ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МЕХАНИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 324–339.

УДК 532.546

© *А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский*

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОЛЕ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрена нелинейная задача о поле давления при одномерной плоской фильтрации, когда изменения плотности скелета, а также фильтрующейся жидкости и давления связаны пропорционально. Для решения задач использован асимптотический метод, основанный на введении в рассматриваемой задаче формального параметра и представлении искомого решения в виде асимптотической формулы по этому параметру. Показано, что постановки соответствующих задач для коэффициентов асимптотического разложения являются линейными, а для их решения могут быть использованы классические методы. Найдены аналитические выражения для коэффициентов асимптотического разложения решения. Показано, что соответствующие коэффициенты разложения остаточного члена текущего номера и все предшествующие ему по тому же формальному параметру, что и для искомого решения, обращаются в нуль. Использованный подход открывает новые возможности решения нелинейных задач фильтрации в неоднородной анизотропной пористой среде.

Ключевые слова: фильтрация, асимптотическое разложение, поле давления.

DOI: 10.35634/vm200213

Исследование полей давления в пористых средах представляет актуальное направление механики и математики в связи с развитием современных эффективных технологий использования природных ресурсов [1–5]. В работах [1, 2] развита теория взаимосвязанных полей давления и температуры с учетом разложения газовых гидратов в пористой среде, которая может быть положена в основу развития перспективных технологий извлечения природных ресурсов.

Успешно развиваются аналитические и численные методы решения задач о фильтрационных полях давления в условиях гидроразрыва пласта [3, 4]. В [4] получено аналитическое решение уравнения упругого режима фильтрации для однородной одномерной гетерогенной среды с учетом обмена флюида между пористой средой и трещинами. Найдены новые результаты для задач, в основу которых положен двучленный закон фильтрации, в котором градиент давления выражен через скорость фильтрации в первой и второй степенях. Н. Е. Леонтьев в [5] построил приближенные аналитические решения и представил численные расчеты для задач такого рода. В статье [6] развиты методы решения таких задач со свободными границами.

Задачам теории фильтрации с предельным градиентом сдвига посвящена статья Бадриева И. Б. и др. [7]. Полученные результаты отнесены к нелинейным моделям фильтрации жидкости. Для решения задач теории фильтрации успешно развиваются методы комплексного анализа, обзор которых представлен в работе [8].

Как показывает обзор литературы, исследованию влияния зависимости физических параметров (проницаемость, пористость, вязкость) от давления, в связи с возникающими математическими трудностями, особенно при построении аналитического решения, не уделено достаточного внимания. Вместе с тем развитие методов повышения нефтегазоизвлечения связано с использованием высоких перепадов давлений и требует развития теории высокоамплитудных процессов фильтрации, когда зависимостью фильтрационных параметров от полей давления, например при гидроразрыве пласта, пренебречь нельзя.

Проблемы учета зависимостей фильтрационных параметров от давления приводят к широкому классу задач, которые представляют ядро нелинейной проблематики фильтрационного течения. В данной работе на примере простейшей нелинейной задачи фильтрации показано, что для решения задач такого рода могут быть использованы асимптотические методы. Экспериментально установлено, что в широком диапазоне перепадов давления до 10^3 атм. и выше физические параметры изменяются пропорционально перепадам давления, причем часто соответствующие коэффициенты перед перепадом давления являются малыми. При этом даже для случая линейной зависимости плотности среды от давления фильтрационная задача представляется нелинейной.

Традиционно линеаризация уравнения пьезопроводности осуществляется путем пренебрежения зависимостью плотности от давления в дивергентном члене [4, 5, 9]. Поэтому полученные ниже результаты представляют естественный переход от линейных моделей к нелинейным.

Реализация асимптотического метода осуществлена путем добавления формального параметра в качестве множителя перед коэффициентом сжимаемости. Это позволило выгодно объединить малость физического параметра и необходимость вариации формального параметра для построения асимптотических приближений.

Асимптотические методы традиционно успешно используются в науке. Многие удачные разновидности асимптотических подходов, такие как метод ВКБ в квантовой механике [10], оформлены в самостоятельные научные направления и описаны в монографиях [11–16]. Отметим, что в фундаментальной математике и механике ныне успешно развивается метод возмущений, использующий изучение асимптотических откликов на вариации формальных параметров, искусственно добавляемых в различных компонентах задачи [17–25].

Использование асимптотических методов потребовало ослабления требований к сходимости соответствующих рядов. Общеизвестно, что даже расходящиеся ряды асимптотических представлений обладают удивительным и загадочным свойством, заключающимся в том, что добавление каждого нового слагаемого увеличивает точность вычислений физических полей [26]. Общего ответа на вопрос о том, как расходимость согласуется с увеличением точности, до настоящего времени нет. По этой причине классические ряды заменяются асимптотическими формулами — ограниченными последовательностями с добавлением остаточного члена, свойства которого подвергаются обязательным дополнительным исследованиям, позволяющим ответить на вопрос о применимости полученных разложений к исследованию реальных физических полей.

Описанные особенности асимптотических методов превращают их использование в особый род искусства, требующего выражения высоких интеллектуальных способностей и интуиции исследователя как при постановке задач, так и на стадии построения решения. Видимо, именно эти особенности асимптотического метода позволяют постоянно расширять круг задач, в том числе нелинейных, возникающих на практике. Более того, логика развития науки показывает, что серьезные научные исследования предполагают развитие и широкое применение асимптотических методов. Это относится и к численным, в том числе конечно-разностным, расчетам, поскольку опыт их использования показывает, что выявляемые на их основе «физические эффекты» довольно часто связаны с неизбежными «ловушками» (bags) в реализуемых алгоритмах и не имеют ничего общего с реальными явлениями природы.

