ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 270–289.

УДК 517.956.6

© *А. К. Уринов, А. О. Маманазаров*

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрено параболо-гиперболическое уравнение с сингулярным коэффициентом и спектральным параметром в области, состоящей из характеристического треугольника и полуполосы. Сформулирована задача с нелокальным условием, связывающим значения искомой функции в точках двух граничных характеристик и линии изменения типа уравнения с помощью двух операторов, один из которых зависит от коэффициента сингулярности, а другой — от спектрального параметра. Поставленная задача исследована сведением ее к системе уравнений относительно следа искомой функции и ее производной по x на линии изменения типа уравнения. Единственность решения доказана с использованием метода интегралов энергии, при этом использованы интегральные представления гамма-функции Эйлера и функции Бесселя первого рода. Существование решения задачи доказано методом интегральных уравнений, при этом поставленная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи. Выявлены достаточные условия, которые обеспечивают однозначную разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, сингулярный коэффициент, спектральный параметр, нехарактеристическая линия изменения типа, нелокальная задача, однозначная разрешимость.

DOI: 10.35634/vm200210

§ 1. Введение и постановка задачи

Начиная с семидесятых годов прошлого века исследователи интенсивно изучают нелокальные задачи для уравнений в частных производных. В настоящее время круг таких задач расширяется в различных направлениях. Среди них особое место занимают задачи со смещением. Это объясняется тем, что такие задачи охватывают различные корректные локальные краевые задачи, и к ним сводятся многие проблемы, например биологической синергетики, трансзвуковой газовой динамики и тепловой физики.

Задачи со смещением впервые поставлены и изучены для уравнений колебания струны и Трикоми в [1], а для уравнения Лаврентьева–Бицадзе — в [1, 2]. В задачах, изученных в этих работах, нелокальное условие связывает значения искомой функции или ее производной определенного (вообще говоря, дробного) порядка в точках двух граничных характеристик уравнения. В работе [3] изложена методика постановки корректных краевых задач со смещением для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости и показано, что на корректность таких краевых задач существенно влияют коэффициенты при младших членах рассматриваемого уравнения. Вслед за этими работами проводились многочисленные исследования, посвященные приложениям и изучению задач со смещением для различных уравнений гиперболического, эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов, которые в гиперболической части области рассмотрения в основном сводятся к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД). Здесь следует отметить, что, когда уравнение сводится к уравнению ЭПД, при постановке краевых задач со смещением краевое условие (в большинстве случаев) выписывается с помощью операторов дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [4]:

$$D_{mz}^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\equiv\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dt}\int_{m}^{t}\left|t-z\right|^{-\alpha}g\left(z\right)dz,\quad 0<\alpha<1,$$

где $\Gamma\left(z\right)$ — гамма-функция Эйлера [5]. Обзор этих работ можно найти в монографии [3].

Для уравнений в частных производных за прошедшие годы исследователями сформулированы различные задачи со смещением, отличающиеся от первоначальных. Например, в [6] для уравнения смешанного типа поставлена и исследована задача со смещением с нелокальным условием, связывающим значения искомой функции в точках двух внутренних характеристик, а в [7] — в точках одной граничной характеристики. В [8] для уравнения Лаврентьева–Бицадзе исследована задача с нелокальным условием, связывающим значения искомой функции в точках одной граничной и параллельных ей внутренних характеристик. В [9, 10] при формулировке задач со смещением для уравнений смешанного типа использованы операторы Сайго. При рассмотрении в прямоугольнике уравнений гиперболического [11] и эллиптико-гиперболического [12] типа исследованы задачи, в которых условие смещения связывает значения искомой функции или ее производной в точках двух параллельных сторон прямоугольника. Задачи для уравнений эллиптического и эллиптико-гиперболического типа с условием смещения в эллиптической части границы области также изучены многими авторами (см., например, [13]).

Постановке и исследованию задач со смещением для параболо-гиперболических уравнений второго порядка посвящено много работ (см., например, [3] и ее библиографию). В частности, в работе [14] изучены спектральные свойства одной краевой задачи со смещением для модельного параболо-гиперболического уравнения. В [15,16] изучена однозначная разрешимость краевых задач со смещением с нелокальным условием в гиперболической части области для модельных параболо-гиперболических уравнений с нагруженным слагаемым соответственно в гиперболической и параболической части области. В [17] изучена задача со смещением с нелокальным условием, связывающим значения дробной производной искомой функции на двух граничных характеристиках и линии изменения типа для уравнения с вырождением в гиперболической части смешанной области, а в [18] аналогичные задачи изучены в случае, когда рассматриваемое уравнение имеет сингулярный член, причем в последнем в параболической части задано интегральное условие. В [19, 20] изучены задачи для уравнений с вырождением как в параболической, так и в гиперболической части смешанной области, причем в [19] нелокальное условие связывает значения искомой функции в точках одной граничной и параллельной ей внутренних характеристик, а в [20] — верхней и нижней сторон прямоугольника.

В работе [21] и в цитированных в ней работах, при рассмотрении уравнений гиперболического и смешанного типа со спектральным параметром, выяснилось, что при постановке краевых задач со смещением для таких уравнений в краевых условиях наряду с оператором D_{mt}^{α} $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ участвуют и операторы следующего вида, зависящие от спектрального параметра:

$$A_{mt}^{s,\lambda}\left[f\left(t\right)\right]=f\left(t\right)-\int_{m}^{t}f\left(z\right)\left(\frac{z-m}{t-m}\right)^{s}\frac{\partial}{\partial z}J_{0}\left[\lambda\sqrt{\left(t-m\right)\left(t-z\right)}\right]dz,\quad s=0,1,$$

где $J_0\left(z\right)$ — функция Бесселя первого рода [22].

В [17] для модельного параболо-гиперболического уравнения со спектральным параметром исследована задача с условием смещения, связывающим значения решения в точках двух граничных характеристик и линии изменения типа с помощью операторов $A_{0t}^{1,\lambda}$ и $A_{1t}^{1,\lambda}$, а в [23] с помощью операторов $A_{mt}^{0,\lambda}$, $A_{mt}^{1,\lambda}$ и D_{mt}^{α} сформулированы и исследованы задачи с условиями, связывающими значения решения в точках одной граничной характеристики и линии изменения типа для уравнения со спектральным параметром и с сингулярным членом в гиперболической части смешанной области. Отметим, что рассмотренные в работах [14–23] параболо-гиперболические уравнения линии изменения типа являются характеристиками.

В работах [24, 25] в области $Q = Q_1 \cup Q_0 \cup Q_2$ рассмотрено параболо-гиперболическое уравнение с нехарактеристической линией изменения типа вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^{2-H(x)} u}{\partial t^{2-H(x)}} - \lambda^2 u = 0, \tag{1.1}$$

где $Q_1 = \{(x,t)\colon 0 < x < +\infty,\ 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{(x,t)\colon -x < t < x + T,\ -T/2 < x < 0\}$, $Q_0 = \{(x,t)\colon x = 0,\ 0 < t < T\}$; $H(x)$ — функция Хевисайда, а T, k, $\lambda \in R$ — заданные числа, при $\lambda = \lambda_1$ в Q_1, $k = 0$, $\lambda = \lambda_2$ в Q_2, и с помощью операторов A_{mt}^{0,λ_2} и A_{mt}^{1,λ_2} поставлены и изучены задачи с условиями смещения в гиперболической части области Q. В данной работе при $k \in (0,1)$ исследуем следующую нелокальную задачу со смещением для уравнения (1.1).

Задача H_0**.** Найти функцию $u(x,t) \in \bigcap\limits_{j=1}^{2} \left[C\left(\overline{Q}_j\right) \cap C_{x,t}^{2,j}(Q_j)\right]$, удовлетворяющую в областях Q_1 и Q_2 уравнению (1.1), на линии изменения типа Q_0 — условиям склеивания вида

$$\lim_{x\to-0} u(x,t) = \lim_{x\to+0} u(x,t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

$$\lim_{x\to-0} (-x)^k u_x(x,t) = \lim_{x\to+0} x^k u_x(x,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.3}$$

а на границе области Q — условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} a(t)\, A_{0t}^{1,\lambda} D_{0t}^{k/2}\left[t^{k-1} u\left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)\right] + b(t)\, A_{Tt}^{1,\lambda} D_{Tt}^{k/2}\left[(T-t)^{k-1} u\left(\frac{t-T}{2}, \frac{t+T}{2}\right)\right] + \\ + c(t)\, u(0,t) = \psi(t), \qquad t \in (0,T), \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\varphi(x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\psi(t)$ — заданные функции, причем $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$.

