C(\mathcal{D}).$$

Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ — нормированные пространства на которых введены меры некомпактности Хаусдорфа $\chi_{\mathcal{E}}$ и $\chi_{\mathcal{E}'}$ соответственно и $\mathcal{L}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ — ограниченный линейный оператор. Число

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi)} := \chi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{L}S),$$

где $S \subset \mathcal{E}$ — единичная сфера, называется (χ)-*нормой оператора* $\mathcal{L}$ (см. [15], п. 2.1.1).

Легко проверить следующие свойства: $\|\mathcal{L}\|^{(\chi)} \leqslant \|\mathcal{L}\|$ и $\chi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{L}\Omega) \leqslant \|\mathcal{L}\|^{(\chi)}\chi_{\mathcal{E}}(\Omega)$ для любого ограниченного $\Omega \subset \mathcal{E}$.

Пусть E — банахово пространство, $\mathcal{L}\colon E \to C([a,b];E)$ — ограниченный линейный оператор и φ_C — модуль послойной некомпактности в $C([a,b];E)$.

Предложение 3 (см. [15, теорема 4.2.3]). *Пусть E — сепарабельное банахово пространство и $\mathfrak{G}\colon [a,b] \to P(E)$ интегрируемая и интегрально ограниченная мультифункция, т. е.*

(i) *множество* $\mathbb{S}(\mathfrak{G}) = \{\mathfrak{g} \in L^1([a,b];E)\colon \mathfrak{g}(t) \in \mathfrak{G}(t)$ *для п. в.* $t \in [a,b]\}$ *непусто;*

(ii) *существует L^1-функция $\epsilon\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\|\mathfrak{G}(t)\| \leqslant \epsilon(t)$ для п. в. $t \in [a,b]$.*

Если существует L^1-функция $\upsilon\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\chi_E(\mathfrak{G}(t)) \leqslant \upsilon(t)$$

для п. в. $t \in [a,b]$, то

$$\chi_E\left(\int_a^t \mathfrak{G}(s)\,ds\right) \leqslant \int_a^t \upsilon(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

где $\int_a^t \mathfrak{G}(s)\,ds = \{\int_a^t \mathfrak{g}(s)\,ds\colon \mathfrak{g} \in \mathbb{S}(\mathfrak{G})\}$.

Предложение 4 (см. [15, теорема 4.2.1]). *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset$ $\subset L^1([0,a];E)$ для всех $n = 1,2,\ldots$ и п. в. $t \in [0,a]$ является L^1-интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi_E(\{\xi_n(t)\}) \leqslant \alpha(t)$$

для п. в. $t \in [0,a]$, где $\alpha \in L^1_+([0,a])$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$ и множество $m_\delta \subset [0,a]$, с мерой Лебега $m_\delta < \delta$, а также множество функций $G_\delta \subset L^1([0,a];E)$ со значениями в K_δ такие, что для любого $n \geqslant 1$ существует $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leqslant 2\alpha(t) + \delta, \qquad t \in [0,a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

Пусть β — монотонная несингулярная мнк в E, U — открытое ограниченное подмножество E и $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$ — β-уплотняющее $J^c(\overline{U},E)$-мультиотображение, более того, пусть $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial U$, где ∂U обозначает границу U. В данной ситуации для соответствующего многозначного векторного поля $i - \mathcal{F}$ определена характеристика

$$\deg\,(i - \mathcal{F}, \overline{U}),$$

называемая *топологической степенью* и обладающая всеми соответствующими стандартными свойствами (см. [15, гл. 3.4]). В частности, отличие от нуля данной характеристики влечет существование неподвижной точки $x \in U,\ x \in \mathcal{F}(x)$.

На основе теории топологической степени устанавливаются следующие теоремы о неподвижной точке (см. [10, 15, 23]).

Теорема 1 (см. [10]). *Если $\mathcal{F}$ — β-уплотняющее $J^c(\overline{U}, E)$-мультиотображение, где β — монотонная несингулярная мнк в E, U — выпуклая окрестность нуля и*

$$x \notin \lambda \mathcal{F}(x) \text{ для } x \in \partial U \text{ и } 0 \leqslant \lambda < 1,$$

тогда множество неподвижных точек $\operatorname{Fix} \mathcal{F} \subset U$ *непусто.*

Теорема 2 (см. [10]). *Пусть $\mathcal{M}$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество E и $\mathcal{F}\colon \mathcal{M} \to K(\mathcal{M})$ — β-уплотняющее J^c-мультиотображение, где β — монотонная несингулярная мнк в E. Тогда* $\operatorname{Fix} \mathcal{F} \neq \emptyset$.

1.3. Фазовое пространство бесконечных запаздываний

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J. K. Hale и J. Kato (см. [12, 13]). Пространство $\mathcal{B}$ будем рассматривать как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty, 0]$ со значениями в банаховом пространстве E, наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Для любой функции $x\colon (-\infty, a] \to E$, где $a > 0$, и каждого $t \in (-\infty, a]$ x_t представляет собой функцию из $(-\infty, 0]$ в E, заданную как

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in (-\infty; 0].$$

Будем предполагать, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам.

$(\mathcal{B}1)$ Если функция $x\colon (-\infty; a] \to E$ непрерывна на $[0, a]$ и $x_0 \in \mathcal{B}$, то для любого $t \in [0, a]$ выполнено:

(i) $x_t \in \mathcal{B}$;

(ii) функция $t \to x_t$ непрерывна;

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leqslant K(t) \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|x(\tau)\| + M(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$, где функции $K, M\colon [0; \infty) \to [0; \infty)$ не зависят от x, K строго положительна и непрерывна, а M локально ограничена.