Постановка задач теории фильтрации основана на законе сохранения или изменения массы, который представлен в виде уравнения неразрывности, в двухмерном случае имеющем вид $\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$. Использование двухмерного уравнения неразрывности, даже для одномерного горизонтального течения, связано с необходимостью учета в нелинейных задачах начальных стационарных полей давления, в пластовых условиях вызываемых чаще всего гравитационными полями, вектор ускорения которых антиколлинеарен вертикальной оси z.

Отметим, что построение нелинейных уравнений фильтрации в предшествующих работах [27,28] и др. осуществлено без учета гравитационного поля. К сожалению, нелинейные задачи теории фильтрации, в отличие от линейных, не позволяют исключить начальные условия, приняв их за начало отсчета. Приведенный здесь вывод, в отличие от известных, иллюстрирует важность учета гравитационного поля даже для случая, когда векторы ускорения свободного падения и скорости фильтрации взаимно ортогональны. По этой же причине требуют уточнения асимптотические приближения, полученные ранее на основе метода малого параметра, в качестве которого использован формальный параметр перед функцией источников [29] или значение удельного дебита, как в работе [30].

Скорость фильтрации в случае одномерного течения, как следует из практических соображений, является функцией отклонения градиента давления от начального, поскольку в противном случае движение жидкости в пористой среде не наблюдается. Так как вектор ускорения свободного падения антиколлинеарен оси z, то вектор, вызывающий фильтрацию, записывается как $\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\rho g)\overrightarrow{k}$. Разложение Маклорена вектора скорости фильтрации по этому вектору, с учетом того, что при нулевых значениях вызывающего вектора скорость фильтрации равна нулю, представляется в первом приближении в виде закона Дарси: $\overrightarrow{v}=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{i}-\frac{k_z}{\mu}(\frac{\partial P}{\partial z}-\rho g)\overrightarrow{k}$. Здесь введены обозначения для компонент тензора проницаемости $k_x=k=-\mu\frac{\partial v_x}{\partial P_x}$, $k_z=-\frac{\partial v_x}{\partial(P_z'-\rho g)}$. Учтено также, что оси характеристического эллипсоида анизотропной среды выбраны совпадающими с осями координат. Такой выбор системы координат для двухмерного случая является естественным применительно к условиям горизонтальной фильтрации в реальных коллекторах нефти и газа. Отметим также, что выражение для скорости фильтрации, в отличие от уравнения неразрывности, не инвариантно относительно анизотропии среды.

Опыт показывает, что компоненты тензора проницаемости, плотность жидкости, вязкость и пористость являются функциями от давления: $k=k(P)$, $k_z=k_z(P)$, $\rho=\rho(P)$, $\mu=\mu(P)$ и $m=m(P)$. Нелинейное уравнение, получающееся путем подстановки закона Дарси в уравнение неразрывности, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(P)m(P))-\frac{\partial}{\partial x}(\rho(P)\frac{k(P)}{\rho(P)}\frac{\partial P}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial z}[\rho(P)\frac{k_z(P)}{\rho(P)}(\frac{\partial P}{\partial z}-\rho(P)g)]=0.$$

Для рассматриваемого случая одномерного плоского фильтрационного горизонтального течения, когда векторы скорости и ускорения свободного падения ортогональны, уравнение упрощается. Для простоты ограничимся также случаем, когда плотность жидкости и материала скелета зависит от давления линейно. Кроме того, проницаемость пористой среды и вязкость фильтрующейся среды считаются постоянными.

Уравнение состояния фильтрующейся среды $\rho=\rho(P,T)$ представим в баротропном виде. Кроме того, зависимость плотности от давления запишем в виде линейной функции, используя два первых члена разложения плотности в виде ряда Тейлора в окрестности некоторого давления P_l, выбор которого может быть осуществлен на основе дополнительных требований, предъявляемых к модели: $\rho=\rho_0(1+\alpha(P-P_l))$. Аналогичное уравнение состояния для материала скелета представляется как $\rho_s=\rho_{s0}(1+\beta_s(P-P_l))$. Здесь $\alpha=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial P}(P=P_l)$, $\beta_s=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_s}{\partial P}(P=P_l)$.

Для определения начального невозмущенного поля $\tilde{P}$ воспользуемся тем, что скорость фильтрации до наложения возмущений, связанных с разработкой месторождения, равна нулю. Из закона Дарси получим уравнение для невозмущенного поля $\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z}=\rho g$, решение которого, методом разделения переменных, представим в неявном виде $\int_{P_0}^{\tilde{P}}\frac{dp}{\rho(p)}=gz$.

Согласно полученной неявной зависимости давление $\tilde{P}$ зависит только от z. Поскольку, по предположению, фильтрация происходит только по оси x, то уравнение для начального поля давления выполняется и в процессе фильтрации, а нелинейное уравнение запишется как $\frac{\partial m\rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(\rho(P)\frac{\partial P}{\partial x}) = 0$.

Далее преобразуем левую часть полученного уравнения, воспользовавшись выражением сложной производной от произведения пористости на плотность по времени $\frac{\partial \rho m}{\partial t} = \frac{d\rho m}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}$. Для производной от произведения плотности и пористости по давлению получим $\frac{d\rho m}{dP} = \rho\frac{dm}{dP} + m\frac{d\rho}{dP}$. Производная от плотности фильтрующейся среды по давлению с помощью линеаризованного уравнения состояния представляется как $\frac{d\rho}{dP} = \rho_0\alpha$.

Уравнение неразрывности для скелета пористой среды имеет вид $\frac{\partial \rho_s(1-m)}{\partial t} = 0$. Отсюда получим выражение для производной от пористости по давлению в виде $\frac{\partial m}{\partial P} = (1-m)\frac{\rho_{s0}}{\rho_s}\beta_s$. Если дополнительно полагать, что зависимость пористости от давления является линейной, то следует считать $\rho_s = \rho_{s0}$, $m = m_0$ в соотношении $\frac{d\rho m}{dP} = \rho_0 m\alpha + \rho(1-m)\frac{\rho_{s0}}{\rho_s}\beta_s$. Окончательное выражение для искомой производной представим как $\frac{d\rho m}{dP} = \rho_0(m\alpha + (1-m)\beta_s)$.