В задаче H_0 нелокальное условие (1.5) связывает значения искомой функции в точках характеристик $t + x = 0$, $t - x = T$ и линии изменения типа Q_0. Из задачи H_0, в частном случае, при $b(x) \equiv c(x) \equiv 0$ $[a(x) \equiv c(x) \equiv 0]$, в силу обратимости операторов $A_{mt}^{1,\lambda}$ и D_{mt}^{α}, следует задача Трикоми для уравнения (1.1) в области Q с заданным значением искомой функции на характеристике $t + x = 0$ $[t - x = T]$. При $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$, $x \in [0,T]$, задача H_0 распадается на две задачи, т. е. на первую краевую задачу в области Q_1 [26] и видоизмененную задачу Коши в области Q_2 [21], для уравнения (1.1).

§ 2. Получение основных функциональных соотношений

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи H_0. Принимая во внимание условия склеивания (1.2) и (1.3), примем следующие обозначения и предположения:

$$\lim_{x\to\pm0} u(x,t) = \tau(t), \quad t \in [0,T], \quad \tau(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T), \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to\pm0} |x|^k u_x(x,t) = \nu(t),\ t \in (0,T), \quad \nu(t) \in C^2(0,T),\ (t(T-t))^{1-k}\nu(t) \in C[0,T]. \tag{2.2}$$

Тогда решение задачи H_0 в областях Q_1 и Q_2, как решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.4), (2.2) и (2.1), (2.2), соответственно представимо в виде (см. [21,26]):

$$u(x,t) = \frac{x^{(1-k)/2}}{2t}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\,\xi^{(1+k)/2}e^{-\lambda^2 t-(x^2+\xi^2)/4t}I_{(k-1)/2}\left(\frac{x\xi}{2t}\right)d\xi - \\ -\gamma_0\int_0^t \nu(\eta)\,e^{\lambda^2(\eta-t)-x^2/4(t-\eta)}(t-\eta)^{-(1+k)/2}d\eta, \qquad (x,t)\in Q_1, \tag{2.3}$$

$$u(x,t) = \gamma_1\int_0^1 \frac{\tau[t-x(2s-1)]}{[s(1-s)]^{1-k/2}}\overline{I}_{(k/2)-1}\left[2\lambda x\sqrt{s(1-s)}\right]ds - \\ -(-x)^{1-k}\gamma_2\int_0^1\frac{\nu[t-x(2s-1)]}{[s(1-s)]^{k/2}}\overline{I}_{-(k/2)}\left[2\lambda x\sqrt{s(1-s)}\right]ds, \qquad (x,t)\in Q_2, \tag{2.4}$$

где $\gamma_0 = 2^{-k}\Gamma^{-1}[(1+k)/2]$, $\gamma_1 = \Gamma(k)/\Gamma^2(k/2)$, $\gamma_2 = \Gamma(1-k)/\Gamma^2(1-k/2)$, $\overline{I}_m(z) = \Gamma(1+m)(z/2)^{-m}I_m(z)$, а $I_m(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента [22].

Устремляя x к нулю и учитывая обозначение (2.1), из формулы (2.3) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке Q_0, принесенное из области Q_1:

$$\tau(t) = \gamma_0 t^{-(k+1)/2}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\,\xi^k e^{-\lambda^2 t-\xi^2/(4t)}d\xi - \gamma_0\int_0^t e^{\lambda^2(\eta-t)}\nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k)/2}d\eta. \tag{2.5}$$

Пользуясь формулой (2.4), как и в работе [21], можно показать, что

$$A_{0t}^{1,\lambda}D_{0t}^{k/2}\left[t^{k-1}u\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)\right] = \frac{\Gamma(k)\,t^{(k/2)-1}}{\Gamma(k/2)}\left\{\tau(t)-\gamma_3\int_0^t\frac{\nu(z)}{(t-z)^k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz\right\}, \tag{2.6}$$

$$A_{Tt}^{1,\lambda}D_{Tt}^{k/2}\left[(T-t)^{k-1}u\left(\frac{t-T}{2},\frac{t+T}{2}\right)\right] = [\Gamma(k)/\Gamma(k/2)]\times \\ \times(T-t)^{(k/2)-1}\left\{\tau(t)-\gamma_3\int_t^T\nu(z)(z-t)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(z-t)]\,dz\right\}, \tag{2.7}$$

где $\gamma_3 = 2^{k-1}\Gamma(k/2)/[\Gamma(k)\Gamma(1-k/2)]$, $\overline{J}_m(z) = \Gamma(1+m)(z/2)^{-m}J_m(z)$ — функция Бесселя–Клиффорда, $J_m(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка m.

Подставляя (2.6) и (2.7) в условие (1.5), получим соотношение между неизвестными функциями $\tau(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке Q_0, принесенное из области Q_2:

$$p(t)\tau(t) = [\Gamma(k/2)/\Gamma(k)]\,[t(T-t)]^{1-k/2}\psi(t) + \\ +\gamma_3 a(t)(T-t)^{1-k/2}\int_0^t\nu(z)(t-z)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz + \\ +\gamma_3 b(t)\,t^{1-k/2}\int_t^T\nu(z)(z-t)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz, \qquad t\in[0,T], \tag{2.8}$$

где $p(t) = a(t)(T-t)^{1-k/2} + b(t)\,t^{1-k/2} + [\Gamma(k/2)/\Gamma(k)]\,[t(T-t)]^{1-k/2}c(t)$.

Таким образом, задача H_0 эквивалентно (в смысле разрешимости и в классе искомых функций) сведена к системе уравнений (2.5), (2.8).

§ 3. Единственность и существование решения задачи

Как отмечено выше, задача H_0 эквивалентна системе (2.5), (2.8). Поэтому для того, чтобы доказать единственность и существование решения задачи H_0, достаточно доказать однозначную разрешимость системы уравнений (2.5), (2.8).

Ниже рассмотрим следующие случаи. I. $p(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. II. $p(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

I. Пусть $p(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Тогда при $t = T$ и $t = 0$ следует $b(T) \neq 0$, $a(0) \neq 0$.

Доказательство единственности решения задачи H_0 опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Если $u(x,t)$ — решение однородной задачи H_0 и $\lim\limits_{x\to 0} |x|^k u_x(x,t) \in L_2[0,T]$, то при $p(t) \neq 0$, $\left[a(t)(T-t)^{1-k/2}/p(t)\right]' \leqslant 0$, $\left[b(t)t^{1-k/2}/p(t)\right]' \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0} |x|^k u_x(x,t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение однородной задачи H_0. Тогда, согласно соотношениям (2.5) и (2.8), при $t \in [0,T]$ имеют место равенства

$$\tau(t) = -\gamma_0 \int_0^t e^{\lambda^2(\eta-t)} \nu(\eta)(t-\eta)^{-(1+k)/2} d\eta, \tag{3.1}$$

$$\tau(t) = \gamma_3 \left\{ a_0(t) \int_0^t \frac{\nu(z)}{(t-z)^k} \overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\, dz + b_0(t) \int_t^T \frac{\nu(z)}{(z-t)^k} \overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\, dz \right\}, \tag{3.2}$$

где $a_0(t) = a(t)(T-t)^{1-k/2} p^{-1}(t)$, $b_0(t) = b(t)t^{1-k/2}p^{-1}(t)$.

С помощью равенств (3.1) и (3.2) вычислим следующий интеграл: $l = \displaystyle\int_0^T \tau(t)\nu(t)\,dt$.

