МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 312–323.

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ КАК ДОПУСТИМЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Рассматривается задача о соблюдении ограничений асимптотического характера (ОАХ) и ее расширение в классе ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства. Исследуется представление множества допустимых обобщенных элементов в виде множества притяжения (МП), отвечающего заданной системе ОАХ. В частности, исследуется вопрос о непустоте данного МП при весьма общих предположениях относительно измеримой структуры, на которой определяются соответствующие у/ф. Упомянутая структура задается π-системой с «нулем» и «единицей» (π-система есть непустое семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Семейство у/ф оснащается при этом топологией волмэновского типа.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр.

DOI: 10.35634/vm200212

Введение

В задачах о достижимости, играющих [1–3] важную роль в современной теории управления, нередко отсутствует устойчивость при возмущении и, в частности, при ослаблении ограничений (см. в этой связи [3, гл. III], где обсуждается подобное свойство для задач оптимизации). В последнем случае практический интерес представляет построение приближенных решений (см. [3, гл. III]) и определение результатов, отвечающих данным решениям. Сами эти результаты в экстремальных задачах определяются значениями критерия, а в задачах о достижимости — точками фазового пространства системы. Связывая упомянутые результаты с приближенными решениями Дж. Варги [3], мы фактически принимаем соглашение об асимптотической реализации этих результатов (имеется в виду соблюдение ослабленных вариантов ограничений с некоторого момента в классе секвенциальных приближенных решений Дж. Варги (см. [3, гл. III])).

При таком подходе, однако, естественно следующее существенное обобщение исходной постановки, а именно: мы вообще можем не предполагать заданными какие-либо стандартные ограничения на выбор обычных решений (или управлений). Вместо этого будем сразу полагать заданной систему условий, которая в случае постановки [3, гл. III] отвечает всевозможным ослабленным вариантам ограничений. Эта система задается непустым семейством подмножеств (п/м) множества обычных решений. Сами обычные решения «заменяются» при этом аналогами секвенциальных приближенных решений Дж. Варги, а именно: фильтрами или направленностями в множестве обычных решений (см. [4, 5] и др.). В столь общей постановке применение последовательностей может оказаться недостаточным; это особенно существенно при использовании в качестве множества, в котором фиксируются (так или иначе) результаты, топологического пространства (ТП).

В связи с построениями [3, гл. III] отметим важную роль обобщенных решений (или управлений), в которых по существу «аккумулируются» нужные свойства приближенных решений-последовательностей в части соблюдения ОАХ, определяемых непустым семейством п/м множества обычных решений. Представляет интерес само понятие допустимости обобщенных решений (см. [4, 5]). В принципе каждое такое решение есть обобщенный элемент (ОЭ) задачи, а потому допустимость такого ОЭ требует специального определения. Представляет интерес и вопрос о существовании допустимых ОЭ. Данный вопрос естественно решать в условиях, когда все множество ОЭ является компактным [6, 3.1] ТП. Данный подход, развиваемый в [4, 5], согласуется с конструкциями [3, гл. III, IV], применяемыми в задачах оптимального управления. По сути дела, речь идет о процедуре компактификации, смысл которой, однако, отличается от понятия, используемого в общей топологии. В этой связи, как существенная часть процедуры [4, 5], возникает задача о поиске множества ОЭ, допустимых по отношению к ОАХ; она может рассматриваться как задача о соблюдении ОАХ в том или ином классе ОЭ. Мы рассматриваем в качестве ОЭ ультрафильтры (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП). Упомянутые ИП реализуются всякий раз посредством оснащения непустого множества π-системой его п/м. Мы должны, однако, позаботиться о том, чтобы обычные решения допускали представление в виде ОЭ, то есть в виде у/ф. Это накладывает на выбор π-системы одно неограничительное условие: π-система должна быть отделимой. Тогда множество обычных решений допускает погружение в пространство ОЭ (с естественным топологическим оснащением) в виде всюду плотного п/м.

Далее мы коснемся и некоторых других вопросов, связанных с достижимостью при ОАХ.