С учетом этого искомое уравнение для поля давления при линейной одномерной горизонтальной фильтрации приобретает вид

$$\rho_0(m\alpha + (1-m)\beta_s)\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\big(1+\alpha(P-P_l)\big)\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0. \tag{1}$$

При выводе классического уравнения пьезопроводности в дивергентном члене уравнения неразрывности плотность считается постоянной. Формально это означает, что α полагается равным нулю во втором слагаемом, в то же время отличным от нуля в первом слагаемом нелинейного уравнения, что представляется неестественным с математической точки зрения. В данной статье указанное ограничение снимается, поэтому соответствующее уравнение для поля давления сохраняет свойства нелинейности. Поскольку ρ_0 не зависит от давления, оно может быть сокращено в уравнении (1), которое приобретает вид

$$(m\alpha + (1-m)\beta_s)\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left((1+\alpha(P-P_l))\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0. \tag{2}$$

Постановка задачи о поле давления при одномерной линейной фильтрации включает нелинейное уравнение (2), начальное и граничные условия. Полагается, что при $t = 0$ давление совпадает с невозмущенным:

$$P|_{t=0} = \tilde{P}.$$

В начальный момент на выходе из пористой среды времени создается и далее поддерживается заданный перепад давления P_w:

$$P|_{x=0} = \tilde{P} + P_w.$$

При неограниченном удалении от источника возмущений поле давления стремится к невозмущенному, поскольку создаваемые с помощью реальных насосов возмущения давления ограничены пространственно:

$$P|_{x\to\infty} = \tilde{P}.$$

При формулировке задачи для возмущений поля давления, вызванных источником, локализованным на выходе из пористой среды, учтем, что невозмущенное поле давления $\tilde{P}$ зависит только от вертикальной координаты z и не зависит от координаты x и времени t.

По этой причине производные от $\tilde{P}$ по x и t равны нулю, а вычитание невозмущенного давления $\tilde{P}$ из полного P в производных является тождественным преобразованием и не изменяет их вида в уравнении (2). Далее, добавим и вычтем равновесное давление в выражении для плотности, входящее в уравнение

$$(\alpha m + (1-m)\beta_s)\frac{\partial(P-\tilde{P})}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(1+\alpha(P-\tilde{P}+\tilde{P}-P_l))\frac{\partial(P-\tilde{P})}{\partial x} = 0.$$

Аналогичное преобразование осуществим в начальном и граничном условиях:

$$(P-\tilde{P})|_{t=0} = 0, \quad (P-\tilde{P})|_{x=0} = P_w, \quad \lim(P-\tilde{P})|_{x\to\infty} = 0.$$

Формулировка нелинейной задачи для возмущений поля давления $\Pi = P - \tilde{P}$ имеет вид

$$(\alpha m + (1-m)\beta_s)\frac{\partial\Pi}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(1+\alpha(\Pi+\tilde{P}-P_l))\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\Pi|_{t=0} = 0, \quad \Pi|_{x=0} = P_w, \quad \lim\Pi|_{x\to\infty} = 0. \tag{4}$$

Задача (3)–(4) учитывает зависимость поля давления от координаты z, поскольку невозмущенное поле давления является функцией от вертикальной координаты: $\tilde{P} = \tilde{P}(z)$.

Для асимптотической параметризации добавим в задачу формальный параметр ε в виде сомножителя перед малым параметром задачи α:

$$(\varepsilon\alpha m + (1-m)\beta_s)\frac{\partial\Pi}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(1+\varepsilon\alpha(\Pi+\tilde{P}-P_l))\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$\Pi|_{t=0} = 0, \quad \Pi|_{x=0} = P_w, \quad \lim\Pi|_{x\to\infty} = 0. \tag{6}$$

Заметим, что при $\varepsilon = 1$ эта задача совпадает с исходной. Такая параметризация представляет дополнительные возможности, поскольку позволяет разделить физические и математические свойства малого параметра α и тем самым и разгрузить требования к нему.

Решение задачи представим в виде асимптотической формулы по параметру ε:

$$\Pi = \Pi^{(0)} + \varepsilon\Pi^{(1)} + \ldots + \varepsilon^n\Pi^{(n)} + \Theta_n, \tag{7}$$

подстановка которой в (5)–(6) позволяет представить задачу в виде разбитой по степеням асимптотического параметра:

$$\begin{gathered}(1-m)\beta_s\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(0)}}{\partial x^2} + \varepsilon[(1-m)\beta_s\frac{\partial\Pi^{(1)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(1)}}{\partial x^2} + \alpha(m\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \\ - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(\Pi^{(0)}+\tilde{P}-P_l)\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}] + \ldots = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\Pi^{(0)}|_{t=0} + \varepsilon\Pi^{(1)}|_{t=0} + \ldots = 0, \\ \Pi^{(0)}|_{x=0} - P_w + \varepsilon\Pi^{(1)}|_{x=0} + \ldots = 0, \\ \lim(\Pi^{(0)}|_{x\to\infty} + \varepsilon\Pi^{(1)}|_{x\to\infty}) + \ldots = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Нулевое приближение задачи следует из слагаемых выражений (8)–(9) при *нулевой* степени параметра асимптотического разложения

$$(1-m)\beta_s\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(0)}}{\partial x^2} = 0, \tag{10}$$

$$\Pi^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad \Pi^{(0)}|_{x=0} = P_w, \quad \lim \Pi^{(0)}|_{x\to\infty} = 0. \tag{11}$$