$(\mathcal{B}2)$ Существует $l > 0$ такое, что $\|\psi(0)\|_E \leqslant l\|\psi\|_{\mathcal{B}}$, для всех $\psi \in \mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty, 0]$ в E с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ (см. [13, предложение 1.2.1]).

Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие:

$(\mathcal{B}C1)$ Если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно (то есть равномерно на каждом компактном подмножестве $(-\infty, 0]$), то $\psi \in \mathcal{B}$ и $\lim_{n \to +\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Из условия $(\mathcal{B}C1)$ вытекает, что банахово пространство ограниченных непрерывных функций $BC = BC((-\infty, 0]; E)$ непрерывно вложено в $\mathcal{B}$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 (см. [13, предложение 7.1.1]).

(i) $BC \subset \overline{C_{00}}$, *где* $\overline{C_{00}}$ *обозначает замыкание* C_{00} *в* $\mathcal{B}$;

(ii) *если равномерно ограниченная последовательность* $\{\psi_n\}$ *в* BC *сходится к функции* ψ *компактно на* $(-\infty, 0]$, *то* $\psi \in \mathcal{B}$ *и* $\lim_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$;

(iii) *найдется константа* $L > 0$ *такая, что* $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leqslant L\|\psi\|_{BC}$, *для всех* $\psi \in BC$.

Наконец будем предполагать выполненным следующее условие:
$(\mathcal{B}C2)$ если $\psi \in BC$ и $\|\psi\|_{BC} \neq 0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \neq 0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство BC, наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, является нормированным пространством. Мы будем обозначать его $\mathcal{BC}$.

Рассмотрим следующие примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеуказанным условиям.

1. Для $\gamma > 0$ пусть $\mathcal{B} = C_\gamma$ — пространство непрерывных функций $\varphi\colon (-\infty; 0] \to E$, имеющих предел $\lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)$ и

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-\infty<\theta\leqslant 0} e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\|.$$

2 (пространства с «затухающей памятью»). Пусть $\mathcal{B} = C_\rho$ — пространство функций $\varphi\colon (-\infty; 0] \to E$ таких, что:
(a) φ непрерывна на $[-r; 0], r > 0$;
(b) φ измерима по Лебегу на $(-\infty; r)$ и найдется положительная интегрируемая по Лебегу функция $\rho\colon (-\infty; r) \to \mathbb{R}^+$ такая, что функция $\rho\varphi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty; r)$; более того, найдется локально ограниченная функция $P\colon (-\infty; 0] \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $\xi \leqslant 0, \quad \rho(\xi + \theta) < P(\xi)\rho(\theta)$ для п. в. $\theta \in (-\infty; -r)$.

Тогда

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} \|\varphi(\theta)\| + \int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta)\|\varphi(\theta)\|d\theta.$$

Простой пример последнего пространства получается, если положить $\rho(\theta) = e^{\mu\theta}, \mu \in \mathbb{R}$.

§ 2. Существование интегральных решений

Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Обозначим символом $\mathcal{C}$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x\colon (-\infty; a] \to E$, наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \|x|_{[0,a]}\|_C,$$

где последняя норма — обычная sup-норма пространства $C([0, a]; E)$.

Мы будем рассматривать следующую управляемую систему, описываемую полулинейным функционально-дифференциальным включением с бесконечным запаздыванием в E:

$$^{C}D^q x\,(t) \in Ax(t) + F(t, x_t) + Bu(t), \qquad t \in [0, a]\,, \tag{2.1}$$

удовлетворяющую условию обратной связи

$$u \in \Psi x. \tag{2.2}$$

Здесь символом $^{C}D^q$ обозначена дробная производная Капуто порядка $0 < q < 1$; $A\colon D(A) \subset E \to E$ — замкнутый линейный оператор; $F\colon [0, a] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями; u — непрерывная функция действующая из $[0, a]$ в банахово пространство управлений E_1; $\Psi\colon \mathcal{C} \to K(C([0, a]; E_1))$ — мультиотображение обратной связи; $B\colon E_1 \to E$ — ограниченный линейный оператор.

Рассмотрим задачу о существовании траекторий указанной системы, удовлетворяющих следующему общему граничному условию:

$$\mathcal{Q}x \in \mathcal{S}x, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{Q}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{BC}$ — линейный ограниченный оператор; $\mathcal{S}\colon \mathcal{C} \to Kv(\mathcal{BC})$ — J^c-мультиотображение.

Предположим, что выполнено следующее условие:

(A) линейный оператор $A\colon D(A) \to E$ порождает ограниченную C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ линейных операторов в E; обозначим $M = \sup\{\|T(t)\|\,; t \geqslant 0\}$.

Предположим, что мультиотображение $F\colon [0,a] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot,\psi)\colon [0;a] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п. в. $t \in [0;a]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon \mathcal{BC} \to Kv(E)$ п. н. св.;

$(F3)$ для любого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^p_+[0,a]$ такая, что для $\|\psi\|_{\mathcal{BC}} \leqslant r$ выполнено

$$\|F(t,\psi)\|_E \leqslant \omega_r(t)$$

для п. в. $t \in [0,a]$;

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^p([0,a])$ такая, что для каждого непустого ограниченного $Q \subset \mathcal{BC}$ выполнено:

$$\chi_E(F(t,Q)) \leqslant \mu(t)\varphi_{\mathcal{BC}}(Q) \text{ п. в. } t \in [0,a],$$

где χ_E — мнк Хаусдорфа в E, $\varphi_{\mathcal{BC}}(Q)$ — модуль послойной некомпактности множества Q.

