МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 259–269.

УДК 517.958, 530.145.6, 517.984.55, 517.984.66

© *Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин*

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНИАНА БОГОЛЮБОВА – ДЕ ЖЕНА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ЩЕЛИ

Рассматривается гамильтониан Боголюбова – де Жена, возмущенный малым потенциалом, описывающий квазичастицы вида «электрон плюс дырка», в частности андреевские локализованные состояния (АЛС) в одномерной сверхпроводящей структуре при наличии примеси. Интерес к упомянутым квазичастицам резко возрос в последние 15–20 лет благодаря открытию в топологических сверхпроводниках майорановских локализованных состояний (МЛС). МЛС представляют собой устойчивые к внешним воздействиям нейтральные квазичастицы с нулевой энергией, весьма перспективные для будущего использования в квантовых вычислениях. Исследование возникновения и поведения, в зависимости от параметров системы и топологической фазы, АЛС, описываемых собственными функциями гамильтониана Боголюбова – де Жена, интересно как с математической точки зрения, в сравнении с обычным оператором Шрёдингера, так и с физической, поскольку может прояснить предпосылки возникновения МЛС в топологически нетривиальной фазе и майораноподобных состояний (часто играющих роль МЛС) в топологически тривиальной фазе. Изучение рассеяния интересно тем, что вероятность прохождения квазичастицы через потенциальный барьер пропорциональна кондактансу, который можно измерить в эксперименте, что в принципе дает возможность связать величину кондактанса с наличием АЛС. В статье найдены условия возникновения собственных значений (энергий квазичастиц) в сверхпроводящей щели, имеющейся в непрерывном спектре гамильтониана, а также их зависимость от параметров как в топологически нетривиальной, так и в топологически тривиальной фазах. Кроме того, исследована задача рассеяния для энергий вблизи границы щели; в частности, найдена вероятность прохождения квазичастицы через потенциальный барьер как функция от параметров системы.

Ключевые слова: гамильтониан Боголюбова – де Жена, функция Грина, спектр, собственное значение, андреевские локализованные состояния, задача рассеяния, вероятность прохождения.

DOI: 10.35634/vm200209

Гамильтониан Боголюбова – де Жена (БдЖ) (см. обзоры [1–5]) описывает, в одночастичном приближении, возбужденные состояния (квазичастицы, являющиеся с определенными вероятностями электронами или дырками), возникающие в сверхпроводящей щели. Данный гамильтониан представляет собой хорошо известный оператор Шрёдингера в случае сверхпроводящих структур. Интерес к упомянутым квазичастицам резко возрос в последние 15–20 лет благодаря открытию в топологических сверхпроводниках майорановских локализованных состояний (МЛС) [1–5]. МЛС представляют собой устойчивые к внешним воздействиям нейтральные квазичастицы с нулевой энергией вида «электрон плюс дырка», весьма перспективные для будущего использования в квантовых вычислениях [1–5].

Под андреевскими локализованными состояниями (АЛС) будут пониматься собственные функции возмущенного оператора БдЖ, отвечающие собственным значениям (с физической точки зрения — энергиям) в лакуне спектра (т. е. в сверхпроводящей щели). (В частности, МЛС — это АЛС с нулевой энергией, которое локализовано вблизи границы между двумя топологическими фазами.) В статье изучаются АЛС с энергиями вблизи граничных точек сверхпроводящей щели. С целью получения аналитических результатов вместо рассматриваемой обычно одномерной гетероструктуры «сверхпроводник–

нормальный металл–сверхпроводник» берется более простая модель «сверхпроводник–примесь–сверхпроводник». В работе найдены условия возникновения собственных значений в сверхпроводящей щели (т. е. их «отрыва» от граничных точек щели, что означает переход полюса возмущенной функции Грина гамильтониана БдЖ через граничную точку), а также их зависимость от параметров системы как в топологически нетривиальной, так и в топологически тривиальной фазах. Кроме того, исследована задача рассеяния вблизи границы щели. (Заметим, что речь в статье идет не о рассеянии, приводящем к хорошо известному отражению Андреева в структуре «нормальный металл-сверхпроводник» (см., например, [6]), а о рассеянии на примеси для энергий в непрерывном спектре.) Представляется, что исследование возникновения и поведения, в зависимости от топологической фазы, АЛС интересно как с математической точки зрения, в том числе в сравнении с обычным оператором Шрёдингера [7,8], так и с физической, поскольку может прояснить предпосылки возникновения МЛС в топологически нетривиальной фазе и майораноподобных состояний (часто играющих роль МЛС) в топологически тривиальной фазе (см. [9–11]). Изучение рассеяния может быть интересно тем, что вероятность прохождения квазичастицы через потенциальный барьер пропорционально кондактансу, который можно измерить в эксперименте, что в принципе дает возможность связать величину кондактанса с наличием АЛС и его энергией.