Задача (10)–(11) в пространстве изображений Лапласа–Карсона имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi^{(0)u}}{\partial x^2} - \frac{(1-m)\beta_s \mu}{k} p \Pi^{(0)u} = 0, \tag{12}$$

$$\Pi^{(0)u}|_{x=0} = P_w, \quad \lim \Pi^{(0)u}|_{x\to\infty} = 0. \tag{13}$$

Решение задачи (12)–(13) запишется как

$$\Pi^{(0)u} = P_w \exp\left(\frac{(1-m)\beta_s\mu}{k} x\sqrt{p}\right).$$

Оригинал выражения отыскивается с помощью соотношения (23.89) из [31]:

$$\exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right) \to \ \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),$$

а решение в нулевом приближении представляется в виде

$$\Pi^{(0)} = P_w \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-m)\beta_s\mu}{kt}} x\right). \tag{14}$$

Нулевое приближение задачи по виду аналогично решению соответствующей задачи для линеаризованного уравнения пьезопроводности и отличается лишь входящими в него физическими параметрами. Анализ полученного выражения (14) показывает, что его точность увеличивается с ростом сжимаемости скелета пористой среды.

Далее рассмотрим задачу для нулевого остаточного члена Θ_0. Для простоты опустим нижний индекс в обозначении остаточного члена и, воспользовавшись формулой (7), получим

$$\Pi = \Pi^{(0)} + \Theta.$$

Подставим это выражение в исходную постановку (5)–(6) и, воспользовавшись выражениями (10)–(11), представим задачу для нулевого остаточного члена в виде

$$(\varepsilon\alpha m + (1-m)\beta_s)\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \varepsilon\alpha(\Pi^{(0)} + \Theta + \tilde{P} - P_0)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) =$$
$$= -\varepsilon\alpha\left[m\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left((\Pi^{(0)} + \Theta + \tilde{P} - P_0)\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right], \tag{15}$$

$$\Theta|_{t=0} = 0, \Theta|_{x=0} = 0, \Theta|_{x\to\infty} = 0. \tag{16}$$

Как и решение исходной задачи, будем отыскивать Θ в виде асимптотической формулы по параметру ε:

$$\Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon\Theta^{(1)} + \varepsilon^2\Theta^{(2)} + \ldots,$$

подставив которую в уравнения и условия задачи для нулевого остаточного члена (15)–(16), выпишем постановку для нулевого коэффициента разложения нулевого же остаточного члена:

$$(1-m)\beta_s\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Theta^{(0)}}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Theta^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad \Theta^{(0)}|_{x=0} = 0, \quad \Theta^{(0)}|_{x\to\infty} = 0.$$

Нетрудно показать, что задача имеет только тривиальное решение: $\Theta^{(0)} = 0$. Это означает, что нулевой остаточный член можно представить как $\Theta_0 = \varepsilon\Theta^{(1)} + \varepsilon^2\Theta^{(2)} + \ldots$. Таким образом, остаточный член содержит слагаемые только первого порядка и выше по параметру асимптотического разложения, поэтому предел отношения нулевого остаточного члена Θ_0 к нулевому приближению решения нелинейной задачи $\Pi^{(0)}$, при устремлении формального параметра разложения ε к нулю, также равен нулю. Это означает, что нулевой коэффициент $\Pi^{(0)}$, или нулевое приближение, является асимптотическим представлением решения нелинейной задачи о фильтрационном поле давления.

Постановка задачи *для первого коэффициента* разложения поля давления (или первого приближения) следует из слагаемых выражений (8)–(9) при первой степени параметра асимптотического разложения. После несложных преобразований получим

$$(1-m)\beta_s\frac{\partial\Pi^{(1)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(1)}}{\partial x^2} = -\alpha\left[m\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left((\Pi^{(0)} + \tilde{P} - P_l)\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right] = q^{(0)}(x,t), \quad (17)$$

$$\Pi^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \Pi^{(1)}|_{x=0} = 0, \quad \lim \Pi^{(1)}|_{x\to\infty} = 0. \quad (18)$$

В пространстве изображений Лапласа–Карсона задача приобретает вид

$$(1-m)\beta_s p\Pi^{(1)u} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(1)u}}{\partial x^2} = q^{(0)u}(x,p), \quad (19)$$

$$\Pi^{(1)u}|_{x=0} = 0, \quad \lim \Pi^{(1)u}|_{x\to\infty} = 0. \quad (20)$$

Функция источников в пространстве оригиналов выражается через решение в нулевом приближении следующим образом:

$$q^{(0)}(x,t) = -\alpha\left[m\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left((\Pi^{(0)} + \tilde{P} - P_l)\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right].$$

Если воспользоваться уравнением для нулевого приближения (14) и выразить производную по времени через производную по координатам:

$$\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} = \frac{k}{\mu(1-m)\beta_s}\frac{\partial^2\Pi^{(0)}}{\partial x^2},$$

то выражение для функции источников упрощается:

$$q^{(0)}(x,t) = \frac{\alpha k}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((\Pi^{(0)} + \tilde{P} - P_l - \frac{m}{(1-m)\beta_s})\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right].$$

Уравнение для первого коэффициента в пространстве изображений сведено к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2\Pi^{(1)u}}{\partial x^2} - (1-m)\frac{\beta_s\mu p}{k}\Pi^{(1)u} = -\frac{\mu}{k}q^{(0)u}(x,p) = Q^{(0)u}(x,p).$$

В пространстве оригиналов выражение для $Q^{(0)}(x,t)$ имеет вид

$$Q^{(0)}(x,t) = \alpha\frac{\mu}{k}\left[m\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left((\Pi^{(0)} + \tilde{P} - P_l)\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right], \quad (21)$$

или

$$Q^{(0)}(x,t) = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((\Pi^{(0)} + \tilde{P} - P_l - \frac{m}{(1-m)\beta_s})\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right)\right]. \quad (22)$$