Относительно мультиотображения Ψ будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(Ψ) естественно определенное мультиотображение $B\Psi\colon \mathcal{C} \to K(C([0,a];E)$ является J^c-мультиотображением.

Из условий $(F1)$–$(F3)$ следует (см. [15, теорема 1.3.5]), что определен мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}^p_F\colon \mathcal{C} \to P(L^p([0,a];E))$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}^p_F(x) = \{f \in L^p([0,a];E)\colon f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п. в. } t \in [0,a]\}.$$

Определение 10. Пара функций $x \in \mathcal{C}$ и $u \in C([0,a];E_1)$ образуют *интегральное решение системы* (2.1)–(2.3), если функция x удовлетворяет включению (2.3) и имеет вид

$$x\,(t) = \mathcal{G}\,(t)\,x\,(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}\,(t-s)\,[f\,(s) + Bu(s)]\;ds,$$

где $f \in \mathcal{P}^p_F(x)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)\,d\theta, \qquad \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)\,d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+,$$

а функция u удовлетворяет включению (2.2). Функция x называется *траекторией системы*, а функция u — *соответствующим управлением*.

Замечание 1 (см. [26]). $\xi_q(\theta) \geqslant 0,\ \int_0^\infty \xi_q(\theta)\,d\theta = 1,\ \int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}$.

Справедливо следующее утверждение (см. [26, 27]).

Лемма 1. *Оператор–функции $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ обладают следующими свойствами:*

(i) для всех $t \in [0,a]$, $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными ограниченными операторами и для всех $x \in E$ удовлетворяют оценкам:

$$\|\mathcal{G}(t)x\|_E \leqslant M\,\|x\|_E\,, \qquad \|\mathcal{T}(t)x\|_E \leqslant \frac{qM}{\Gamma(1+q)}\,\|x\|_E\,;$$

(ii) оператор–функции $\mathcal{G}(\cdot)$ и $\mathcal{T}(\cdot)$ сильно непрерывны, т. е. функции $t \in [0,a] \to \mathcal{G}(t)x$ и $t \in [0,a] \to \mathcal{T}(t)x$ непрерывны для всех $x \in E$.

Рассмотрим линейный оператор $G\colon L^p([0,a];E) \to \mathcal{C}$, заданный следующим образом

$$(Gf)(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\,f(s)\,ds, & t \in [0,a],\\ 0, & t \in (-\infty,0]. \end{cases}$$

Определение 11 (см. [15, определение 4.2.1]). Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$, последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p((0,a);E)$ называется *L^p-полукомпактной*, если она L^p-интегрально ограничена, т. е.

$$\|\xi_n(t)\| \leqslant \zeta(t) \ \text{ п. в. } \ t \in [0,a],\ n \geqslant 1,$$

где $\zeta \in L^p(0,a)$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0,a]$.

Предложение 5 (см. [20]).

(i) Если $\frac{1}{q} < p < \infty$, то существует константа $C_p > 0$ такая, что

$$\|(G\xi)(t) - (G\eta)(t)\|_E^p \leqslant C_p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p\,ds, \quad \xi,\eta \in L^p((0,a);E);$$

(ii) Пусть $\{\xi_n\}$ — L^p-полукомпактная последовательность в $L^p((0,a);E)$. Тогда последовательность $\{G\xi_n\}$ относительно компактна в $C([0,a];E)$ и, более того, слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$ в $L^1((0,a);E)$ влечет сходимость $G\xi_n \to G\xi_0$ в $C([0,a];E)$.

Обозначим $\mathcal{C}_0$ подпространство $\mathcal{C}$, состоящее из функций, имеющих вид

$$x[\varsigma](t) = \begin{cases} \mathcal{G}(t)\,x(0), & t \in [0;a],\\ \varsigma(t), & t \in (-\infty;0]. \end{cases}$$

где $\varsigma \in \mathcal{BC}$, и обозначим $\mathcal{Q}_0$ сужение $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{C}_0$.

Основным требованием на граничные операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ будет следующее условие:

($\mathcal{QS}$) существует непрерывный линейный оператор $\Lambda\colon \mathcal{BC} \to \mathcal{C}_0$ такой, что

$$(I - \mathcal{Q}_0\Lambda)\,(z - \mathcal{Q}G(f + Bu)) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{C}$, $z \in \mathcal{S}(x)$, $f \in \mathcal{P}_F^p(x)$ и $u \in \Psi(x)$.

Для того, чтобы привести пример выполнения условия $(\mathcal{QS})$, рассмотрим линейный ограниченный оператор $r\colon \mathcal{BC} \to \mathcal{C}_0$, который определим следующим образом:

$$r(\varsigma)(t) = \begin{cases} \mathcal{G}\,(t)\,\varsigma(0), & t \in [0;a] \\ \varsigma(t), & t \in (-\infty;0]. \end{cases}$$

Предположим следующее:

$(\widetilde{\mathcal{Q}})$ линейный ограниченный оператор $\widetilde{\mathcal{Q}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{BC}$, определенный как $\widetilde{\mathcal{Q}}\varsigma = \mathcal{Q}(r(\varsigma)|_{[0,a]})$ является обратимым.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия $(\widetilde{\mathcal{Q}})$ оператор Λ можно задать явным образом:

$$\Lambda\varsigma = r[\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}(\varsigma)].$$

В предположении что выполнено условие $(\mathcal{QS})$, рассмотрим мультиоператор

$$\Theta\colon \mathcal{C} \to Kv(\mathcal{C}),$$

заданный следующим образом:

$$\Theta(x) = \Lambda\mathcal{S}(x) + (I - \Lambda\mathcal{Q})G\left(\mathcal{P}_F^p(x) + B\Psi(x)\right).$$

Основное свойство мультиоператора Θ описывается следующим утверждением.