§ 1. Общие определения и обозначения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); через $\varnothing$ обозначается пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет выражение «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если a и b — объекты, то через $\{a; b\}$ обозначаем множество, содержащее a, b и не содержащее никаких других элементов. Тогда каждому объекту c сопоставляется синглетон $\{c\} \triangleq \{c; c\}$, содержащий c: $c \in \{c\}$. Если x и y — произвольные объекты, то [7, с. 67] $(x, y) \triangleq \big\{\{x\}; \{x; y\}\big\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом x и вторым элементом y. Для каждой УП z через $pr_1(z)$ и $pr_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = \big(pr_1(z), pr_2(z)\big)$. Для любых трех объектов x, y и z полагаем, как обычно, $\{x; y; z\} \triangleq \{x; y\} \cup \{z\}$. Каждому множеству (в частности, каждому семейству) H сопоставляются семейства $\mathcal{P}(H)$ и $\mathcal{P}'(H)$ всех и всех непустых п/м H соответственно (итак, $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$); $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех непустых конечных п/м H (при этом $\mathrm{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$). С учетом этого получаем, что для каждого множества T в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(T))$ имеем семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(T)$.

Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Каждому непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляется след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

семейства $\mathcal{A}$ на упомянутое множество. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то

$$\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcap_{X \in \mathcal{K}} X \colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\} \in \mathcal{P}'\Big(\mathcal{P}\big(\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X\big)\Big)$$

(семейство всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$). Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство, то

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{H}] \triangleq \Big\{\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}) \mid \bigcap_{S \in \mathcal{K}} S \neq \varnothing \quad \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{S})\Big\};$$

введено семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{H}$.

Для всяких множеств A и B через B^A обозначаем [7, гл. II, § 6] множество всех отображений из A в B (выражения $f \in B^A$ и $f\colon A \to B$ эквивалентны, а $f(x) \in B$, где $x \in A$, есть, как обычно, значение f в точке x). Если A и B — непустые множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ и $(f \mid C)$ есть сужение f на множество C, то есть $(f \mid C) \in B^C$ и $(f \mid C)(x) \triangleq f(x)\ \ \forall x \in C$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ не являются множествами; если T — множество и $k \in \mathbb{N}$, то вместо $T^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное T^k для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в T, то есть всех кортежей длины k с элементами из T.

Специальные семейства множеств

Фиксируем до конца настоящего пункта непустое множество $\mathbf{I}$. Элементами семейства

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\ \&\ (\mathbf{I} \in \mathcal{I})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

являются π-системы [8, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей», при $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$ рассматриваем пару $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$ как широко понимаемое ИП. Называем π-системы из

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \exists\, \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda)\ \&\ (\Lambda \cap L = \varnothing)\} \tag{1.1}$$

отделимыми. Отметим, что отделимыми π-системами (элементами семейства (1.1)) являются алгебры и полуалгебры п/м $\mathbf{I}$ (см. [9, гл. I]), семейства замкнутых множеств в ТП, удовлетворяющем аксиоме T_1. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus J \in \mathcal{J}\ \ \forall J \in \mathcal{J}\},$$

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\},$$

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] : \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}.$$

При $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ имеем ИП с алгеброй множеств; если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I}, \tau)$ есть ТП, и при $H \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ через $\mathrm{cl}(H, \tau)$ обозначаем замыкание H в упомянутом ТП $(\mathbf{I}, \tau)$.

§ 2. Фильтры и ультрафильтры π-систем

Всюду в дальнейшем E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (дополнительные условия на $\mathcal{L}$ формулируются по мере надобности). Полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F}))\};\end{gathered} \tag{2.1}$$

тем самым введено семейство всех фильтров (широко понимаемого) ИП $(E, \mathcal{L})$. Каждый фильтр из семейства (2.1) замкнут относительно конечных пересечений; $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. В виде

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} =\\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

имеем непустое семейство всех у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$. Отметим полезное дополнение к (2.2):

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\};$$

итак, у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$ — суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они. Полагаем, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} \ \ \forall L \in \mathcal{L}$. Тогда получаем, как легко видеть, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{2.3}$$

и, в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$; это позволяет ввести топологию стоуновского типа

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbf{G} \ \exists U \in \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbf{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})],$$

порожденную упомянутой базой (см. [10, (1.5)]). При этом

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.4}$$

есть нульмерное T_2-пространство, в котором все множества из семейства (2.3) открыто-замкнуты. При $H \in \mathcal{P}(E)$ введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} \colon U \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Тогда, как легко видеть (см. (2.3), [11, (3.9)]), в виде

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]] \tag{2.5}$$

имеем замкнутую базу ТП (2.4) и, одновременно, открытую предбазу, то есть предбазу некоторой топологии. Эту топологию (см. [12, раздел 7])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{2.6}$$

(порожденную предбазой (2.5)) можно охарактеризовать следующим образом: (2.6) есть слабейшая топология множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, которая содержит семейство (2.5). При этом

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle) \tag{2.7}$$

есть [12] компактное T_1-пространство (см. [6, разделы 1.5, 3.1]), причем

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{2.8}$$

С учетом (2.7), (2.8) рассматриваем триплет $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ как битопологическое пространство (БТП); в связи с теорией и применениями БТП см. монографию [13].