§ 1. Возникновение андреевских локализованных состояний

Рассматривается гамильтониан Боголюбова – де Жена, имеющий вид [1,2,12]

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \mu & -\Delta\partial_x \\ \Delta\partial_x & \partial_x^2 + \mu \end{pmatrix},$$

где вещественное число $\Delta \neq 0$ — величина спаривающего потенциала, μ — химический потенциал. После преобразования Фурье вида

$$(\mathcal{F}\psi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\psi(x)\,dx$$

получаем, обозначая $\widetilde{H}(p) = \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}$,

$$\widetilde{H}(p) - E = \begin{pmatrix} p^2 - \mu - E & -ip\Delta \\ ip\Delta & -p^2 + \mu - E \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где E — спектральный параметр (энергия квазичастицы). Равенство $\det\left(\widetilde{H}(p) - E\right) = 0$, т. е. закон дисперсии, имеет вид

$$E^2 = \left(p^2 - \mu + \Delta^2/2\right)^2 + \mu\Delta^2 - \Delta^4/4. \tag{1.2}$$

Если $\mu \geqslant \Delta^2/2$, то спектр H, равный области значений E в (1.2) при $-\infty < p < +\infty$, определяется неравенством $|E| \geqslant |\Delta|\sqrt{\mu - \Delta^2/4}$. Если $\mu < \Delta^2/2$, то спектр описывается неравенством $|E| \geqslant |\mu|$, а граница лакуны в спектре (сверхпроводящей щели) — равенством

$$E^2 = \left(\mu - \Delta^2/4\right)^2 + \mu\Delta^2 - \Delta^2/4 = \mu^2.$$

Функция Грина гамильтониана H (отождествляем с ее резольвентой) имеет вид [13]

$$
\begin{aligned}
((H-E)^{-1}\psi)_1(x) = &-\frac{a-\Delta^2/2+E}{4ip_+a}\int_R e^{ip_+|x-x'|}\psi_1(x')\,dx' - \\
&-\frac{a+\Delta^2/2-E}{4ip_-a}\int_R e^{ip_-|x-x'|}\psi_1(x')\,dx' + \\
&+\frac{\Delta}{4a}\int_R \left(e^{ip_+|x-x'|}-e^{ip_-|x-x'|}\right)\operatorname{sgn}(x-x')\psi_2(x')\,dx', \\
((H-E)^{-1}\psi)_2(x) = &\frac{a-\Delta^2/2-E}{4ip_+a}\int_R e^{ip_+|x-x'|}\psi_2(x')\,dx' + \\
&+\frac{a+\Delta^2/2+E}{4ip_-a}\int_R e^{ip_-|x-x'|}\psi_2(x')\,dx' - \\
&-\frac{\Delta}{4a}\int_R \left(e^{ip_+|x-x'|}-e^{ip_-|x-x'|}\right)\operatorname{sgn}(x-x')\psi_1(x')\,dx',
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где

$$
a=\sqrt{E^2+\Delta^4/4-\mu\Delta^2},\quad p_\pm=\sqrt{\mu\pm a-\Delta^2/2} \tag{1.4}
$$

(здесь импульс $p=p_\pm$ найден из закона дисперсии (1.2), при этом выбран арифметический корень).

Будем далее предполагать, что $\mu \ll \Delta^2/2$. Тогда сверхпроводящая щель равна $(-|\mu|,|\mu|)$ и мала.

Будем рассматривать $p=p_+$ из малой окрестности полюса $p=0$ функции Грина (1.3), что позволит в силу альтернативы Фредгольма [14] исследовать собственные значения оператора H, возмущенного потенциалом. Вследствие (1.2) получаем

$$
E^2=\mu^2+\Delta^2p^2+o(p^2). \tag{1.5}
$$

Из равенств (1.4), (1.5) найдем

$$
E=\pm\mu\left(1+\frac{\Delta^2p^2}{2\mu^2}\right)+o(p^2),\quad a=\frac{\Delta^2}{2}-\mu+\frac{\mu^2}{\Delta^2}+p^2+o(p^2),\quad p_-=i|\Delta|+o(p^2). \tag{1.6}
$$

Из (1.3), (1.6) следует, что других особенностей, кроме полюса вблизи точки $p=p_+=0$ у функции Грина нет.