Уравнение такого вида часто встречается в прикладных задачах. Упростим его запись, введя обозначение $\gamma^2 = (1-m)\beta_s \frac{\mu}{k} p$:

$$\frac{\partial^2 \Pi^{(1)u}}{\partial x^2} - \gamma^2 \Pi^{(1)u} = Q^{(0)u}(x,p),$$

и рассмотрим построение решения более подробно. Решение этого уравнения отыскивается в виде произведения неизвестной функции Y и частного решения однородного уравнения $e^{-\gamma x}$, регулярного на бесконечности $\Pi^{(1)u} = Ye^{-\gamma x}$. Общее решение для первого коэффициента представим в виде, удобном для определения входящих в него констант:

$$\Pi^{(1)u} = \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma x} \left(\int_a^x Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' + A \right) - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma x} \int_b^x e^{\gamma x'} Q^{(0)u}(x',p) dx' + \\ + \left(B - \frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma b} \int_a^b Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' \right) e^{-\gamma x}. \tag{23}$$

Из условия, согласно которому значение первого коэффициента на бесконечности стремится к нулю, получим значение постоянной A:

$$A = -\int_a^\infty Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx',$$

что позволяет представить выражение (23) как

$$\Pi^{(1)u} = \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma x} \int_\infty^x Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma x} \int_b^x e^{\gamma x'} Q^{(0)u}(x',p) dx' + \\ + \left(B - \frac{1}{2\gamma} e^{2\gamma b} \int_a^b Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' \right) e^{-\gamma x}.$$

Учитывая, что в начале координат $x = 0$ первый коэффициент обращается в нуль, получим выражение

$$\left(B - \frac{1}{2\gamma} e^{2\gamma b} \int_a^b Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' \right) = \\ = -\frac{1}{2\gamma} \int_\infty^0 Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' + \frac{1}{2\gamma} \int_b^0 e^{\gamma x'} Q^{(0)u}(x',p) dx',$$

подстановка которого в искомое решение позволяет привести его к виду

$$\Pi^{(1)u} = \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma x} \int_\infty^x Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' - \\ - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma x} \left(\int_0^\infty Q^{(0)u}(x',p) e^{-\gamma x'} dx' + \frac{1}{2\gamma} \int_0^x e^{\gamma x'} Q^{(0)u}(x',p) dx' \right). \tag{24}$$

Нетрудно убедиться, что полученное выражение удовлетворяет всем условиям задачи (19)–(20).

Для нахождения оригинала выражения (24) запишем его в виде

$$\Pi^{(1)u} = \frac{1}{2\delta\sqrt{p}} \left(\int_\infty^x Q^{(0)u}(x',p) \exp(-\delta\sqrt{p}(x'-x)) dx' + \right. \\ \left. + \int_0^\infty Q^{(0)u}(x',p) \exp(-\delta\sqrt{p}(x'+x)) dx' - \int_0^x Q^{(0)u}(x',p) \exp(-\delta\sqrt{p}(x'-x)) dx' \right).$$

Здесь $\delta = \sqrt{(1-m)\beta_s\mu/k}$. Оригинал полученного решения строится с использованием известных соотношений [31]:

$$\sqrt{p}\exp(-\delta\sqrt{p}(x'-x))dx', \frac{1}{p}f^u(p)g^u(p) \Leftrightarrow \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Найденное выражение для первого коэффициента имеет вид

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}}\Big[\int_\infty^x dx' \int_0^t Q^{(0)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'-x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \\ + \int_0^\infty dx' \int_0^t Q^{(0)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'+x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} - \\ - \int_0^x dx' \int_0^t Q^{(0)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'-x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\Big].\end{aligned} \tag{25}$$

Выражения для нулевого (14) и первого (25) коэффициентов решают задачу в нулевом и первом приближениях. В частности, нулевое приближение совпадает с нулевым коэффициентом:

$$\Pi_0 = \Pi^{(0)} = P_w \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-m)\beta_s\mu}{kt}}x\right).$$

Первое приближение равно сумме нулевого и первого коэффициентов ($\varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned}\Pi_1 = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} = P_w \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-m)\beta_s\mu}{kt}}x\right) + \\ + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}}\Big[\int_\infty^x dx' \int_0^t Q^{(0)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'-x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \\ + \int_0^\infty dx' \int_0^t Q^{(0)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'+x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} - \\ - \int_0^x dx' \int_0^t Q^{(0)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'-x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\Big],\end{aligned} \tag{26}$$

где выражение для $Q^{(0)}(x,t)$, согласно (21) и (22), содержит множитель α.

Задача для первого остаточного члена построена путем подстановки асимптотической формулы $\Pi = \Pi^{(0)} + \varepsilon\Pi^{(1)} + \Theta_1$ в исходную постановку (5)–(6). Затем, воспользовавшись выражениями (10)–(11) и (17)–(18), представим задачу для первого остаточного члена Θ_1 в виде

$$\begin{aligned}(\varepsilon\alpha m + (1-m)\beta_s)\frac{\partial\Theta_1}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+\varepsilon\alpha\left(\Pi+\tilde{P}-P_l\right)\right)\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\right) + \\ + \varepsilon^2\alpha m\frac{\partial\Pi^{(1)}}{\partial t} = \varepsilon\alpha\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\varepsilon\Pi^{(1)}+\Theta_1\right)\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial x}\right) + \right. \\ \left. + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\Pi+\tilde{P}-P_l\right)\frac{\partial\Pi^{(1)}}{\partial x}\right)\right]\Theta|_{x=0} = 0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\Theta|_{t=0} = 0, \quad \Theta|_{x=0} = 0, \quad \Theta|_{x\to\infty} = 0. \tag{28}$$

Далее, будем отыскивать Θ в виде асимптотической формулы по параметру ε:

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(0)} + \varepsilon\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots;$$