Всюду в дальнейшем полагаем, если не оговорено противное, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда [14, (5.9)] при $x \in E$

$$((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \tag{2.9}$$

есть тривиальный у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$, отвечающий точке x. В терминах (2.9) определен оператор погружения

$$x \mapsto ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] : E \to \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tag{2.10}$$

обозначаемый ниже через $((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]$. Замечательное свойство БТП на множестве у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$ состоит в том, что [12, раздел 9] $\forall L\in\mathcal{L}$

$$\mathrm{cl}(((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(L),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle)=\mathrm{cl}(((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(L),\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])=\Phi_{\mathcal{L}}(L) \tag{2.11}$$

(при $\Lambda\in\mathcal{L}$ имеем $((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(\Lambda)=\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x]\colon x\in\Lambda\}$ по определению оператора (2.10)). Из (2.11) следует, конечно, свойство плотности

$$\mathrm{cl}(((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(E),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle)=\mathrm{cl}(((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(E),\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])=\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}).$$

Целый ряд других свойств, связанных с оснащением $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, см. в [14, раздел 5]. Сейчас напомним только [14, (5.13)]: при $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\triangleq\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\mid\mathcal{E}\subset\mathcal{U}\}=\bigcap_{L\in\mathcal{E}}\Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{2.12}$$

Поскольку в силу (2.11) $\Phi_{\mathcal{L}}(L)\in\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]$ при $L\in\mathcal{L}$, то (см. (2.12))

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\in\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \ \forall\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Как следствие, имеем компактность всех множеств (2.12) в ТП (2.7). Практически очевидно следующее

Предложение 1. *Если $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то*

$$(\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}])\Leftrightarrow(\{\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)\colon\Sigma\in\mathcal{E}\}\in(\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]]). \tag{2.13}$$

При проверке (2.13) используется (2.1) и (2.9).

Следствие 1. *Если $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то*

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\neq\varnothing)\Leftrightarrow(\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]). \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение семейство

$$\mathfrak{L}\triangleq\{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L\in\mathcal{E}\}\in\mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]) \tag{2.15}$$

(см. (2.11)). Тогда из (2.13) и (2.15) имеем, что

$$(\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}])\Leftrightarrow(\mathfrak{L}\in(\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]]). \tag{2.16}$$

Пусть $\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. В силу (2.16) $\mathfrak{L}\in(\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]]$. С учетом компактности ТП (2.7) имеем, что пересечение всех множеств из $\mathfrak{L}$ непусто, а потому (см. (2.12), (2.15)) $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\neq\varnothing$. Итак,

$$(\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}])\Rightarrow(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\neq\varnothing). \tag{2.17}$$

Пусть, напротив, $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\neq\varnothing$. Выберем и зафиксируем $\mathcal{V}\in\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})$. В частности, $\mathcal{V}\in\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Тогда $\mathcal{V}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $(M_i)_{i\in\overline{1,n}}\in\mathcal{E}^n$. Тогда по выбору $\mathcal{V}$ имеем, что $(M_i)_{i\in\overline{1,n}}\in\mathcal{V}^n$, а потому пересечение всех множеств M_i, $i\in\overline{1,n}$, непусто (см. (2.1), (2.2)). Поскольку $n,M_1,\ldots,M_n$ выбирались произвольно, установлено, что $\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Итак,

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\neq\varnothing)\Rightarrow(\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]).$$

С учетом (2.17) получаем (2.14). □

Отметим в заключение параграфа, что согласно (2.11) $\Phi_{\mathcal{L}}(L)\in\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \ \forall L\in\mathcal{L}$. Кроме того, имеем в силу (2.12), что $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\in\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \ \forall\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Тогда с учетом следствия 1 имеем, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})\in\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\setminus\{\varnothing\}$$

при $\mathcal{E}\in(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$; итак, в рассматриваемом случае, $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})$ есть непустое и замкнутое в ТП (2.7) множество.