Рассмотрим моделирующий примесь потенциал вида

$$
V=\varepsilon V(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{1.7}
$$

где $V(x)$ удовлетворяет неравенству

$$
|V(x)|\leqslant Ce^{-\gamma|x|},\quad C,\ \gamma>0, \tag{1.8}
$$

и

$$
V_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}V(x)\,dx\neq 0.
$$

Предполагаем, что $\varepsilon>0$ мало и $p=p_+\approx 0$. Выделим в (1.3) полюс в чистом виде, полагая

$$
\frac{e^{ip|x-x'|}}{p}=\frac{1}{p}+\frac{e^{ip|x-x'|}-1}{p} \tag{1.9}
$$

(второе слагаемое в правой части (1.9) является аналитической функцией). Пользуясь (1.3), (1.7), (1.9), запишем уравнение Дайсона:

$$\psi = -(H-E)^{-1}V\psi$$

для нахождения собственных значений гамильтониана $H+V$ в виде

$$\begin{gathered}\psi_1(x) = -\frac{(\mu-E)\varepsilon}{2ip\Delta^2}\int_R V(x')\psi_1(x')\,dx' + \\ +\varepsilon\int_R K_{11}(x,x',p,E)V(x')\psi_1(x')\,dx' + \varepsilon\int_R K_{12}(x,x',p,E)V(x')\psi_2(x')\,dx', \\ \psi_2(x) = -\frac{(\mu+E)\varepsilon}{2ip\Delta^2}\int_R V(x')\psi_2(x')\,dx' + \\ +\varepsilon\int_R K_{21}(x,x',p,E)V(x')\psi_2(x')\,dx' + \varepsilon\int_R K_{22}(x,x',p,E)V(x')\psi_1(x')\,dx'.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Для того чтобы исследовать задачу в рамках пространства $L^2(\mathbb{R})$, умножим уравнения (1.10) на $\sqrt{|V(x)|}$ и положим $\varphi = \sqrt{|V(x)|}\psi(x)$ (ср. [15]). Тогда, в силу равенства $V(x) = \sqrt{|V(x)|}\sqrt{V(x)}$, где $\sqrt{V(x)} = \sqrt{|V(x)|}\mathrm{sgn}V(x)$, получим вместо (1.10) систему

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= -\frac{(\mu-E)\varepsilon\sqrt{|V(x)|}}{2ip\Delta^2}\left(\sqrt{V},\varphi_1\right) + \varepsilon\left(A_{11}(p,E),\varphi_1\right)(x) + \varepsilon\left(A_{12}(p,E),\varphi_2\right)(x), \\ \varphi_2(x) &= -\frac{(\mu+E)\varepsilon\sqrt{|V(x)|}}{2ip\Delta^2}\left(\sqrt{V},\varphi_2\right) + \varepsilon\left(A_{21}(p,E),\varphi_2\right)(x) + \varepsilon\left(A_{22}(p,E),\varphi_1\right)(x),\end{aligned} \tag{1.11}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, A_{ij} — оператор Гильберта–Шмидта с ядром

$$\sqrt{|V(x)|}K_{ij}(x,x',p,E)\sqrt{V(x')}$$

из $(L^2(\mathbb{R}))^2$, аналитически зависящий от (p,E) из комплексной окрестности нуля (считаем, что константа γ в (1.8) достаточна велика). Перепишем (1.11), вводя обозначения

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, \quad C_j = \left(\sqrt{V},\varphi_j\right), \quad j=1,2,$$

в следующем виде:

$$\varphi - \varepsilon A(p,E)\varphi = -\frac{\varepsilon\sqrt{|V(x)|}}{2ip\Delta^2}\left((\mu-E)C_1,(\mu+E)C_2\right)^T.$$

Отсюда, для достаточно малых ε,

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = -\frac{\varepsilon}{2ip\Delta^2}\left(1-\varepsilon A(p,E)\right)^{-1}\begin{pmatrix}(\mu-E)C_1\sqrt{|V(x)|} \\ (\mu+E)C_2\sqrt{|V(x)|}\end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Умножая (1.12) скалярно на $\sqrt{V(x)}$, получим систему