Подставляя в интеграл l функцию $\tau(t)$, определенную по формуле (3.2), имеем

$$\begin{aligned} l = \gamma_3 \int_0^T a_0(t)\nu(t)\,dt \int_0^t \nu(z)(t-z)^{-k} \overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz + \\ + \gamma_3 \int_0^T b_0(t)\nu(t)\,dt \int_t^T \nu(z)(z-t)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(z-t)]\,dz. \end{aligned}$$

Заменяя функцию $|t-z|^{-\alpha}$ и $\overline{J}_m[\lambda(t-z)]$ соответственно по формулам (см. [5,22])

$$\begin{gathered} |t-z|^{-\alpha} = \Gamma^{-1}(\alpha)\cos^{-1}(\alpha\pi)/2 \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}\cos[(t-z)s]\,ds, \qquad \alpha \in (0,1), \\ \overline{J}_m[\lambda(t-z)] = \frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+1/2)} \int_{-1}^1 \left(1-\eta^2\right)^{m-1/2} \cos[\lambda(t-z)\eta]\,d\eta, \qquad m > -1/2, \end{gathered} \tag{3.3}$$

получим

$$l = \frac{\Gamma(k/2)\Gamma^{-1}[(1-k)/2]}{2^{1-k}\sqrt{\pi}\Gamma^2(k)\cos(k\pi/2)} \int_{-1}^1 \left(1-\eta^2\right)^{-(k+1)/2} d\eta \int_0^{+\infty} s^{k-1}[M_1(\eta,s) + M_2(\eta,s)]\,ds, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} M_1(\eta,s) &= \int_0^T \nu(t)a_0(t)\,dt \int_0^t \nu(z)\cos[\lambda\eta(t-z)]\cos[s(t-z)]\,dz, \\ M_2(\eta,s) &= \int_0^T \nu(t)b_0(t)\,dt \int_t^T \nu(z)\cos[\lambda\eta(t-z)]\cos[s(t-z)]\,dz. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь равенствами

$$\cos\left[\lambda\eta\left(t-z\right)\right]\cos\left[\left(t-z\right)s\right]=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(t-z\right)\left(s+\lambda\eta\right)\right]+\cos\left[\left(t-z\right)\left(s-\lambda\eta\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[t\left(s+\lambda\eta\right)\right]\cos\left[z\left(s+\lambda\eta\right)\right]+\sin\left[t\left(s+\lambda\eta\right)\right]\sin\left[z\left(s+\lambda\eta\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\cos\left[t\left(s-\lambda\eta\right)\right]\cos\left[z\left(s-\lambda\eta\right)\right]+\sin\left[t\left(s-\lambda\eta\right)\right]\sin\left[z\left(s-\lambda\eta\right)\right]\right\},$$

$$g\left(x\right)\int_a^x g\left(t\right)dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x g\left(t\right)dt\right)^2,\qquad g\left(x\right)\int_x^b g\left(t\right)dt=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\int_x^b g\left(t\right)dt\right)^2$$

и учитывая $a_0\left(T\right)=0$, $b_0\left(0\right)=0$, функции $M_1\left(\eta,s\right)$ и $M_2\left(\eta,s\right)$ приведем к виду

$$M_1\left(\eta,s\right)=-\frac{1}{4}\int_0^T {a'}_0\left(t\right)L_{0t}\left(\eta,s\right)dt,\quad M_2\left(\eta,s\right)=\frac{1}{4}\int_0^T {b'}_0\left(t\right)L_{tT}\left(\eta,s\right)dt,$$

где

$$L_{mn}\left(\eta,s\right)=\left(\int_m^n\nu\left(z\right)\cos\left[z\left(\lambda\eta+s\right)\right]dz\right)^2+\left(\int_m^n\nu\left(z\right)\sin\left[z\left(\lambda\eta+s\right)\right]dz\right)^2+$$
$$+\left(\int_m^n\nu\left(z\right)\cos\left[z\left(\lambda\eta-s\right)\right]dz\right)^2+\left(\int_m^n\nu\left(z\right)\sin\left[z\left(\lambda\eta-s\right)\right]dz\right)^2.$$

Если учесть эти равенства и условия леммы 1, то из равенства (3.4) следует, что $l\geqslant 0$.

Далее, подставим в интеграл l функцию $\tau\left(t\right)$, определенную формулой (3.2). Затем, заменив $\left(t-\eta\right)^{-(1+k)/2}$ по формуле (3.3) и выполнив некоторые преобразования, находим

$$l=-2^{-k-1}\Gamma^{-2}\left(\frac{1+k}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{1+k}{4}\pi\right)\int_0^{+\infty}s^{(k-1)/2}ds\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}e^{-2\lambda^2T}\left(\int_0^T\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\cos\left(\eta s\right)d\eta\right)^2+\lambda^2\int_0^T e^{-2\lambda^2t}\left(\int_0^t\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\cos\left(\eta s\right)d\eta\right)^2dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}e^{-2\lambda^2T}\left(\int_0^T\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\sin\left(\eta s\right)d\eta\right)^2+\lambda^2\int_0^T e^{-2\lambda^2t}\left(\int_0^t\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\sin\left(\eta s\right)d\eta\right)^2dt\right].\quad(3.5)$$

Из (3.5) следует, что $l\leqslant 0$. Сопоставляя это с предыдущим неравенством $l\geqslant 0$, имеем $l=0$. Если учесть это, то из (3.5) следует, что $\forall s\in[0,+\infty)$ справедливы равенства

$$\int_0^T\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\cos(\eta s)\,d\eta=0,\qquad\int_0^T\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\sin(\eta s)\,d\eta=0.$$

Из этих равенств, в частности при $s=(n\pi)/T$, $n=0,1,2,\ldots$, следует, что

$$\int_0^T\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\cos\left(\frac{n\pi}{T}\eta\right)d\eta=0,\qquad\int_0^T\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\sin\left(\frac{n\pi}{T}\eta\right)d\eta=0,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Так как $\nu\left(\eta\right)e^{\lambda^2\eta}\in L_2\left[0,T\right]$, то в силу полноты системы функций $\{\cos nx,\sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ имеет место равенство $\nu\left(t\right)e^{\lambda^2t}\equiv 0$, то есть $\nu\left(t\right)\equiv 0$, $t\in\left[0,T\right]$. Лемма 1 доказана. □

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы 1, то задача H_0 не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решение задачи H_0. Тогда функция $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением однородной задачи H_0, то есть системы (3.1), (3.2). При этом согласно лемме 1 $\nu(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Поэтому в силу равенства (3.1), $\tau(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Тогда согласно формулам (2.3) и (2.4) $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и следующие условия:*

$$a(t) = (T-t)^{\varepsilon+k/2}\widetilde{a}(t), \quad b(t) = t^{\varepsilon+k/2}\widetilde{b}(t), \quad c(t) = [t(T-t)]^{\varepsilon+k/2}\widetilde{c}(t), \quad \varepsilon > 0,$$
$$\widetilde{a}(t), \widetilde{b}(t), \widetilde{c}(t) \in C^1[0,T] \cap C^4(0,T),$$
$$\psi(t) = [t(T-t)]^{-\delta}\widetilde{\psi}(t), \quad \delta \leqslant 1-(k/2), \quad \widetilde{\psi}(t) \in C^1[0,T] \cap C^3(0,T),$$
$$\varphi(x) \in C[0,+\infty) \cap C^3(0,+\infty), \quad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0,$$

а функции $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ ограничены на $(0,+\infty)$.