§ 3. К вопросу об условиях непустоты множества притяжения

В этом параграфе рассматривается вопрос о непустоте множества притяжения (МП) в абстрактной задаче о достижимости с ОАХ. При этом в качестве E используется множество обычных решений, а $\mathcal{L}$ определяет некоторую измеримую структуру данного множества. Фиксируем, кроме того, ТП (Y,τ), где Y — непустое множество (на выбор топологии τ будут накладываться дополнительные условия по мере надобности). Если $f \in Y^E$ и $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$f^1[\mathfrak{E}] \triangleq \{f^1(\Sigma)\colon \Sigma \in \mathfrak{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)). \tag{3.1}$$

Далее, $\beta_0[Y] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B} \ \ \forall B_2 \in \mathcal{B} \ \ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$ есть семейство всех баз фильтров (БФ) на множестве Y. Кроме того, в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[Y] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \\ \& \ (\forall F \in \mathcal{F} \ \ \forall H \in \mathcal{P}(Y) \ \ (F \subset H) \Rightarrow (H \in \mathcal{F}))\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

имеем множество всех фильтров на Y. Ясно, что $\mathfrak{F}[Y] \subset \beta_0[Y]$ и при $\mathcal{B} \in \beta_0[Y]$

$$(Y - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(Y) \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset H\} \in \mathfrak{F}[Y]; \tag{3.3}$$

(3.3) есть фильтр на Y, порожденный базой $\mathcal{B}$. В (3.2) рассматриваются фильтры семейства всех п/м Y, что отличает их от фильтров из множества (2.1).

Напомним, что здесь и ниже τ — топология на Y; при $y \in Y$ полагаем $N^0_\tau(y) \triangleq \{G \in \tau \mid y \in G\}$; тогда

$$N_\tau(y) \triangleq \{S \in \mathcal{P}(Y) \mid \exists G \in N^0_\tau(y)\colon G \subset S\}$$

есть семейство всех окрестностей y в ТП (Y,τ); см. [15, гл. I]. Как обычно, определяем сходимость БФ в смысле (Y,τ): если $\mathcal{B} \in \beta_0[Y]$ и $y \in Y$, то

$$(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Rightarrow} y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (N_\tau(y) \subset (Y - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]).$$

Более подробные сведения о сходимости БФ см. в [4, § 2] и [15, гл. I]. Отметим, что при $f \in Y^E$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$

$$f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[Y].$$

Следуя [14], введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};Y;\tau] \triangleq \{f \in Y^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \ \ \exists y \in Y\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} y\}. \tag{3.4}$$

Эти общие построения будем использовать ниже при следующем предположении относительно ТП (Y,τ): полагаем в дальнейшем, что (Y,τ) есть T_2-пространство. Тогда (см. [16, раздел 5]) при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};Y;\tau]$ определен оператор

$$\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}]\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \to Y$$

со следующим свойством:

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\mathcal{U}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}).$$

При $m \in Y^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ определяем МП $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathrm{m};\mathcal{E}] \in \mathcal{P}(Y)$ в соответствии с [16, (3.1)]. Важно отметить следующий общий факт (см. [10, (5.4)]):

$$\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})) \subset (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \;\; \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};Y;\tau] \;\; \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{3.5}$$

Замечание 1. В связи с (3.5) отметим сейчас некоторое обобщение данного соотношения, предполагая в пределах данного замечания только, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Отметим, что и в этом более общем случае определение (3.4) сохраняет силу и при $\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};Y;\tau]$ определен оператор $\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}]$.