$$\begin{gathered}C_j = -\frac{\varepsilon}{2ip\Delta^2}\left((\mu-E)C_1\left(\left((1-\varepsilon A(p,E))^{-1}\left(\sqrt{|V(x)|},0\right)^T\right)_j,\sqrt{V(x)}\right) + \right. \\ \left. + (\mu+E)C_2\left(\left((1-\varepsilon A(p,E))^{-1}\left(0,\sqrt{|V(x)|}\right)^T\right)_j,\sqrt{V(x)}\right)\right), \quad j=1,2.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\left(\left((1-\varepsilon A(p,E))^{-1}\left(\sqrt{|V(x)|},0\right)^T\right)_1,\sqrt{V(x)}\right)=V_0+\varepsilon a_{11}(p,E),\\ \left(\left((1-\varepsilon A(p,E))^{-1}\left(0,\sqrt{|V(x)|}\right)^T\right)_1,\sqrt{V(x)}\right)=\varepsilon a_{12}(p,E),\\ \left(\left((1-\varepsilon A(p,E))^{-1}\left(\sqrt{|V(x)|},0\right)^T\right)_2,\sqrt{V(x)}\right)=\varepsilon a_{21}(p,E),\\ \left(\left((1-\varepsilon A(p,E))^{-1}\left(0,\sqrt{|V(x)|}\right)^T\right)_2,\sqrt{V(x)}\right)=V_0+\varepsilon a_{22}(p,E),\end{gathered} \tag{1.14}$$

где функции a_{ij} аналитичны в окрестности нуля. Условие существования ненулевого решения системы (1.13) с учетом (1.14) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} p+\dfrac{\varepsilon(\mu-E)(V_0+\varepsilon a_{11})}{2i\Delta^2} & \dfrac{\varepsilon^2(\mu+E)a_{12}}{2i\Delta^2}\\ \dfrac{\varepsilon^2(\mu-E)a_{21}}{2i\Delta^2} & p+\dfrac{\varepsilon(\mu+E)(V_0+\varepsilon a_{22})}{2i\Delta^2}\end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$p=-\frac{\varepsilon\mu V_0}{2i\Delta^2}\pm\sqrt{-\frac{\varepsilon^2\mu^2V_0^2}{4\Delta^4}+\frac{\varepsilon^2(\mu^2-E^2)V_0^2}{4\Delta^4}+O(\varepsilon^2)}=\frac{i\varepsilon V_0(\mu\mp E)}{2\Delta^2}+O(\varepsilon^2), \tag{1.15}$$

где $O(\varepsilon^2)=\varepsilon^2\alpha(p,E,\varepsilon)$, причем $\alpha(p,E,\varepsilon)$ аналитически зависит от параметров в окрестности нуля. Вводя обозначение

$$\widetilde{p}_\pm=p-\frac{i\varepsilon V_0(\mu\pm E)}{2\Delta^2}, \tag{1.16}$$

уравнения (1.15) можно представить в виде

$$\widetilde{p}_\pm=\varepsilon^2\alpha_\pm(\widetilde{p}_\pm,E,\varepsilon), \tag{1.17}$$

где $\alpha_\pm$ — аналитические функции в окрестности нуля по первой переменной. Уравнение (1.17) можно рассматривать как уравнения на неподвижную точку в окрестности $\widetilde{p}_\pm=0$, поскольку производная правой части по $\widetilde{p}_\pm$ сколь угодно мала в рассматриваемой окрестности в силу малости ε. Таким образом, уравнения имеют для каждого из знаков «$\pm$» единственное решение. Отбрасывая в (1.16) $\widetilde{p}_\pm=O(\varepsilon^2)$, получаем зависимость p от параметров системы

$$p=\frac{i\varepsilon V_0(\mu\pm E)}{2\Delta^2}. \tag{1.18}$$

Согласно (1.18) p чисто мнимое.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *В топологически нетривиальной фазе ($\mu>0$) в достаточно малой окрестности граничной точки щели при $V_0>0$ (в этом случае волновая функция убывает) и всех достаточно малых ε существует единственное собственное значение E оператора $H+V$, для которого справедливо равенство*

$$E=\mp\left(\mu+\frac{2i\Delta^2p}{\varepsilon V_0}\right) \tag{1.19}$$

(знак «$+$» в (1.19) соответствует верхней границе щели, а «$-$» — нижней). Это же верно в топологически тривиальной фазе ($\mu<0$) при $V_0<0$; знак «$+$» («$-$») соответствует нижней (верхней) границе щели.

Замечание 1. Найдем приближенные выражения для собственных функций рассматриваемого гамильтониана. Отбрасывая в (1.13) слагаемые порядка $O(\varepsilon)$, получим

$$C_1 = -\frac{\varepsilon(\mu - E)V_0}{2ip\Delta^2}C_1, \quad C_2 = -\frac{\varepsilon(\mu + E)V_0}{2ip\Delta^2}C_2.$$

Для знака «$-$» в (1.19) $C_1 = 0$, C_2 любое. Следовательно, согласно (1.12) соответствующая нормированная волновая функция имеет вид $\psi(x) \approx (0,1)^T$, т. е. описывает дырочноподобную квазичастицу. В случае знака «$+$» имеем электроноподобную квазичастицу.