Теорема 4. *Каждая неподвижная точка мультиоператора Θ, то есть функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая соотношению*

$$x = \Lambda z + (I - \Lambda\mathcal{Q})G\,(f + Bu) \tag{2.4}$$

для некоторых $z \in \mathcal{S}(x)$, $f \in \mathcal{P}_F^p(x)$ и $u \in \Psi(x)$, вместе с функцией u образуют интегральное решение задачи (2.1)–(2.3).

Обратно, при выполнении условия $(\widetilde{\mathcal{Q}})$, если x и u — траектория и соответствующее управление для задачи (2.1)–(2.3)*, то функция x удовлетворяет* (2.4) *для $z = \mathcal{Q}x \in \mathcal{S}(x)$ и $f \in \mathcal{P}_F^p(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция x может быть представлена в виде

$$x = \Lambda\left(z - \mathcal{Q}G(f + Bu)\right) + G(f + Bu),$$

мы получаем, что x и u образуют интегральное решение задачи (2.1)–(2.3).

Проверим выполнение граничного условия. Используя условие $(\mathcal{QS})$, мы получаем

$$\begin{gathered} \mathcal{Q}x = \mathcal{Q}_0\Lambda z + \mathcal{Q}\,(I - \Lambda\mathcal{Q})\,G(f + Bu) = \\ = z - (z - \mathcal{Q}_0\Lambda z) + \mathcal{Q}G(f + Bu) + \mathcal{Q}_0\Lambda\mathcal{Q}G(f + Bu) = \\ = z - (I - \mathcal{Q}_0\Lambda)\,(z - \mathcal{Q}G(f + Bu)) = z \in \mathcal{S}x. \end{gathered}$$

Пусть теперь x — неподвижная точка оператора Θ. Тогда x удовлетворяет соотношению

$$x = r(\psi) + G(f + Bu)$$

для некоторого $f \in \mathcal{P}_F^p(x)$, где $\psi = x|_{(-\infty;0]}$. Тогда

$$\mathcal{Q}x = \widetilde{\mathcal{Q}}(\psi) + \mathcal{Q}G(f + Bu),$$

откуда мы получаем

$$\psi = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\big(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f + Bu)\big)$$

и, следовательно,

$$r(\psi) = \Lambda\big(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f + Bu)\big).$$

Таким образом,

$$x = \Lambda\big(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f + Bu)\big) + G(f + Bu) = \Lambda\mathcal{Q}x + (I - \Lambda\mathcal{Q})G(f + Bu) \in \Theta(x). \qquad \square$$

Предложение 6 (см. [15, предложение 4.2.1]). *Каждая L^p-полукомпактная последовательность $\{\xi_n\}$ относительно компактна в $L^1((0,a);E)$.*

Лемма 2. *Мультиотображение Θ является J^c-мультиоператором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим Θ в виде суммы

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,$$

где $\Theta_1 = \Lambda\mathcal{S}$, $\Theta_2 = (I - \Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}_F^p$ и $\Theta_3 = (I - \Lambda\mathcal{Q})GBu$.

Из условий, наложенных на мультиоператор $\mathcal{S}$, следует, что Θ_1 является J^c-мультиоператором.

Рассмотрим мультиоператор Θ_2. Очевидно, что он выпуклозначен. Пусть последовательности $\{x_n\}, \{z_n\} \subset \mathcal{C}$ такие, что $x_n \to x_0$, $z_n \in \Theta_2(x_n)$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$z_n = (I - \Lambda\mathcal{Q})G(f_n), \quad n \geqslant 1,$$

где $f_n \in \mathcal{P}_F^p(x_n)$, $\quad n \geqslant 1$. Благодаря условиям $(F3)$ и $(F4)$, последовательность $\{f_n\}$ — L^p-полукомпактна и по предложению 6 относительно компактна в $L^1((0,a);E)$ и, следовательно, мы можем предположить, что $f_n \rightharpoonup f_0 \in \mathcal{P}_F^p(x_0)$ в $L^1((0,a);E)$. Применяя предложение 5 (ii) получим $G(f_n) \to G(f_0)$ и, следовательно, непрерывность линейного оператора $I - \Lambda\mathcal{Q}$. Получаем, что $z_n \to z_0 = (I - \Lambda\mathcal{Q})G(f_0) \in \Theta_2(x_0)$. Мультиотображение Θ замкнуто и квазикомпактно, т. е. его сужение на любое компактное множество компактно. Это значит, что Θ_2 — п. н. св. мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Тогда, применяя предложение 1, заключаем, что Θ_2 является J^c-мультиотображением.

Из предложения 5 (i) следует, что оператор G ограничен в пространстве $\mathcal{C}$ и непрерывен. Это значит, что Θ_3 тоже J^c-мультиотображение. Теперь осталось применить предложение 2. $\square$

Теперь наша цель показать, что мультиоператор Θ является уплотняющим относительно соответствующей меры некомпактности. Для этого нам потребуются дополнительные утверждения.