Тогда существует решение задачи H_0, притом оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исключая функцию $\tau(t)$ из равенств (2.5) и (2.8), получим

$$\gamma_0\int_0^t e^{\lambda^2(\eta-t)}\nu(\eta)(t-\eta)^{-(k+1)/2}d\eta + \gamma_3 a_0(t)\int_0^t \nu(z)(t-z)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz +$$
$$+\gamma_3 b_0(t)\int_t^T \nu(z)(z-t)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(z-t)]\,dz = f(t), \qquad t \in [0,T],$$

где

$$f(t) = \gamma_0 t^{-(1+k)/2}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\xi^k e^{-\lambda^2 t-\xi^2/4t}d\xi - [\Gamma(k/2)/\Gamma(k)][t(T-t)]^{1-k/2}\psi(t)p^{-1}(t).$$

Отсюда, умножая на $e^{\lambda^2 t}$ и введя обозначение $\Phi(t-z) = e^{\lambda^2(t-z)}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]$, имеем

$$\gamma_0\Gamma[(1-k)/2]\,I_{0t}^{(1-k)/2}\nu_0(t) + \gamma_3 a_0(t)\int_0^t \nu_0(z)(t-z)^{-k}\Phi(t-z)\,dz +$$
$$+\gamma_3 b_0(t)\int_t^T \nu_0(z)(z-t)^{-k}\Phi(t-z)\,dz = f_0(t), \qquad t \in [0,T],$$

где $\nu_0(t) = \nu(t)e^{\lambda^2 t}$, $f_0(t) = f(t)e^{\lambda^2 t}$, а $I_{0t}^{(1-k)/2}$ — оператор дробного интегрирования [4]:

$$I_{ab}^{\alpha}\rho(t) \equiv \frac{\operatorname{sign}(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |t-z|^{\alpha-1}\rho(z)\,dz, \quad \alpha > 0. \tag{3.6}$$

Из последнего равенства, применяя оператор дробного дифференцирования $D_{0t}^{(1-k)/2}$ и принимая во внимание равенство [4] $D_{0t}^{\alpha}I_{0t}^{\alpha}g(t) = g(t)$, $0 < \alpha < 1$, получим

$$\gamma_0\Gamma[(1-k)/2]\,\nu_0(t) + \gamma_3 D_{0t}^{(1-k)/2}\left\{a_0(t)\int_0^t \nu_0(z)(t-z)^{-k}\Phi(t-z)\,dz\right\} +$$

$$+\gamma_3 D_{0t}^{(1-k)/2}\left\{b_0(t)\int_t^T \nu_0(z)(z-t)^{-k}\Phi(t-z)\,dz\right\} = D_{0t}^{(1-k)/2}f_0(t), \qquad t \in (0,T). \tag{3.7}$$

Второе и третье слагаемые в левой части равенства (3.7) обозначим соответственно через $M_1(\nu_0)$ и $M_2(\nu_0)$ и упростим их. Сначала рассмотрим функцию $M_1(\nu_0)$.

Подставляя разложение оператора дробного дифференцирования $D_{0t}^{(1-k)/2}$, а затем, меняя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, перепишем $M_1(\nu_0)$ в виде

$$M_1(\nu_0) = \gamma_3 \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\sum_{j=1}^{3} M_{1j}(\nu_0), \tag{3.8}$$

$$M_{11}(\nu_0) = \frac{d}{dt}\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}\left[a_0(s)-a_0(t)\right](s-z)^{-k}\Phi(s-z)\,ds,$$

$$M_{12}(\nu_0) = \frac{d}{dt}\left\{a_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}(s-z)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]ds\right\},$$

$$M_{13}(\nu_0) = \frac{d}{dt}\left\{a_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}(s-z)^{-k}\,ds\right\}.$$

Рассмотрим функцию $M_{11}(\nu_0)$. В силу условия на $a_0(t)$, согласно теореме Лагранжа, справедливо равенство $a_0(s)-a_0(t) = (s-t)\,a'_0(s+\theta(t-s))$, где $0<\theta<1$. Учитывая это, в равенстве $M_{11}(\nu_0)$ выполним операции дифференцирования по t. В результате получим

$$M_{11}(\nu_0) = -\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-s)^{(k+1)/2}a'_0(s+\theta(t-s))\right](s-z)^{-k}\Phi(s-z)\,ds. \tag{3.9}$$

Рассмотрим функцию $M_{12}(\nu_0)$ и перепишем ее в виде

$$M_{12}(\nu_0) = a'_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}(s-z)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]ds+$$
$$+\,a_0(t)\frac{d}{dt}\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}(s-z)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]ds.$$

К внутреннему интегралу второго слагаемого в $M_{12}(\nu_0)$ применим правило интегрирования по частям. Затем, выполняя операции (d/dt) и учитывая равенство $\Phi(0)=1$, имеем

$$M_{12}(\nu_0) = a'_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}(s-z)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]ds+$$
$$+\,a_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_z^t (t-s)^{(k-1)/2}\,(\partial/\partial s)\left\{(s-z)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]\right\}ds.$$

Далее, принимая во внимание $\Phi(s-z)-1 = (s-z)\,\widetilde{\Phi}(s-z)$, во внутренних интегралах выполним замену переменных по формуле $s = z+(t-z)\,\eta$. В результате получим

$$M_{12}(\nu_0) = \int_0^t \nu_0(z)\,(t-z)^{(1-k)/2}\left[a_0(t)+a'_0(t)\,(t-z)\right]dz\int_0^1 \frac{\Phi_0\left[(t-z)\,\eta\right]d\eta}{\eta^k(1-\eta)^{(1-k)/2}}, \tag{3.10}$$

где $\Phi_0(\xi)\in C^\infty[0,T]$ — известная функция.

Теперь рассмотрим функцию $M_{13}(\nu_0)$. Во внутреннем интеграле выполним замену переменной по формуле $s = z+(t-z)\,\eta$, а затем — операции дифференцирования по t:

$$\begin{aligned} M_{13}(\nu_0) &= \Gamma(1-k)\,\Gamma\left[(1+k)/2\right]\Gamma^{-1}\left[(3-k)/2\right]a'_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,(t-z)^{(1-k)/2}dz+\\ &+\Gamma(1-k)\,\Gamma\left[(1+k)/2\right]\Gamma^{-1}\left[(1-k)/2\right]a_0(t)\int_0^t \nu_0(z)\,(t-z)^{-(1+k)/2}dz. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Переходим к упрощению функции $M_2(\nu_0)$. С этой целью, пользуясь разложением оператора $D_{0t}^{(1-k)/2}$, перепишем ее в виде

$$M_2(\nu_0) = \gamma_3 \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{(k-1)/2}\left\{b_0(s)\int_s^T \nu_0(z)(z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,dz\right\}ds =$$

$$= \gamma_3 \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{(k-1)/2}\left\{\int_s^T \nu_0(z)\left[b_0(s)-b_0(t)\right](z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,dz\right\}ds +$$

$$+ \gamma_3 \Gamma^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{d}{dt}\left\{b_0(t)\int_0^t (t-s)^{(k-1)/2}\left[\int_s^T \nu_0(z)(z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,dz\right]ds\right\}.$$

Меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, имеем

$$M_2(\nu_0) = \gamma_3 \Gamma^{-1}\left[(1+k)/2\right]\sum_{j=1}^{3} M_{2j}(\nu_0), \tag{3.12}$$

где

$$M_{21}(\nu_0) = \frac{d}{dt}\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_0^z (t-s)^{(k-1)/2}\left[b_0(s)-b_0(t)\right](z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,ds +$$

$$+ \frac{d}{dt}\int_t^T \nu_0(z)\,dz\int_0^t (t-s)^{(k-1)/2}\left[b_0(s)-b_0(t)\right](z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,ds,$$

$$M_{22}(\nu_0) = \frac{d}{dt}b_0(t)\left\{\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_0^z (t-s)^{(k-1)/2}(z-s)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]ds +\right.$$

$$\left. + \int_t^T \nu_0(z)\,dz\int_0^t (t-s)^{(k-1)/2}(z-s)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]ds\right\},$$

$$M_{23}(\nu_0) = \frac{d}{dt}\Bigg(b_0(t)\times$$

$$\times\left\{\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_0^z (t-s)^{(k-1)/2}(z-s)^{-k}ds + \int_t^T \nu_0(z)\,dz\int_0^t (t-s)^{(k-1)/2}(z-s)^{-k}ds\right\}\Bigg).$$