подставив в задачу для первого остаточного члена (27), (28), выпишем задачу для его нулевого коэффициента разложения:

$$(1-m)\beta_s \frac{\partial\Theta_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Theta_1^{(0)}}{\partial x^2} = 0,$$
$$\Theta_1^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)}|_{x=0} = 0, \quad \Theta_1^{(0)}|_{x\to\infty} = 0.$$

Нетрудно показать, что эта задача имеет только тривиальное решение: $\Theta_1^{(0)} = 0$. С учетом этого задача для первого коэффициента асимптотического разложения первого остаточного члена представится как

$$(1-m)\beta_s \frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Theta_1^{(1)}}{\partial x^2} = 0,$$
$$\Theta_1^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \Theta_1^{(1)}|_{x=0} = 0, \quad \Theta_1^{(1)}|_{x\to\infty} = 0.$$

Эта задача также имеет только тривиальное решение: $\Theta_1^{(1)} = 0$. Поскольку нулевой и первый коэффициенты равны нулю, то выражение для остаточного члена может содержать слагаемые только второго и более высоких порядков по параметру асимптотического разложения $\Theta_1 = \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots$, т. е. предел отношения первого остаточного члена к первому приближению, при устремлении формального параметра к нулю, равен нулю, а полученное выражение (26) является асимптотическим в первом приближении.

Развитый при нахождении первого коэффициента метод может быть использован для построения решений задач для более высоких коэффициентов разложения. При этом выражения для этих коэффициентов представляются в виде (7), однако функции источников выражаются через предшествующий коэффициент разложения. Уравнение для i-го коэффициента разложения, согласно (8), имеет вид

$$(1-m)\beta_s \frac{\partial\Pi^{(i)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial^2\Pi^{(i)}}{\partial x^2} = -\alpha\left[m\frac{\partial\Pi^{(i-1)}}{\partial t} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi^{(i-1)}\frac{\partial\Pi^{(i-1)}}{\partial x}\right)\right] = q^{(i-1)}(x,t). \quad (29)$$

Уравнение (29) в пространстве изображений

$$\frac{\partial^2\Pi^{(i)u}}{\partial x^2} - (1-m)\beta_s\frac{\mu}{k}p\Pi^{(i)u} = -\frac{\mu}{k}q^{(i-1)u}(x,p) = Q^{(i-1)u}(x,p),$$

полученное с учетом (12), дополняется условиями $\Pi^{(i)u}|_{x=0} = 0$ и $\Pi^{(i)u}|_{x\to\infty} = 0$, следующими из (13).

В пространстве оригиналов выражение для $Q^{(i-1)}(x,t)$ имеет вид

$$Q^{(i-1)}(x,t) = \alpha\frac{\mu}{k}\left[m\frac{\partial\Pi^{(i-1)}}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi^{(i-1)}\frac{\partial\Pi^{(i-1)}}{\partial x}\right)\right].$$

Выражение для i-го коэффициента разложения может быть найдено как и для первого коэффициента (25):

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}}\Big[\int_{\infty}^{x} dx' \int_0^t Q^{(i-1)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'-x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} +$$
$$+ \int_0^{\infty} dx' \int_0^t Q^{(i-1)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'+x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} -$$
$$- \int_0^{x} dx' \int_0^t Q^{(i-1)}(x', t-\tau)\exp(-\frac{\delta^2(x'-x)^2}{4\tau})\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\Big].$$

Полученное выражение для для i-го коэффициента ($i \geqslant 2$) разложения вместе с выражениями для нулевого (14) и первого (25) коэффициентов решают задачу в любом требуемом приближении. Для оценки точности каждого приближения осуществлена оценка остаточного члена. Показано, что выражение для i-го остаточного члена содержит слагаемые только порядка $i+1$ и выше по параметру асимптотического разложения $\Theta_i = \varepsilon^{i+1}\Theta_1^{(i+1)} + \ldots$, т. е. выполняется соответствующее условие асимптотичности для i-го остаточного члена.

Нетрудно видеть, что полученное решение представляет, по сути дела, разложение по параметру α. Использованный метод также позволяет построить аналогичные решения, когда в качестве параметра разложения используется сжимаемость скелета β_s. Поскольку представление зависимостей физических параметров в виде степенных рядов является универсальным, то аналогично могут быть решены нелинейные задачи с учетом зависимости проницаемости, пористости и других параметров от давления, что открывает новые возможности исследования нелинейных задач фильтрации.

Финансирование. Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 17-48-020517 р-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shagapov V. Sh., Chiglintseva A. S., Belova S. V. Injection of a cold gas into a snow mass partially saturated with this gas with hydrate formation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2019. Vol. 92. No. 3. P. 729–743. https://doi.org/10.1007/s10891-019-01983-x
2. Хасанов М. К., Столповский М. В., Мусакаев Н. Г., Ягафарова Я. Я. Численные решения задачи об образовании газогидрата при закачке газа в частично насыщенную льдом пористую среду // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 92–105. https://doi.org/10.20537/vm190109
3. Badertdinova E. R., Salim'yanov I. T., Khairullin M. K., Shamsiev M. N. Numerical solution of the coefficient inverse problems on nonstationary filtration to a well intersected by a hydraulic fracture // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53. No. 3. P. 379–383. https://doi.org/10.1134/S0021894412030091
4. Pen'kovskii V. I., Korsakova N. K. Phenomenological approach to simulating hydraulic fracturing of a stratum // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. No. 5. P. 855–863. https://doi.org/10.1134/S0021894415050120
5. Leont'ev N. E. Description of weakly compressible fluid flows in porous media for a nonlinear seepage law // Fluid Dynamics. 2013. Vol. 48. No. 3. P. 402–406. https://doi.org/10.1134/S0015462813030137
6. Davydkin I. B., Monakhov V. N. Free-boundary problems for nonlinear models of fluid filtration in inhomogeneous porous media // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2003. Vol. 44. No. 6. P. 814–820. https://doi.org/10.1023/A:1026235720945
7. Бадриев И. Б., Исмагилов И. Н., Исмагилов Л. Н. Метод решения нелинейных стационарных анизотропных задач фильтрации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 3. С. 3–11. https://doi.org/10.20537/vm080301