Зафиксируем до конца данного замечания $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};Y;\tau]$. Покажем сначала, что при $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $L \in \tilde{\mathcal{U}}$ (в упомянутом общем случае π-системы $\mathcal{L}$)

$$\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\tilde{\mathcal{U}}) \in \mathrm{cl}(f^1(L), \tau). \tag{3.6}$$

Итак, $f^1[\tilde{\mathcal{U}}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\tilde{\mathcal{U}})$ (данный факт также имеет место в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$; см. [10, § 5]). Это означает, что

$$N_\tau(\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\tilde{\mathcal{U}})) \subset (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\tilde{\mathcal{U}}]\big]. \tag{3.7}$$

Пусть $\Lambda \in N_\tau(\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\tilde{\mathcal{U}}))$. С учетом (3.7) получаем, что $\Lambda \in (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\tilde{\mathcal{U}}]\big]$, где $f^1(L) \in f^1[\tilde{\mathcal{U}}]$ согласно (3.1). Поскольку $f^1[\tilde{\mathcal{U}}] \subset (Y - \mathbf{fi})\big[f^1[\tilde{\mathcal{U}}]\big]$, то (см. (3.2), (3.3)) $\Lambda \cap f^1(L) \neq \varnothing$. Итак,

$$H \cap f^1(L) \neq \varnothing \;\; \forall H \in N_\tau(\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\tilde{\mathcal{U}})).$$

Это означает справедливость (3.6). Поскольку $\tilde{\mathcal{U}}$ и L выбирались произвольно, установлено (см. (3.6)), что

$$\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\mathcal{U}) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(f^1(U), \tau) \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{3.8}$$

Пусть теперь $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Тогда согласно (2.12) при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ имеем $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$, а потому

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(f^1(U), \tau) \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau);$$

с учетом (3.8) имеем, следовательно, что

$$\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\mathcal{U}) \in \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau).$$

Данное положение можно усилить, поскольку

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \mathbb{F}_0^*\big(\mathcal{L} \mid \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})\big). \tag{3.9}$$

В самом деле, согласно (2.1) каждый фильтр и, в частности, каждый у/ф замкнут относительно конечных пересечений; для проверки (3.9) теперь достаточно учесть (2.12) (кроме того, следует иметь в виду, что π-система $\mathcal{L}$ также замкнута относительно конечных пересечений). С учетом (2.12) имеем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \subset \mathcal{U}\big\}, \tag{3.10}$$

где $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. С учетом (3.10) получаем, что при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}(f^1(U),\tau) \subset \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau). \tag{3.11}$$

Из (3.8) и (3.11) получаем теперь, что $\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\mathcal{U}) \in \bigcap\limits_{\Sigma\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Но в этом случае имеем, что справедливо

$$\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})\big) = \big\{\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}](\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})\big\} \subset \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau). \tag{3.12}$$

Однако, согласно [10, (2.4)] имеем следующее равенство:

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau). \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) вытекает очевидная оценка МП $\varphi_{\lim}[f \mid \mathcal{L}]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})\big) \subset (\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}]$. Поскольку выбор f и $\mathcal{E}$ был произвольным, свойство (3.5) установлено. □

Теорема 1. *Если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};Y;\tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то*

$$\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \neq \varnothing\big) \Leftrightarrow \big(\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\big). \tag{3.14}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Тогда в силу следствия 1 имеем свойство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \neq \varnothing$. Поэтому (см. (3.5)) $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \neq \varnothing$. Итак, установлена импликация

$$\big(\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\big) \Rightarrow \big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \neq \varnothing\big). \tag{3.15}$$

Пусть теперь $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \neq \varnothing$. Тогда согласно [10, (2.4)]

$$\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}). \tag{3.16}$$

Из (3.16) вытекает, что при $\Sigma \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})$ имеет место $f^1(\Sigma) \neq \varnothing$ и, как следствие, $\Sigma \neq \varnothing$. Тогда

$$\bigcap_{\Xi\in\mathcal{K}} \Xi \neq \varnothing \quad \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}).$$

Это означает, что $\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Итак, установлена импликация

$$\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \neq \varnothing\big) \Rightarrow \big(\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\big),$$