В силу условия на функции $b_0(t)$, справедливо равенство

$$b_0(s)-b_0(t) = (s-t)\,b'_0\left[s+\theta(t-s)\right],$$

где $0<\theta<1$. Учитывая это, функцию $M_{21}(\nu_0)$ можно переписать в виде

$$M_{21}(\nu_0) = -\int_0^t \nu_0(z)\,dz\int_0^z \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-s)^{(k+1)/2}b'_0(s+\theta(t-s))\right](s-z)^{-k}\Phi(s-z)\,ds -$$

$$- \int_t^T \nu_0(z)\,dz\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-s)^{(k+1)/2}b'_0(s+\theta(t-s))\right](s-z)^{-k}\Phi(s-z)\,ds. \tag{3.13}$$

Принимая во внимание равенство $\Phi(s-z)-1=(s-z)\,\widetilde{\Phi}(s-z)$, где функция $\widetilde{\Phi}(\xi)\in$ $\in C^\infty[0,T]$ — известная функция, во внутреннем интеграле в $M_{22}(\nu_0)$ выполнив операции интегрирования по частям, имеем

$$M_{22}(\nu_0) = \frac{d}{dt}b_0(t)\left\{\int_0^t \nu_0(z)\,K_1(t,z)\,dz + \int_t^T \nu_0(z)\,K_2(t,z)\,dz\right\},$$

где

$$K_1(t,z)=\frac{2}{k+1}t^{(k+1)/2}z^{-k}\left[\Phi(-z)-1\right]+$$
$$+\frac{2}{k+1}\int_0^z (t-s)^{(k+1)/2}\frac{\partial}{\partial s}\Big\{(z-s)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]\Big\}ds,$$
$$K_2(t,z)=\frac{2}{k+1}t^{(k+1)/2}z^{-k}\left[\Phi(-z)-1\right]+$$
$$+\frac{2}{k+1}\int_0^t (t-s)^{(k+1)/2}\frac{\partial}{\partial s}\Big\{(z-s)^{-k}\left[\Phi(s-z)-1\right]\Big\}ds.$$

Отсюда, выполнив операции (d/dt) и учитывая равенство $K_1(t,t)=K_2(t,t)$, получим

$$M_{22}(\nu_0)=\int_0^t \nu_0(z)\,K_3(t,z)\,dz+\int_t^T \nu_0(z)\,K_4(t,z)\,dz, \tag{3.14}$$

где $K_3(t,z)=(\partial/\partial t)\left[b_0(t)\,K_1(t,z)\right]$, $K_4(t,z)=(\partial/\partial t)\left[b_0(t)\,K_2(t,z)\right]$, причем $K_j(t,z)\in$ $\in C(0\leqslant t,z\leqslant T)\cap C^2(0<t,z\leqslant T)$, $j=\overline{3,4}$.

Теперь рассмотрим функцию $M_{23}(\nu_0)$. Выполнив замену переменных по формулам $s=z\eta$, $s=t\eta$ во внутренних интегралах, имеем

$$M_{23}(\nu_0)=\frac{d}{dt}b_0(t)\Big\{\int_0^t \nu_0(z)\,t^{(k-1)/2}z^{1-k}dz\int_0^1(1-\eta)^{-k}\Big(1-\frac{z}{t}\eta\Big)^{(k-1)/2}d\eta+$$
$$+\int_t^T \nu_0(z)\,t^{(k+1)/2}z^{-k}dz\int_0^1(1-\eta)^{(k-1)/2}\Big(1-\frac{t}{z}\eta\Big)^{-k}d\eta\Big\}.$$

Принимая во внимание равенство (см. [5])

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;x), \tag{3.15}$$

где $F(a,b,c;x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, получим

$$M_{23}(\nu_0)=\frac{d}{dt}b_0(t)\Big\{\frac{1}{1-k}\int_0^t \nu_0(z)\,z^{(1-k)/2}\Big(\frac{z}{t}\Big)^{(1-k)/2}F\Big(\frac{1-k}{2},1,2-k;\frac{z}{t}\Big)dz+$$
$$+\frac{2}{1+k}\int_t^T \nu_0(z)\,z^{(1-k)/2}\Big(\frac{t}{z}\Big)^{(1+k)/2}F\Big(k,1,\frac{k+3}{2};\frac{t}{z}\Big)dz\Big\}.$$

В этом равенстве, используя формулы (см. [5])

$$\frac{d}{dx}\left[x^aF(a,b,c;x)\right]=ax^{a-1}F(a+1,b,c;x),$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1}F(a,b,c;x)\right]=(c-1)\,x^{c-2}F(a,b,c-1;x),$$

выполним операции дифференцирования по t. В результате имеем

$$\begin{aligned}
M_{23}\left(\nu_0\right) = \frac{1}{1-k}b'_0\left(t\right)\int_0^t \nu_0\left(z\right)z^{(1-k)/2}\left(\frac{z}{t}\right)^{(1-k)/2}F\left(\frac{1-k}{2},1,2-k;\frac{z}{t}\right)dz - \\
-\frac{b_0\left(t\right)}{2}\int_0^t \nu_0\left(z\right)z^{1-k}t^{(k-3)/2}F\left(\frac{3-k}{2},1,2-k;\frac{z}{t}\right)dz + \\
+\frac{b_0\left(t\right)}{1-k}\nu_0\left(t\right)t^{(1-k)/2}F\left(\frac{1-k}{2},1,2-k;1\right) + \\
+\frac{2}{k+1}b'_0\left(t\right)\int_t^T \nu_0\left(z\right)z^{(1-k)/2}\left(\frac{t}{z}\right)^{(1+k)/2}F\left(k,1,\frac{k+3}{2};\frac{t}{z}\right)dz + \\
+b_0\left(t\right)\int_t^T \nu_0\left(z\right)t^{(k-1)/2}z^{-k}F\left(k,1,\frac{k+1}{2};\frac{t}{z}\right)dz - \\
-\frac{2}{k+1}b_0\left(t\right)\nu_0\left(t\right)t^{(1-k)/2}F\left(k,1,\frac{k+3}{2};1\right).
\end{aligned}$$

Отсюда, применяя формулу (см. [5])

$$F\left(a,b,c;1\right) = \left[\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)\right]/\left[\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)\right], \quad c-a-b>0,$$

к третьему и шестому слагаемым, а ко второму и пятому слагаемым формулу (см. [5])

$$F\left(a,b,c;z\right) = \left(1-z\right)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b,c;z\right),$$

получим окончательный вид $M_{23}\left(\nu_0\right)$:

$$\begin{aligned}
M_{23}\left(\nu_0\right) &= \int_0^t \nu_0\left(z\right)K_5\left(t,z\right)dz + \int_t^T \nu_0\left(z\right)K_6\left(t,z\right)dz, \\
K_5\left(t,z\right) &= \frac{1}{1-k}b'_0\left(t\right)z^{(1-k)/2}\left(\frac{z}{t}\right)^{(1-k)/2}F\left(\frac{1-k}{2},1,2-k;\frac{z}{t}\right) - \\
&-\frac{b_0\left(t\right)}{2}\left(\frac{z}{t}\right)^{1-k}\left(t-z\right)^{-(1+k)/2}F\left(\frac{1-k}{2},1-k,2-k;\frac{z}{t}\right), \\
K_6\left(t,z\right) &= \frac{2}{k+1}b'_0\left(t\right)z^{(1-k)/2}\left(\frac{t}{z}\right)^{(1+k)/2}F\left(k,1,\frac{k+3}{2};\frac{t}{z}\right) + \\
&+b_0\left(t\right)\left(z-t\right)^{-(1+k)/2}\left(\frac{z}{t}\right)^{(1-k)/2}F\left(\frac{1-k}{2},\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{t}{z}\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Подставляя (3.9), (3.10), (3.11) в (3.8), а (3.13), (3.14), (3.16) — в (3.12), а затем (3.8) и (3.12) — в равенство (3.7), получим следующие уравнения относительно неизвестной функции $\nu_0\left(t\right)$:

$$\nu_0\left(t\right) + \gamma_4\int_0^T \nu_0\left(z\right)K_7\left(t,z\right)dz = f_1\left(t\right), \quad 0<t<T, \tag{3.17}$$