8. Emikh V. N. Development of complex analysis methods in filtration theory problems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. No. 5. P. 848–854. https://doi.org/10.1134/S0021894415050119
9. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
10. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New York: John Wiley, 1973.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
12. van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. New York: Academic Press, 1964.
13. Селиванов В. В., Зарубин В. С., Ионов В. Н. Аналитические методы механики сплошной среды. М.: МГТУ им. Баумана, 1994.
14. Филиппов А. И., Михайлов П. Н. Асимптотические методы в скважинной теплофизике. Уфа: Гилем, 2013.
15. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978.
16. Ломов А. В. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
17. Родина Л. И., Тютеев И. И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 79–86. https://doi.org/10.20537/vm160107
18. Заболоцкий С. А. Асимптотическое поведение решений нелинейных дифференциальных уравнений с экспоненциально эквивалентными правыми частями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 215–220. https://doi.org/10.20537/vm160207
19. Gorbushin A. R., Zametaev V. B. Asymptotic analysis of viscous fluctuations in turbulent boundary layers // Fluid Dynamics. 2018. Vol. 53. No. 1. P. 9–20. https://doi.org/10.1134/S001546281801007X
20. Afanasyev A. A. Effective asymptotic model of two-phase flow through fractured-porous media // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54. No. 5. P. 671–680. https://doi.org/10.1134/S001546281905001X
21. Akhmetova O. V., Filippov A. I., Filippov I. M. Quasi-steady-state pressure fields in linear flow through a porous inhomogeneous anisotropic reservoir in the asymptotic approximation // Fluid Dynamics. 2012. Vol. 47. No. 3. P. 364–374. https://doi.org/10.1134/S0015462812030106
22. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskii A. A. Coefficient-by-coefficient averaging in a problem of laminar gas flow in a well // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. Vol. 59. No. 1. P. 61–71. https://doi.org/10.1134/S002189441801008X
23. Филиппов А. И., Ахметова О. В., Ковальский А. А. Задача о радиальной фильтрации в полубесконечных массивах, разделенных пластом с отличающимися свойствами // Прикладная физика и математика. 2017. № 3. С. 37–47. https://elibrary.ru/item.asp?id=29675540
24. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Gubaidullin M. R. Pressure field in the process of radial filtration in a nonuniform orthotropic stratum in the asymptotic approximation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2015. Vol. 88. No. 6. P. 1329–1340. https://doi.org/10.1007/s10891-015-1317-0
25. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Filippov I. M. Filtration pressure field in an inhomogeneous bed in constant drainage // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2012. Vol. 85. No. 1. P. 1–18. https://doi.org/10.1007/s10891-012-0615-z
26. Boas M. L. Mathematical methods in the physical sciences. New York: John Wiley, 1983.
27. Бан А., Басниев К. С., Николаевский В. Н. Об основных уравнениях фильтрации в сжимаемых пористых средах // Прикладная механика и техническая физика. 1961. № 3. С. 52–55. https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=158572&ARTICLE_ID=159576
28. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
29. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

30. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации. М.: Недра, 1964.
31. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.

Поступила в редакцию 12.03.2020

Филиппов Александр Иванович, д. т. н., профессор, кафедра общей и теоретической физики, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 453100, Россия, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.
E-mail: filippovai@rambler.ru

Ахметова Оксана Валентиновна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра общей и теоретической физики, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 453100, Россия, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.
E-mail: ahoksana@yandex.ru

Ковальский Алексей Алексеевич, к. ф.-м. н., директор филиала, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, 453100, Россия, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.
E-mail: aakov68@mail.ru

Цитирование: А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский. Нелинейная задача о фильтрационном поле плоского течения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 324–339.

A. I. Filippov, O. V. Akhmetova, A. A. Kovalskii

Nonlinear problem of the filtration field of a flat flow

Keywords: filtration, asymptotic decomposition, pressure field.

MSC2010: 35Q35, 76S05

DOI: 10.35634/vm200213

The nonlinear problem of the pressure field in the case of one-dimensional planar filtration is considered, when changes in the density of the skeleton, as well as the filtered fluid, and pressure are proportionally related. To solve the problems, an asymptotic method is used, based on the introduction of a formal parameter in the problem under consideration and the representation of the desired solution in the form of an asymptotic formula for this parameter. It is shown that the statements of the corresponding problems for the asymptotic expansion coefficients are linear, and classical methods can be used to solve them. Analytical expressions for the coefficients of asymptotic expansion of the solution have been found. It is shown that the corresponding expansion coefficients of the residual term of the current number and all the preceding ones in the same formal parameter as for the desired solution vanish. The approach used opens up new possibilities for solving nonlinear filtering problems in an inhomogeneous anisotropic porous medium.

Funding. The study of authors was funded by RFBR, project number 17-48-020517.