Введем векторную меру некомпактности $\nu\colon Pb(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}_+^2$ со значениями в конусе $\mathbb{R}_+^2$, заданную следующим образом:

$$\nu(\Omega) = (\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega), \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(\Omega)),$$

где $\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega)$ — модуль послойной некомпактности, $\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(\Omega)$ — модуль равностепенной непрерывности в пространстве $\mathcal{C}$ (см. § 1).

Отметим, что

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant a} \varphi_{\mathcal{BC}}(\Omega_t),$$

где $\Omega_t \subset \mathcal{BC}, \Omega_t = \{x_t \colon x \in \Omega\}$ и для $t \in [0, a]$:

$$\varphi_{\mathcal{BC}}(\Omega_t) = \sup_{-\infty \leqslant \tau \leqslant 0} \chi(\Omega_t(\tau)) = \sup_{-\infty \leqslant \tau \leqslant 0} \chi(\Omega(t+\tau)) = \sup_{-\infty \leqslant \tau \leqslant t} \chi(\Omega(\tau)),$$

где χ — мнк Хаусдорфа в E.

Обозначим $\widetilde{\mathcal{C}}$ подпространство $\mathcal{C}$ состоящее из функций, равных нулю на $(-\infty; 0]$, и пусть

$$d = \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \|\mathcal{T}(t)\|^{(\chi)}.$$

Заметим, что из леммы 1 следует, что

$$0 \leqslant d \leqslant \frac{qM}{\Gamma(1+q)}.$$

Пусть выполнены следующие условия:

$(H1)$ существует $\rho \geqslant 0$ такое, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ выполнено

$$\varphi_{\mathcal{BC}}(\mathcal{Q}\Omega) \leqslant \rho \varphi_{\mathcal{C}}(\Omega);$$

$(H2)$

$$d \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \int_0^t (t-s)^{q-1} \mu(s)\, ds < \frac{1}{1 + \|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})} \rho},$$

где μ — функция из условия $(F4)$.

Лемма 3. *Мультиоператор Θ является ν-уплотняющим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как мультиоператоры Θ_1 и Θ_3 п. н. св. и мера некомпактности ν монотонна, алгебраически полуаддитивна и инвариантна по отношению к объединению с компактным множеством (см. [15]), то достаточно доказать утверждение для мультиотображения Θ_2, то есть показать, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ соотношение

$$\nu(\Theta_2(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega), \tag{2.5}$$

взятое в смысле частичного порядка в $\mathbb{R}^2$, порожденного конусом $\mathbb{R}^2_+$, влечет относительную компактность Ω.

Из (2.5) следует, что

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\Theta_2(\Omega)) \geqslant \varphi_{\mathcal{C}}(\Omega). \tag{2.6}$$

Возьмем произвольное $t \in (-\infty, a]$ и оценим $\chi_E(\Theta_2(\Omega)(t))$. Применяя условие $(H1)$, получаем:

$$\chi_E(\Lambda \mathcal{Q} G \mathcal{P}^p_F(\Omega)(t)) \leqslant \varphi_{\mathcal{C}}(\Lambda \mathcal{Q} G \mathcal{P}^p_F(\Omega)) \leqslant \|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})} \varphi_{\mathcal{BC}}(\mathcal{Q} G \mathcal{P}^p_F(\Omega)) \leqslant$$
$$\leqslant \|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})} \rho \varphi_{\mathcal{C}}(G \mathcal{P}^p_F(\Omega)) = \|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})} \rho \sup_{-\infty \leqslant t \leqslant a} \chi_E(G \mathcal{P}^p_F(\Omega)(t)).$$

Оценим $\chi_E\big(G \mathcal{P}^p_F(\Omega)(t)\big)$. Заметим, что для любого $0 \leqslant s \leqslant t$ получим:

$$\chi_E\big((t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) F(s, \Omega_s)\big) \leqslant (t-s)^{q-1} \|\mathcal{T}(t-s)\|^{(\chi)} \chi_E(F(s, \Omega_s)) \leqslant$$
$$\leqslant d(t-s)^{q-1} \mu(s) \varphi_{\mathcal{C}}(\Omega_s) \leqslant d(t-s)^{q-1} \mu(s) \varphi_{\mathcal{C}}(\Omega).$$

Из предложения 3 следует, что

$$\chi_E\big(G\mathcal{P}^p_F(\Omega)(t)\big) \leqslant d\int_0^t (t-s)^{q-1}\mu(s)\,ds\cdot\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega).$$

Используя свойство алгебраической полуаддитивности χ, получим следующие оценки

$$\chi_E\big((I-\Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}^p_F(\Omega)(t)\big) \leqslant d\left(1+\|\Lambda\|^{(\chi,\varphi)}\rho\right)\sup_{t\in[0,a]}\int_0^t (t-s)^{q-1}\mu(s)\,ds\cdot\varphi(\Omega) = \kappa\cdot\varphi(\Omega),$$

где

$$\kappa = d\left(1+\|\Lambda\|^{(\chi,\varphi)}\rho\right)\sup_{t\in[0,a]}\int_0^t (t-s)^{q-1}\mu(s)\,ds < 1$$

по свойству $(H2)$. Тогда имеем

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\Theta_2(\Omega)) \leqslant \kappa\cdot\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega).$$

Учитывая неравенство (2.6), получим

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega) = 0. \tag{2.7}$$

Теперь мы покажем, что множество Ω равностепенно непрерывно. Из соотношения

$$\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(\Theta_2(\Omega)) \geqslant \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(\Omega)$$