где $\gamma_4=\cos(k\pi/2)\,\gamma_3/(\pi\gamma_0)$, $f_1(t)=D_{0t}^{(1-k)/2}f_0(t)\,/\,\{\gamma_0\Gamma[(1-k)/2]\}$,

$$K_7(t,z)=-\int_z^t\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-s)^{(k+1)/2}a'_0(s+\theta(t-s))\right](s-z)^{-k}\Phi(s-z)\,ds+$$
$$+(t-z)^{(1-k)/2}\left[a_0(t)+a'_0(t)(t-z)\right]\int_0^1\eta^{-k}(1-\eta)^{(k-1)/2}\Phi_0[(t-z)\eta]\,d\eta+$$
$$+\Gamma(1-k)\Gamma[(1+k)/2]\Gamma^{-1}[(3-k)/2]\left[a'_0(t)(t-z)+[(1-k)/2]\,a_0(t)\right](t-z)^{-(1+k)/2}+$$
$$+K_3(t,z)+K_5(t,z)-$$
$$-\int_0^z\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-s)^{(k+1)/2}b'_0(s+\theta(t-s))\right](z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,ds,\quad t>z,$$
$$K_7(t,z)=K_4(t,z)+K_6(t,z)-$$
$$-\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-s)^{(k+1)/2}b'_0(s+\theta(t-s))\right](z-s)^{-k}\Phi(s-z)\,ds,\quad t<z.$$

Учитывая условия теоремы, нетрудно убедиться, что $K_7(t,z)=|t-z|^{-(1+k)/2}K_8(t,z)$, $K_8(t,z)\in C(0\leqslant t,z\leqslant T)\cap C^2(0<t,\ z<T)$, $f_0(t)\in C[0,T]\cap C^3(0,T)$. Тогда, согласно легко доказуемому равенству

$$D_{0t}^{(1-k)/2}f_0(t)=\Gamma^{-1}[(1+k)/2]\left[f_0(0)\,t^{(k-1)/2}+t^{(k+1)/2}\int_0^1(1-\eta)^{(k-1)/2}f'_0(t\eta)\,d\eta\right],$$

из $f_1(t)=D_{0t}^{(1-k)/2}f_0(t)\,/\,\{\gamma_0\Gamma[(1-k)/2]\}$ следует, что $f_1(t)\in C^2(0,T)\cap L_2(0,T)$.

Следовательно, (3.17) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Оно эквивалентно системе (2.5), (2.8). Поэтому однородное уравнение

$$\nu_0(t)+\gamma_4\int_0^T\nu_0(z)\,K_7(t,z)\,dz=0,\quad 0<t<T,\tag{3.18}$$

соответствующее ему, эквивалентно однородной системе (3.1), (3.2). Так как система (3.1), (3.2) имеет только тривиальное решение, то интегральное уравнение (3.18) также имеет только тривиальное решение. Тогда согласно альтернативе Фредгольма [20] уравнение (3.17) имеет единственное решение в классе $C^2(0,T)\cap L_2(0,T)$. После того как найдена функция $\nu_0(t)$ из уравнения (3.17), функция $\nu(t)=e^{-\lambda^2t}\nu_0(t)$ будет известна, а функция $\tau(t)$ находится из равенства (2.5). После этого решение задачи H_0 в областях Q_1 и Q_2 определяется по формуле (2.3) и (2.4) соответственно. □

II. Пусть $p(t)\equiv0$, $t\in[0,T]$. Тогда из этого равенства при $t=0$ и $t=T$ следует, что $a(0)=0$, $b(T)=0$. Учитывая это, предположим, что $a(t)=t^{1-k/2}\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — известная функция. Тогда из равенства $p(t)=0$ следует, что $b(t)=(T-t)^{1-k/2}\beta(t)$, где $\beta(t)=-\alpha(t)-\Gamma(k/2)/\Gamma(k)\,c(t)$, а уравнение (2.8) переписывается в виде

$$\int_0^t\frac{\alpha(t)\,\nu(z)}{(t-z)^k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz+\int_t^T\frac{\beta(t)\,\nu(z)}{(z-t)^k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz=-\frac{\Gamma(k/2)\,\psi(t)}{\gamma_3\Gamma(k)}.\tag{3.19}$$

Теорема 3. *Если $p(t)\equiv0$, $a(t)=t^{1-k/2}\alpha(t)$, $\alpha'(t)\leqslant0$, $c'(t)\leqslant0$, $t\in[0,T]$, $\alpha(T)-\alpha(0)-\Gamma(k/2)\Gamma^{-1}(k)\,c(0)>0$, то задача H_0 не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.19), имеет только тривиальное решение. С этой целью, умножая уравнение (3.19) на функцию $\nu(t)$ и интегрируя по t в промежутке $[0,T]$, при $\psi(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$, имеем

$$\int_0^T \nu(t)\left\{\alpha(t)\int_0^t \frac{\nu(z)}{(t-z)^k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz+\beta(t)\int_t^T \frac{\nu(z)}{(z-t)^k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(t-z)]\,dz\right\}dt=0.$$

К этому равенству, применяя методику, изложенную при доказательстве леммы 1, находим, что в классе функций $L_2[0,T]$ $\nu(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Тогда из (3.1) следует, что $\tau(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$, а из формул (2.3) и (2.4) — $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{Q}$. Отсюда следует утверждение теоремы 3. $\square$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и условия*

$$\begin{gathered}\alpha(t),c(t)\in C^2[0,T]\cap C^4(0,T),\\ c(t)\neq 0,\quad [\alpha(t)-\cos(k\pi)\beta(t)]\beta(t)<0,\quad t\in[0,T],\\ \psi(t)=t^{\delta}\widetilde{\psi}(t),\quad \delta\geqslant(1-k)/2,\quad \widetilde{\psi}(t)\in C^1[0,T]\cap C^3(0,T),\\ \varphi(x)\in C[0,+\infty),\quad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.\end{gathered}\tag{3.20}$$

Тогда существует решение задачи H_0, притом оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяем оператор дифференцирования D_{0t}^{1-k} к (3.19). Затем, подставляя разложение оператора D_{0t}^{1-k} и поменяв порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, получим

$$\sum_{j=1}^{6} N_j(\nu)=-\gamma_3^{-1}\Gamma(k/2)\Gamma^{-1}(k)\,D_{0t}^{1-k}\psi(t),\quad t\in(0,T),\tag{3.21}$$

где

$$N_1(\nu)=\Gamma^{-1}(k)\frac{d}{dt}\int_0^t \nu(z)\,dz\int_z^t[\alpha(s)-\alpha(t)](t-s)^{k-1}(s-z)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(s-z)]\,ds,$$

$$N_2(\nu)=\Gamma^{-1}(k)\frac{d}{dt}\left\{\alpha(t)\int_0^t \nu(z)\,dz\int_z^t(t-s)^{k-1}(s-z)^{-k}\left[\bar{J}_{-k/2}(\lambda s-\lambda z)-1\right]ds\right\},$$

$$N_3(\nu)=\Gamma^{-1}(k)\frac{d}{dt}\left\{\alpha(t)\int_0^t \nu(z)\,dz\int_z^t(t-s)^{k-1}(s-z)^{-k}ds\right\},$$

$$\begin{aligned}N_4(\nu)&=\Gamma^{-1}(k)\frac{d}{dt}\int_0^t \nu(z)\,dz\int_0^z[\beta(s)-\beta(t)](t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(s-z)]\,ds+\\&+\Gamma^{-1}(k)\frac{d}{dt}\int_t^T \nu(z)\,dz\int_0^t[\beta(s)-\beta(t)](t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}\overline{J}_{-k/2}[\lambda(s-z)]\,ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_5(\nu)&=\Gamma^{-1}(k)\frac{d}{dt}\left\{\beta(t)\int_0^t \nu(z)\,dz\int_0^z(t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}\left[\overline{J}_{-k/2}(\lambda s-\lambda z)-1\right]ds+\right.\\&\left.+\beta(t)\int_t^T \nu(z)\,dz\int_0^t(t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}\left[\overline{J}_{-k/2}(\lambda s-\lambda z)-1\right]ds\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_6(\nu)&=\frac{1}{\Gamma(k)}\frac{d}{dt}\beta(t)\left\{\int_0^t \nu(z)\,dz\int_0^z(t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}ds+\right.\\&\left.+\int_t^T \nu(z)\,dz\int_0^t(t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}ds\right\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $N_3(\nu)$. Выполнив замену переменной по формуле $s = (t-z)\eta + z$ во внутреннем интеграле, а затем операции (d/dt), получим

$$N_3(\nu) = \Gamma(1-k)\frac{d}{dt}\left\{\alpha(t)\int_0^t \nu(z)\,dz\right\} = \Gamma(1-k)\,\alpha'(t)\int_0^t \nu(z)\,dz + \Gamma(1-k)\,\alpha(t)\,\nu(t).$$