REFERENCES

1. Shagapov V. Sh., Chiglintseva A. S., Belova S. V. Injection of a cold gas into a snow mass partially saturated with this gas with hydrate formation, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2019, vol. 92, no. 3, pp. 729–743. https://doi.org/10.1007/s10891-019-01983-x
2. Khasanov M. K., Stolpovsky M. V., Musakaev N. G., Yagafarova R. R. Numerical solutions of the problem of gas hydrate formation upon injection of gas into a porous medium partly saturated by ice, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 92–105. https://doi.org/10.20537/vm190109
3. Badertdinova E. R., Salim'yanov I. T., Khairullin M. K., Shamsiev M. N. Numerical solution of the coefficient inverse problems on nonstationary filtration to a well intersected by a hydraulic fracture, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 379–383. https://doi.org/10.1134/S0021894412030091
4. Pen'kovskii V. I., Korsakova N. K. Phenomenological approach to simulating hydraulic fracturing of a stratum, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 855–863. https://doi.org/10.1134/S0021894415050120
5. Leont'ev N. E. Description of weakly compressible fluid flows in porous media for a nonlinear seepage law, *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 402–406. https://doi.org/10.1134/S0015462813030137
6. Davydkin I. B., Monakhov V. N. Free-boundary problems for nonlinear models of fluid filtration in inhomogeneous porous media, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 6, pp. 814–820. https://doi.org/10.1023/A:1026235720945
7. Badriev I. B., Ismagilov I. N., Ismagilov L. N. On the method of solving of nonlinear stationary anisotropic filtration problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 3, pp. 3–11. https://doi.org/10.20537/vm080301
8. Emikh V. N. Development of complex analysis methods in filtration theory problems, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 848–854. https://doi.org/10.1134/S0021894415050119
9. Shchelkachev V. N., Lapuk B. B. *Podzemnaya gidravlika* (Underground hydraulics), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2001.

10. Nayfeh A. H. *Perturbation methods*, New York: John Wiley, 1973.
11. Bogolyubov N. N., Mitropol'skii Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii* (Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations), Moscow: Nauka, 1974.
12. van Dyke M. *Perturbation methods in fluid mechanics*, New York: Academic Press, 1964.
13. Selivanov V. V., Zarubin V. S., Ionov V. N. *Analiticheskie metody mekhaniki sploshnoi sredy* (Analytical methods of mechanics of a solid environment), Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 1994.
14. Filippov A. I., Mikhailov P. N. *Asimptoticheskie metody v skvazhinnoi teplofizike* (Asimptotic methods in well thermal physics), Ufa: Gilem, 2013.
15. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Singulyarno vozmushchennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* (Singularly perturbed equations in critical cases), Moscow: Moscow State University, 1978.
16. Lomov A. V. *Vvedenie v obshchuyu teoriyu singulyarnykh vozmushchenii* (Introduction to the general theory of singular perturbations), Moscow: Nauka, 1981.
17. Rodina L. I., Tyuteev I. I. About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematica. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 79–86. https://doi.org/10.20537/vm160107
18. Zabolotskiy S. A. Asymptotic behaviour of solutions to nonlinear differential equations with exponentially equivalent right-hand sides, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 2, pp. 215–220. https://doi.org/10.20537/vm160207
19. Gorbushin A. R., Zametaev V. B. Asymptotic analysis of viscous fluctuations in turbulent boundary layers, *Fluid Dynamics*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 9–20. https://doi.org/10.1134/S001546281801007X
20. Afanasyev A. A. Effective asymptotic model of two-phase flow through fractured-porous media, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 671–680. https://doi.org/10.1134/S001546281905001X
21. Akhmetova O. V., Filippov A. I., Filippov I. M. Quasi-steady-state pressure fields in linear flow through a porous inhomogeneous anisotropic reservoir in the asymptotic approximation, *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 364–374. https://doi.org/10.1134/S0015462812030106
22. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskii A. A. Coefficient-by-coefficient averaging in a problem of laminar gas flow in a well, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 1, pp. 61–71. https://doi.org/10.1134/S002189441801008X
23. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A. The problem of radial filtration in semi-infinite media separated by layer with different properties, *Prikladnaya Fizika i Matematika*, 2017, no. 3, pp. 37–47 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=29675540
24. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Gubaidullin M. R. Pressure field in the process of radial filtration in a nonuniform orthotropic stratum in the asymptotic approximation, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, no. 6, pp. 1329–1340. https://doi.org/10.1007/s10891-015-1317-0
25. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Filippov I. M. Filtration pressure field in an inhomogeneous bed in constant drainage, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2012, vol. 85, no. 1, pp. 1–18. https://doi.org/10.1007/s10891-012-0615-z
26. Boas M. L. Mathematical methods in the physical sciences. New York: John Wiley, 1983.
27. Ban A., Basniev K. S., Nikolaevskiy V. N. On the basic equations of filtration in compressible porous media, *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1961, no. 3, pp. 52–55 (in Russian). https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=158572&ARTICLE_ID=159576
28. Nikolaevskiy V. N., Basniev K. S., Gorbunov A. T., Zotov G. A. *Mekhanika nasyshchennykh poristykh sred* (Mechanics of saturated porous media), Moscow: Nedra, 1970.
29. Polubarinova–Kochina P. Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* (Theory of groundwater movement), Moscow: Nauka, 1977.
30. Buzinov S. N., Umrikhin I. D. *Issledovanie plastov i skvazhin pri uprugom rezhime fil'tratsii* (Study of reservoirs and wells in the elastic mode of filtration), Moscow: Nedra, 1964.

31. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (The operating calculus guide), Moscow: Vysshaya Shkola, 1965.

Received 12.03.2020

Filippov Aleksandr Ivanovich, Doctor of Engineering, Professor, Department of Physics, Bashkir State University, Sterlitamak Branch, pr. Lenina, 49, Sterlitamak, 453100, Russia.
E-mail: filippovai@rambler.ru

Akhmetova Oksana Valentinovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Physics, Bashkir State University, Sterlitamak Branch, pr. Lenina, 49, Sterlitamak, 453100, Russia.
E-mail: ahoksana@yandex.ru

Kovalskii Aleksei Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Branch Director, Bashkir State University, Sterlitamak Branch, pr. Lenina, 49, Sterlitamak, 453100, Russia.
E-mail: aakov68@mail.ru

Citation: A. I. Filippov, O. V. Akhmetova, A. A. Kovalskii. Nonlinear problem of the filtration field of a flat flow, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 324–339.