следует, что достаточно показать равностепенную непрерывность для $\Theta_2(\Omega)$. Это эквивалентно тому, что данное свойство выполняется для любой последовательности $\{z_n\}\subset$ $\subset (I-\Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}^p_F(\Omega)$. Возьмем последовательность $\{x_n\}\subset\Omega$ и $\{f_n\}$, $f_n\in\mathcal{P}^p_F(x_n)$ такую, что

$$z_n = (I-\Lambda\mathcal{Q})Gf_n, \quad n=1,2,\ldots.$$

Из условия $(F3)$ следует, что последовательность $\{f_n\}$ является L^p-интегрально ограниченной. Соотношение (2.7) дает равенство

$$\chi(\{x_t\}_n) = 0 \quad \forall t\in[0,a]$$

и, следовательно, по условию $(F4)$

$$\chi(\{f_n(t)\}) = 0 \quad \text{п. в. } t\in[0,a].$$

Из предложения 5 (ii) следует, что последовательность $\{Gf_n\}$, и, следовательно, z_n, относительно компактна, а следовательно, равностепенно непрерывна. Теперь относительная компактность множества Ω следует из теоремы Арцела–Асколи. $\square$

Свойства мультиоператора Θ дают возможность применить теорию топологической степени, описанную в пункте 1. Мы можем сформулировать следующий общий принцип существования интегральных решений задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 5. *При указанных выше условиях, пусть для ограниченного открытого множества $\Omega\subset\mathcal{C}$ не существует траекторий $x(\cdot)$ задачи (2.1)–(2.3) на границе $\partial\Omega$, и пусть*

$$\deg(i-\Theta,\overline{\Omega}) \neq 0.$$

Тогда множество интегральных решений $\{x,u\}$ задачи (2.1)–(2.3) непусто.

В качестве примера применения этого принципа рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 6. *При указанных выше условиях предположим дополнительно, что*

$(H3)$ *найдется последовательность функций* $\omega_n \in L^p_+(0;a)$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая, что:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|\omega_n\|_p = 0; \quad \text{и} \quad \sup_{\|x\|\leqslant n} \|F(t,x)\| \leqslant \omega_n(t) \quad \text{для п. в. } t \in (0;a),$$

$(H4)$ *выполнены следующие асимптотические условия:*

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{\|\mathcal{S}(x)\|}{\|x\|} = \liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{\|B\Psi(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Тогда множество интегральных решений задачи (2.1)–(2.3) *непусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что существует замкнутый шар $B_R \subset \mathcal{C}$ такой, что $\Theta(B_R) \subseteq B_R$. В предположении противного мы найдем последовательности $\{x_n\}, \{z_n\} \subset \mathcal{C}$ такие, что $z_n \in \Theta(x_n)$, $\|x_n\| \leqslant n$, $\|z_n\| > n$. Из условий, наложенных на мультиоператоры $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, условия $(F3)$ и предложения 5 (i) следует, что мультиоператор Θ преобразует ограниченные множества в ограниченные. Это означает, что переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем предположить, что $\|x_n\|_{\mathcal{C}} \to \infty$. Тогда получим

$$\|z_n\|_{\mathcal{C}} \leqslant \|\Lambda\mathcal{S}x_n\| + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\|\big(\|Gf_n\| + \|G\|_{\mathcal{C}}\|B\Psi(x_n)\|\big)$$

для некоторого $f_n \in \mathcal{P}^p_F(x_n)$, где $\|G\|_{\mathcal{C}}$ — норма ограниченного оператора G в пространстве $\mathcal{C}$. Применяя предложение 5 (i), получаем, что

$$\|z_n\| \leqslant \|\Lambda\|\|\dot{\mathcal{S}}x_n\| + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\|\big(\sqrt[p]{C_p}\|f_n\|_p + \|G\|_{\mathcal{C}}\|B\Psi(x_n)\|\big).$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 < \frac{\|z_n\|}{n} &\leqslant \|\Lambda\|\frac{\|\mathcal{S}x_n\|}{n} + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\|\left(\sqrt[p]{C_p}\frac{1}{n}\|f_n\|_p + \|G\|_{\mathcal{C}}\frac{\|B\Psi(x_n)\|}{n}\right) \leqslant \\ &\leqslant \|\Lambda\|\frac{\|\mathcal{S}x_n\|}{\|x_n\|} + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\|\left(\sqrt[p]{C_p a}\frac{1}{n}\|\omega_n\|_p + \|G\|_{\mathcal{C}}\frac{\|B\Psi(x_n)\|}{\|x_n\|}\right). \end{aligned}$$

Применяя условия $(H3)$ и $(H4)$, мы приходим к противоречию. Осталось применить теорему 2 к ограничению Θ на B_R. □

В случае, когда мультиотображения F, $\mathcal{S}$ и $B\Psi$ глобально ограничены, получаем следующий оптимизационный результат.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* $(\widetilde{\mathcal{Q}})$, *а также существует функция* $\omega \in L^p_+(0,a)$, *и константы* $s > 0$, $b > 0$ *такие, что*

(1) *для любого* $\psi \in \mathcal{BC}$ *выполнено* $\|F(t,\psi)\|_E \leqslant \omega(t)$ *для п. в.* $t \in (0,a)$;

(2) *для любого* $x \in \mathcal{C}$ *выполнено* $\|\mathcal{S}(x)\|_{\mathcal{B}} \leqslant s$;

(3) $\|B\Psi(x)\|_{C([0,a];E)} \leqslant b$.

Тогда существует траектория $x_\star$ *и соответствующее управление* $u_\star$ *задачи* (2.1)–(2.3) *такие, что*

$$\phi(x_\star) = \inf\{\phi(x) \colon x \in \Sigma\},$$

где Σ *обозначает множество всех траекторий задачи* (2.1)–(2.3) *и* ϕ — *заданный полунепрерывный снизу функционал на пространстве* $\mathcal{C}$.