Теперь рассмотрим функцию $N_6(\nu)$ и выполним операции d/dt. Затем в интегралах с коэффициентами $\beta(t)\,(d/dt)$ поменяем порядок интегрирования. В результате, учитывая обозначения D_{0t}^{1-k} и (3.6), имеем

$$N_6(\nu) = \frac{1}{\Gamma(k)}\beta'(t)\left\{\int_0^t \nu(z)\,dz\int_0^z (t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}ds + \right.$$
$$\left. + \int_t^T \nu(z)\,dz\int_0^t (t-s)^{k-1}(z-s)^{-k}ds\right\} + \Gamma(1-k)\,\beta(t)\,D_{0t}^{1-k}I_{tT}^{1-k}\nu(t).$$

Отсюда во внутренних интегралах, выполняя замену переменных и учитывая формулу (см. [4])

$$D_{ax}^{\alpha}I_{xb}^{\alpha}f(x) = \cos(\alpha\pi)\,f(x) + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_a^b\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(t)}{t-x}dt, \quad 0<\alpha<1,$$

и интегральное представление функции Гаусса (3.15), получим окончательный вид $N_6(\nu)$:

$$N_6(\nu) = -\Gamma(1-k)\cos(k\pi)\,\beta(t)\,\nu(t) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\Gamma(1-k)\sin(k\pi)\beta(t)\int_0^T\left(\frac{z}{t}\right)^{1-k}\frac{\nu(z)}{z-t}dz +$$
$$+\frac{\beta'(t)}{\Gamma(k)}\times\left\{\int_0^t \nu(z)\left(\frac{z}{t}\right)^{1-k}\frac{1}{1-k}F\left(1-k,1,2-k;\frac{z}{t}\right)dz + \right.$$
$$\left. + \int_t^T \nu(z)\left(\frac{t}{z}\right)^{k}\frac{1}{k}F\left(k,1,1+k;\frac{t}{z}\right)dz\right\}.$$

Функции $N_1(\nu)$, $N_2(\nu)$, $N_4(\nu)$, $N_5(\nu)$ исследуются аналогично функциям $M_{11}(\nu)$, $M_{12}(\nu)$, $M_{21}(\nu)$ и $M_{22}(\nu)$ соответственно.

Подставляя найденные выражения для $N_j(\nu)$, $j=\overline{1,6}$, в уравнение (3.21), а затем умножая полученное равенство на t^{1-k}, получим сингулярное интегральное уравнение вида

$$A(t)\,\rho(t) + \frac{B(t)}{\pi}\int_0^T\frac{\rho(z)}{z-t}dz + \int_0^T \rho(z)\,(t/z)^{1-k}K_9(t,z)\,dz = g(t), \quad t\in(0,T), \tag{3.22}$$

где $\rho(t) = \nu(t)\,t^{1-k}$, $A(t) = \Gamma(1-k)\,[\alpha(t) - \cos(k\pi)\,\beta(t)]$, $B(t) = \Gamma(1-k)\sin(k\pi)\,\beta(t)$, а $K_9(t,z)$ и $g(t)$ — известные функции, причем $K_9(t,z) = \ln|x-t|\,K_{10}(t,z)$, $K_{10}(t,z)\in$ $\in C(0\leqslant t,z\leqslant T)\cap C^2(0<t,z<T)$, а $g(t)\in C[0,T)\cap C^2(0,T)$, $g(t)\in L_2(0,T)$.

Так как $A^2(t)+B^2(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$, то (3.22) является сингулярным интегральным уравнением нормального типа [27]. Учитывая условия (3.20), легко убедиться, что его индекс равен нулю [27] в классе функций $h(0)$, ограниченных при $t=0$ и неограниченных при $t=T$. Поэтому, регуляризируя (3.22) методом Карлемана–Векуа [27], имеем эквивалентное уравнение

$$\rho(t) + \int_0^T \rho(z)\,K_{10}(t,z)\,dz = g_1(z), \quad 0<t<T, \tag{3.23}$$

где

$$K_{10}(t,z)=\frac{A^2(t)}{A^2(t)+B^2(t)}\left(\frac{t}{z}\right)^{1-k}K_9(t,z)-\frac{1}{\pi}\frac{B^2(t)}{A^2(t)+B^2(t)}\int_0^T\left(\frac{\eta}{z}\right)^{1-k}\frac{X(t)}{X(\eta)}\frac{K_9(\eta,z)}{\eta-t}d\eta,$$

$$g_1(t)=\frac{A^2(t)\,g(t)}{A^2(t)+B^2(t)}-\frac{1}{\pi}\frac{B^2(t)}{A^2(t)+B^2(t)}\int_0^T\frac{X(t)\,g(z)}{X(z)(z-t)}dz,\ X(t)=\omega(t)\,t^{\gamma_0}(T-t)^{\gamma_1},$$

$$\gamma_0=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin(k\pi)\,\beta(0)}{\alpha(0)-\cos(k\pi)\,\beta(0)},\qquad \gamma_1=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin(k\pi)\,\beta(T)}{\alpha(T)-\cos(k\pi)\,\beta(T)},$$

$\omega(t)$ — известная функция, не обращающаяся в нуль и удовлетворяющая условию Гельдера.

Умножая уравнение (3.23) на $t^{(k-1)/2}$ и введя обозначение $\rho_0(t)=t^{(k-1)/2}\rho(t)=$ $=t^{(1-k)/2}\nu(t)$, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\rho_0(t)+\int_0^T\rho_0(z)\,K_{11}(t,z)\,dz=g_0(t),\quad 0<t<T, \tag{3.24}$$

эквивалентное задаче H_0, где $g_0(t)=t^{(k-1)/2}g_1(t)$, $K_{11}(t,z)=(z/t)^{(1-k)/2}K_{10}(t,z)$. Однозначная и безусловная разрешимость уравнения (3.24), в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи H_0, то есть из теоремы 3.

После того как найдена функция $\rho_0(t)$ из уравнения (3.24), функция $\nu(t)=\rho_0(t)\,t^{(k-1)/2}$ будет известна, а функция $\tau(t)$ находится из равенства (2.5). После этого решение задачи H_0 в областях Q_1 и Q_2 определяется формулами (2.3) и (2.4). Теорема 4 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59. http://mi.mathnet.ru/de624
2. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и разрывами на переходной линии // Учен. зап. Казан. ун-та. 1962. Т. 122. Кн. 3. С. 3–16. http://mi.mathnet.ru/uzku131
3. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М: Наука, 2006.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965.
6. Чориева С. Т. Об одной задаче со смещением на внутренних характеристиках // Узбекский математический журнал. 2015. № 4. С. 171–178.
7. Мирсабуров М., Чориева С. Т. Задача с аналогом условия Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Изв. вузов. Матем. 2017. № 11. С. 39–45. http://mi.mathnet.ru/ivm9299
8. Кхан М. Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 4. С. 710–711. http://mi.mathnet.ru/de5156
9. Репин О. А., Кумыкова С. К. Внутренне краевая задача с оператором Сайго для уравнения Геллерстедта // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1340–1349.
10. Репин О. А., Кумыкова С. К. Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Вып. 4 (29). С. 17–25. https://doi.org/10.14498/vsgtu1123
11. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал. Алматы. 2009. Т. 9. № 2 (32). С. 78–92.