что с учетом (3.15) означает справедливость (3.14). □

§ 4. Обсуждение результатов

Вопрос о существовании элементов притяжения (ЭП), то есть точек МП, полезно обсудить в связи с примером в [16, § 4]. Данный пример показывает, что в ситуации, когда ОАХ определяются базой фильтра и, в частности, каждое множество семейства, определяющего ОАХ, непусто, само множество притяжения (МП) может быть пустым. При этом, в частности, вышеупомянутое семейство центрировано. Итак, эквиваленция (3.14) требует дополнительных условий. В этой связи напомним работу [16, предложение 3], где в качестве такого дополнительного условия выступало требование предкомпактности образа целевого оператора (оператор f в (3.14)). Возможен, однако, другой подход к формулировке упомянутых условий, он и используется в настоящей работе. Речь идет, конечно, не о столь общей ситуации, как в [16]; однако в рамки данного подхода «укладываются» постановки, в которых дополнительное требование эффективно проверяется (имеется в виду условие принадлежности целевого оператора множеству (3.4)). В этой связи отметим работы [14, 17], где рассматривались целевые операторы с ярусными компонентами. В целом представляется, что теорема 1 дополняет положения работы [16] в целом ряде случаев, где основное условие, обеспечивающее истинность (3.14), допускает достаточно простую проверку.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 18–01–00410.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
4. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. https://doi.org/10.20537/vm110112
5. Ченцов А. Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 294–309. http://mi.mathnet.ru/timm1282
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
7. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
8. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
9. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
10. Ченцов А. Г. К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 212–229. https://doi.org/10.20537/vm150206
11. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 240–257. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
12. Ченцов А.Г. Некоторые свойства ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств // Доклады Академии наук. 2019. Т. 486. № 1. С. 24–29. https://doi.org/10.31857/S0869-5652486124-29
13. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Elsevier, 2005.
14. Ченцов А. Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Матем. 2013. № 11. С. 33–50. http://mi.mathnet.ru/ivm8844
15. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
16. Chentsov A. G., Pytkeev E. G. Constraints of asymptotic nature and attainability problem // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'yuternye Nauki. 2019. Vol. 29. Issue 4. P. 569–582. https://doi.org/10.20537/vm190408
17. Ченцов А. Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314. http://mi.mathnet.ru/timm888

Поступила в редакцию 28.02.2020

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. Ультрафильтры как допустимые обобщенные элементы в условиях ограничений асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 312–323.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 312–323.

A. G. Chentsov

Ultrafilters as admissible generalized elements under asymptotic constraints

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter.

MSC2010: 05A05, 97N70, 97N80

DOI: 10.35634/vm200212

The problem of compliance with constraints of asymptotic nature (CAN) and its expansion in the class of ultrafilters (u/f) of widely understood measurable space are considered. The representation of a set of admissible generalized elements as an attraction set (AS) corresponding to the given system of CAN is investigated. In particular, the question about non-emptiness of the given AS under very general suppositions with respect to measurable structure for which corresponding u/f are defined, is investigated. The above-mentioned measurable structure is defined as a π-system with "zero" and "unit" (π-system is a nonempty family of sets closed with respect to finite intersections). The u/f family is equipped with topology of Wallman type.

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410).

REFERENCES

1. Krasovskii N. N. *Motion control theory*, Moscow: Nauka, 1968.
2. Panasyuk A. I., Panasyuk V. I. *Asimptoticheskaya magistral'naya optimizatsiya upravlyaemykh sistem* (The asymptotic magistral optimization of the controllable systems), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1986.
3. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1977.
4. Chentsov A. G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142 (in Russian). `https://doi.org/10.20537/vm110112`
5. Chentsov A. G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 296, suppl. 1, pp. 102–118. `https://doi.org/10.1134/S0081543817020109`
6. Engelking R. *General topology*, Warsaw: PWN, 1977.
7. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970.
8. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005.
9. Neve Zh. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei* (Mathematical foundations of probability theory), Moscow: Mir, 1969.
10. Chentsov A. G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 212–229 (in Russian). `https://doi.org/10.20537/vm150206`
11. Chentsov A. G. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 (in Russian).
`https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257`
12. Chentsov A. G. Some properties of ultrafilters of widely understood measurable spaces, *Doklady Akademii Nauk*, 2019, vol. 486, no. 1, pp. 24–29 (in Russian).
`https://doi.org/10.31857/S0869-5652486124-29`
13. Dvalishvili B. P. *Bitopological spaces: Theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Elsevier, 2005.
14. Chentsov A. G. Attraction sets in abstract attainability problems: equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 28–44.
`https://doi.org/10.3103/S1066369X13110030`

15. Bourbaki N. *Topologie generale*, Paris: Hermann, 1961.
Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Nauka, 1968,
16. Chentsov A. G., Pytkeev E. G. Constraints of asymptotic nature and attainability problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 569–582. https://doi.org/10.20537/vm190408
17. Chentsov A. G. Tier mappings and ultrafilter-based transformations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314.
http://mi.mathnet.ru/eng/timm888

Received 28.02.2020

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. Ultrafilters as admissible generalized elements under asymptotic constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 312–323.