Доказательство. Согласно теореме 4 все траектории задачи (2.1)–(2.3) определяются неподвижными точками мультиоператора Θ множество которых непусто по теореме 6. Очевидно, что это множество априори ограничено константой

$$\|\Lambda\|s + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\| \big(\sqrt[p]{C_p} a\|\omega\|_p + \|G\|_{\mathcal{C}} b \big).$$

Теперь вывод следует из того, что ограниченное множество неподвижных точек уплотняющего мультиоператора Θ компактно (см. [15, предложение 3.5.1]). $\square$

Финансирование. Работа первого и второго авторов выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасова М. С., Петросян Г. Г. О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // Изв. вузов. Матем. 2019. № 9. С. 3–15. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-9-3-15
2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. Вып. 1 (211). С. 59–126. http://mi.mathnet.ru/umn3161
3. Борсук К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
4. Мышкис А. Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории // Матем. сб. 1954. Т. 34 (76). № 3. С. 525–540. http://mi.mathnet.ru/msb5261
5. Петросян Г. Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве // Уфимск. матем. журн. 2020. Т. 12. Вып. 3. С. 71–82. http://mi.mathnet.ru/ufa529
6. Afanasova M., Liou Y.-Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 2019. Vol. 20. No. 9. P. 1919–1935. http://www.yokohamapublishers.jp/online2/opjnca/vol20/p1919.html
7. Appell J., López B., Sadarangani K. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2018. Vol. 2. Issue 1. P. 25–33. https://doi.org/10.23952/jnva.2.2018.1.03
8. Arutyunov A. V., Obukhovskii V. V. Convex and set-valued analysis. Berlin: De Gruyter, 2017. https://doi.org/10.1515/9783110460308
9. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space // Journal of Function Spaces. 2015. Vol. 2015. P. 1–10. https://doi.org/10.1155/2015/651359
10. Getmanova E., Obukhovskii V., Yao J.-Ch. A random topological fixed point index for a class of multivalued maps // Applied Set-Valued Analysis and Optimization. 2019. Vol. 1. Issue 2. P. 95–103. https://doi.org/10.23952/asvao.1.2019.2.01
11. Górniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings. Dordrecht: Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/1-4020-4666-9
12. Hale J. K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funkcialaj Ekvacioj. Serio Internacia. 1978. Vol. 21. P. 11–41. https://zbmath.org/0383.34055
13. Hino Y., Murakami S., Naito T. Functional differential equations with infinite delay. Berlin: Springer, 1991. https://doi.org/10.1007/BFb0084432
14. Hyman D. On decreasing sequences of compact absolute retracts // Fundamenta Mathematicae. 1969. Vol. 64. No. 1. P. 91–97. https://doi.org/10.4064/fm-64-1-91-97
15. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin: De Gruyter, 2001. https://doi.org/10.1515/9783110870893

16. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Analysis. 2018. Vol. 97. Issue 4. P. 571–591. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1277583
17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces // Fixed Point Theory and Applications. 2017. Vol. 2017. Issue 1. Article number 28. https://doi.org/10.1186/s13663-017-0621-0
18. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions // Fixed Point Theory and Applications. 2019. Vol. 2019. Issue 1. Article number 2. https://doi.org/10.1186/s13663-018-0652-1
19. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. On a periodic boundary value problem for a fractional–order semilinear functional differential inclusions in a Banach space // Mathematics. 2019. Vol. 7. Issue 12. Article number 1146. https://doi.org/10.3390/math7121146
20. Ke T. D., Obukhovskii V. V., Wong N.-Ch., Yao J.-Ch. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays // Applicable Analysis. 2013. Vol. 92. No. 1. P. 115–137. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454
21. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
22. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley-Interscience, 1993.
23. Obukhovskii V., Gel'man B. Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications. Singapore: World Scientific, 2020. https://doi.org/10.1142/11825
24. Обуховский В. В. О полулинейных функционально-дифференциальных включениях в банаховом пространстве и управляемых системах параболического типа // Автоматика. 1991. № 3. С. 73–81.
25. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.
26. Zhang Z., Liu B. Existence of mild solutions for fractional evolution equations // Fixed Point Theory. 2014. Vol. 15. No. 1. P. 325–334. http://www.math.ubbcluj.ro/~nodeacj/vol__15(2014)_no__1.php
27. Zhou Y. Fractional evolution equations and inclusions: analysis and control. London: Academic Press, 2016. https://doi.org/10.1016/C2015-0-00813-9

Поступила в редакцию 25.11.2020

Афанасова Мария Сергеевна, старший преподаватель, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, 394043, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8722-520X
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Обуховский Валерий Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, 394043, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Петросян Гарик Гагикович, к. ф.-м. н., доцент, ведущий научный сотрудник, научно-образовательный центр, Воронежский государственный университет инженерных технологий, 394036, Россия, г. Воронеж, пр. Революции, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Цитирование: М. С. Афанасова, В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 167–185.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 2. Pp. 167–185.

M. S. Afanasova, V. V. Obukhovskii, G. G. Petrosyan

On a generalized boundary value problem for a feedback control system with infinite delay

Keywords: feedback control system, optimal solution, fractional differential inclusion, infinite delay, measure of noncompactness, condensing operator, fixed point, topological degree.