12. Сабитов К. Б., Егорова И. П. О корректности краевых задач с условием периодичности для уравнения смешанного типа второго рода // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2019. Т. 23. № 3. С. 430–451. https://doi.org/10.14498/vsgtu1718
13. Ионкин Н. И., Моисеев Т. Е. Решение задачи Геллерстедта с нелокальными краевыми условиями // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400. № 5. С. 592–595. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17297282
14. Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M. B. Spectral properties of a Frankl type problem for parabolic-hyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018. No. 65. P. 1–11. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2018/65/sadybekov.pdf
15. Хубиев К. У. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа // Математичекие заметки СВФУ. 2017. Т. 24. № 3. С. 12–18. https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.3.10886
16. Хубиев К. У. Задачи со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 82–90. https://doi.org/10.20537/vm180108
17. Eleev V. A., Kumykova S. K. On some boundary-value problems with a shift on characteristics for a mixed equation of hyperbolic-parabolic type // Ukrainian Mathematical Journal. 2000. Vol. 52. No. 5. P. 809–820. https://doi.org/10.1007/BF02487291
18. Уринов А. К., Халилов К. С. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2014. № 5. С. 8–10.
19. Салахитдинов М. С., Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе–Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода // Изв. вузов. Матем. 2015. № 6. С. 43–52. http://mi.mathnet.ru/ivm9009
20. Сидоров С. Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Изв. вузов. Матем. 2015. № 12. С. 55–65. http://mi.mathnet.ru/ivm9062
21. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные полиномы. Москва: Наука, 1966.
23. Уринов А. К., Халилов К. С. О некоторых неклассических задачах для одного класса параболо-гиперболических уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. 2014. Т. 16. № 4. С. 42–49. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22824402
24. Маманазаров А. О. Нелокальная задача для одного параболо-гиперболического уравнения // Бюллетень Института Математики. 2018. № 6. С. 25–31.
25. Маманазаров А. О. Об одной задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Бюллетень Института Математики. 2019. № 2. С. 7–16.
26. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
27. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 04.02.2020

Уринов Ахмаджон Кушакович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
E-mail: urinovak@mail.ru

Маманазаров Азизбек Отажон угли, ассистент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
E-mail: mega.mamanazarov@mail.ru

Цитирование: А. К. Уринов, А. О. Маманазаров. Однозначная разрешимость одной нелокальной задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 270–289.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 270–289.

A. K. Urinov, A. O. Mamanazarov

Unique solvability of a nonlocal problem with shift for a parabolic-hyperbolic equation

Keywords: parabolic-hyperbolic equation, singular coefficient, spectral parameter, noncharacteristic line of type changing, nonlocal problem, unique solvability.

MSC2010: 35M10, 35M12

DOI: 10.35634/vm200210

In the paper, a parabolic-hyperbolic equation with a singular coefficient and a spectral parameter in the domain which consists of a characteristic triangle and a half strip has been considered. A nonlocal problem connecting the values of the desired function at the two points of boundary characteristics and the line of equation type changing by means of two operators, the first of which depends on the coefficient of the singularity and the second one - on the spectral parameters, is formulated. The considered problem is investigated by reducing it to the system of equations in the trace of the desired function and its derivative with respect to x on the line of equation type changing. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals, for this we use integral representations of Euler gamma-function and Bessel function of the first kind. The existence of the solution is proved by the method of integral equations, for this we equivalently reduce the considered problem to the Fredholm integral equation of the second kind which solvability follows from the uniqueness of the problem solution. Sufficient conditions for unique solvability of the considered problem are found.

REFERENCES

1. Nakhushev A. M. Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59 (in Russian).
http://mi.mathnet.ru/eng/de624
2. Zhegalov V. I. A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, 1962, vol. 122, book 3, pp. 3–16 (in Russian).
http://mi.mathnet.ru/eng/uzku131
3. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* (Offset problems for partial differential equations), Moscow: Nauka, 2006.
4. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, New York: Gordon and Breach, 1993. https://zbmath.org/?q=an:0818.26003
5. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. 1*, New York: McGraw-Hill, 1953.
6. Chorieva S. T. About one problem with bias on internal characteristics, *Uzbek Math. J.*, 2015, no. 4, pp. 171–178 (in Russian).
7. Mirsaburov M., Chorieva S. T. A problem with an analog of Frankl condition on the characteristics for Gellerstedt equation with singular coefficient, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 11, pp. 34–39.
https://doi.org/10.3103/S1066369X17110056
8. Khan M. R. A nonlocal problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Uravn.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 710–711 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de5156
9. Repin O. A., Kumykova S. K. Interior-boundary value problem with Saigo operators for the Gellerstedt equation, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 10, pp. 1307–1316.
https://doi.org/10.1134/S0012266113100121
10. Repin O. A., Kumykova S. K. Problem with shift for the third-order equation with discontinuous coefficients, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, issue 4 (29), pp. 17–25 (in Russian).
https://doi.org/10.14498/vsgtu1123

11. Kozhanov A. I., Pul'kina L. S. On the solvability of some boundary value problems with shift for linear hyperbolic equations, *Matematicheskii Zhurnal*, Almaty, 2009, vol. 9, no. 2 (32), pp. 78–92 (in Russian).
12. Sabitov K. B., Egorova I. P. On the correctness of boundary value problems for the mixed type equation of the second kind, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 430–451 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1718
13. Ionkin N. I., Moiseev T. E. Solution to Gellerstedt's problem with nonlocal boundary conditions, *Doklady Mathematics*, 2005, vol. 71, no. 1, pp. 101–104. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13490243
14. Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M. B. Spectral properties of a Frankl type problem for parabolic-hyperbolic equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, no. 65, pp. 1–11. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2018/65/sadybekov.pdf
15. Khubiev K. U. On a non-local problem for mixed hyperbolic-parabolic equations, *Mathematical Notes of NEFU*, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 12–18 (in Russian). https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.3.10886
16. Khubiev K. U. Boundary value problem with shift for loaded hyperbolic-parabolic type equation involving fractional diffusion operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 82–90 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180108
17. Eleev V. A., Kumykova S. K. On some boundary-value problems with a shift on characteristics for a mixed equation of hyperbolic-parabolic type, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, no. 5, pp. 809–820. https://doi.org/10.1007/BF02487291
18. Urinov A. K., Khalilov K. S. Problems with nonlocal conditions for a parabolic-hyperbolic equation, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*, 2014, no. 5, pp. 8–10 (in Russian).
19. Salakhitdinov M. S., Islamov N. B. A nonlocal boundary-value problem with the Bitsadze–Samarskii conditon for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 34–42. https://doi.org/10.3103/S1066369X15060067
20. Sidorov S. N. Nonlocal problems for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with power degeneration, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 12, pp. 46–55. https://doi.org/10.3103/S1066369X15120051
21. Salakhitdinov M. S., Urinov A. K. *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* (Boundary value problems for mixed type equations with spectral parameters), Tashkent: Fan, 1997.
22. Bateman G., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. 2*, New York: McGraw–Hill, 1953.
23. Urinov A. K., Khalilov K. S. Some non-classical problems for one class of parabolic-hyperbolic equations, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi Akademii Nauk*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 42–49 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22824402
24. Mamanazarov A. O. Nonlocal problem for one parabolic-hyperbolic equation, *Byulleten' Instituta Matematiki*, 2018, no. 6, pp. 25–31 (in Russian).
25. Mamanazarov A. O. On a problem with shift for a parabolic-hyperbolic equation, *Byulleten' Instituta Matematiki*, 2019, no. 2, pp. 7–16 (in Russian).
26. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* (Handbook of linear equations in mathematical physics), Moscow: Fizmatlit, 2001.
27. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equations), Moscow: Nauka, 1968.

Received 04.02.2020

Urinov Akhmadzhon Kushakovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, ul. Murabbiylar, 19, Fergana, 150100, Uzbekistan.
E-mail: urinovak@mail.ru

Mamanazarov Azizbek Otazhon ugli, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, ul. Murabbiylar, 19, Fergana, 150100, Uzbekistan.
E-mail: mega.mamanazarov@mail.ru

Citation: A. K. Urinov, A. O. Mamanazarov. Unique solvability of a nonlocal problem with shift for a parabolic-hyperbolic equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 270–289.