MSC2020: 34A08, 34A60, 47H11, 49J53, 49K27

DOI: 10.35634/vm210201

We consider a non-local boundary value problem for a feedback control system described by a semilinear functional-differential inclusion of fractional order with infinite delay in a separable Banach space. The general principle of existence of solutions to the problem in terms of the difference from zero of the topological degree of the corresponding vector field is given. We prove a concrete example (Theorem 6) of the implementation of this general principle. The existence of an optimal solution to the posed problem is proved, which minimizes the given lower semicontinuous quality functional.

Funding. The work of the first and second authors is supported by the State contract of the Russian Ministry of Education as part of the state task (contract FZGF-2020-0009). The work of the third author is supported by RFBR according to the research project no. 19-31-60011.

REFERENCES

1. Afanasova M. S., Petrosyan G. G. On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, issue 9, pp. 1–11. https://doi.org/10.3103/S1066369X19090019
2. Borisovich Yu. G., Gel'man B. D., Myshkis A. D., Obukhovskii V. V. Topological methods in the fixed-point theory of multi-valued maps, *Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, no. 1, pp. 65–143. https://doi.org/10.1070/RM1980v035n01ABEH001548
3. Borsuk K. *Theory of retracts*, Warsaw: PWN, 1967.
Translated under the title *Teoriya retraktov*, Moscow: Mir, 1971.
4. Myshkis A. D. Generalizations of the theorem on a fixed point of a dynamical system inside of a closed trajectory, *Mat. Sb. (N. S.)*, 1954, vol. 34 (76), no. 3, pp. 525–540 (in Russian).
http://mi.mathnet.ru/eng/msb5261
5. Petrosyan G. G. On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 69–80. https://doi.org/10.13108/2020-12-3-69
6. Afanasova M., Liou Y.-Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 1919–1935.
http://www.yokohamapublishers.jp/online2/opjnca/vol20/p1919.html
7. Appell J., López B., Sadarangani K. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives, *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, 2018, vol. 2, issue 1, pp. 25–33. https://doi.org/10.23952/jnva.2.2018.1.03
8. Arutyunov A. V., Obukhovskii V. V. *Convex and set-valued analysis*, Berlin: De Gruyter, 2017.
https://doi.org/10.1515/9783110460308
9. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space, *Journal of Function Spaces*, 2015, vol. 2015, pp. 1–10. https://doi.org/10.1155/2015/651359
10. Getmanova E., Obukhovskii V., Yao J.-Ch. A random topological fixed point index for a class of multivalued maps, *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, 2019, vol. 1, issue 2, pp. 95–103.
https://doi.org/10.23952/asvao.1.2019.2.01
11. Górniewicz L. *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Dordrecht: Springer, 2006.
https://doi.org/10.1007/1-4020-4666-9

12. Hale J. K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcialaj Ekvacioj. Serio Internacia*, 1978, vol. 21, pp. 11–41. https://zbmath.org/0383.34055
13. Hino Y., Murakami S., Naito T. *Functional differential equations with infinite delay*, Berlin: Springer, 1991. https://doi.org/10.1007/BFb0084432
14. Hyman D. On decreasing sequences of compact absolute retracts, *Fundamenta Mathematicae*, 1969, vol. 64, no. 1, pp. 91–97. https://doi.org/10.4064/fm-64-1-91-97
15. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, Berlin: De Gruyter, 2001. https://doi.org/10.1515/9783110870893
16. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space, *Applicable Analysis*, 2018, vol. 97, issue 4, pp. 571–591. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1277583
17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2017, vol. 2017, issue 1, article number 28. https://doi.org/10.1186/s13663-017-0621-0
18. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions, *Fixed Point Theory and Applications*, 2019, vol. 2019, issue 1, article number 2. https://doi.org/10.1186/s13663-018-0652-1
19. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-Ch. On a periodic boundary value problem for a fractional–order semilinear functional differential inclusions in a Banach space, *Mathematics*, 2019, vol. 7, issue 12, article number 1146. https://doi.org/10.3390/math7121146
20. Ke T. D., Obukhovskii V., Wong N.-Ch., Yao J.-Ch. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays, *Applicable Analysis*, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115–137. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454
21. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
22. Miller K. S., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York: Wiley-Interscience, 1993.
23. Obukhovskii V., Gel'man B. *Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications*, Singapore: World Scientific, 2020. https://doi.org/10.1142/11825
24. Obukhovskii V. V. Semilinear functional-differential inclusions in a Banach space and controlled parabolic systems, *Soviet Journal of Automation and Information Sciences*, 1991, vol. 24, no. 3, pp. 71–79. https://zbmath.org/?q=an:0791.93049
25. Podlubny I. *Fractional differential equations*, San Diego: Academic Press, 1999.
26. Zhang Z., Liu B. Existence of mild solutions for fractional evolution equations, *Fixed Point Theory*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 325–334. http://www.math.ubbcluj.ro/~nodeacj/vol__15(2014)_no__1.php
27. Zhou Y. *Fractional evolution equations and inclusions: analysis and control*, London: Academic Press, 2016. https://doi.org/10.1016/C2015-0-00813-9

Received 25.11.2020

Afanasova Maria Sergeevna, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, ul. Lenina, 86, Voronezh, 394043, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8722-520X
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Obukhovskii Valerii Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, ul. Lenina, 86, Voronezh, 394043, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Petrosyan Garik Gagikovich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Research and Educational Center, Voronezh State University of Engineering Technologies, pr. Revolyutsii, 19, Voronezh, 394036, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Citation: M. S. Afanasova, V. V. Obukhovskii, G. G. Petrosyan. On a generalized boundary value problem for a feedback control system with infinite delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 167–185.