§ 2. Задача рассеяния

Рассмотрим задачу рассеяния для гамильтониана $H+V$, используя уравнение Липпмана–Швингера:

$$\psi = \psi_0 - (H - E)^{-1}V\psi, \tag{2.1}$$

где ψ_0 описывает налетающую квазичастицу и удовлетворяет уравнению $H\psi_0 = E\psi_0$, а V имеет вид (1.7). Предполагаем, что энергия E близка к одной из граничных точек сверхпроводящей щели. Пусть $|E| > |\mu|$, $E \approx \mu$. Тогда в силу (1.2)

$$p^4 - 2(\mu - \Delta^2/2)p^2 - (E^2 - \mu^2) = 0,$$

откуда

$$\begin{gathered} p^2 = -(\Delta^2/2 - \mu) \pm \sqrt{(\Delta^2/2 - \mu)^2 + E^2 - \mu^2} \approx \\ \approx -\Delta^2/2\left(1 \mp \left(1 + \frac{2(E^2 - \mu^2)}{\Delta^4}\right)\right). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Выбор знака «$+$» в (2.2) соответствует экспоненциально возрастающим (убывающим) состояниям, поэтому для нахождения ψ_0 выбираем знак «$-$», тогда

$$p = p_+ = \frac{\sqrt{E^2 - \mu^2}}{|\Delta|} \approx 0.$$

Ищем ψ_0 в виде $\psi_0(x) = \widetilde{\psi}_0 e^{ipx}$, где $\widetilde{\psi}_0 = (\widetilde{\psi}_{01}, \widetilde{\psi}_{02})$ удовлетворяет, согласно (1.1), равенству

$$\left(\widetilde{H}(p) - E\right)\widetilde{\psi}_0 \approx -2\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_{01} \\ \widetilde{\psi}_{02} \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $\widetilde{\psi}_0 = (0,1)^T$ и

$$\psi_0 = (0,1)^T e^{px} = (0,1)^T e^{i\left(\sqrt{E^2-\mu^2}/|\Delta|\right)x}. \tag{2.3}$$

Таким образом, по первой («электронной») компоненте рассеяние не происходит. Для второй («дырочной») компоненты из (1.3), (1.6), (2.1), (2.3) и условия $E \approx \mu$ получаем (далее все обозначения совпадают с введенными выше)

$$\begin{gathered} \psi_1(x) = -\frac{(\mu - E)\varepsilon}{2ip\Delta^2}e^{ip|x|}\int_R V(x')\psi_1(x')\,dx' + \\ + \varepsilon\int_R K_{11}(x,x',p,E)V(x')\psi_1(x')\,dx' + \varepsilon\int_R K_{12}(x,x',p,E)V(x')\psi_2(x')\,dx', \\ \psi_2(x) = e^{ipx} - \frac{(E + \mu)\varepsilon}{2ip\Delta^2}e^{ip|x|}\int_R V(x')\psi_2(x')\,dx' + \\ + \varepsilon\int_R K_{21}(x,x',p,E)V(x')\psi_2(x')\,dx' + \varepsilon\int_R K_{22}(x,x',p,E)V(x')\psi_1(x')\,dx'. \end{gathered}$$

Пренебрегая слагаемыми порядка $O(\varepsilon)$, получим

$$\psi_2(x) = e^{ipx} - \frac{(E+\mu)\varepsilon}{2ip\Delta^2} e^{ip|x|} \int_R V(x')\psi_2(x')\,dx' \tag{2.4}$$

или

$$\varphi_2(x) = \sqrt{|V(x)|}e^{ipx} - \frac{\sqrt{E+\mu}\sqrt{|V(x)|}}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}}\varepsilon e^{ip|x|}\left(\sqrt{V(x)}, \varphi_2\right). \tag{2.5}$$

После умножения (2.5) скалярно на $\sqrt{V}$ найдем

$$\left(\sqrt{V}, \varphi_2\right) = \int_R V(x')e^{ipx'}\,dx' \Big/ \left(1 + \frac{\sqrt{E+\mu}\varepsilon}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}} \int_R V(x')e^{ip|x'|}\,dx'\right).$$

Отсюда и из (2.4)

$$\psi_2(x) = e^{ipx} - \frac{\sqrt{E+\mu}}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}}\varepsilon e^{ip|x|} \int_R V(x')e^{ipx'}\,dx' \Big/ \left(1 + \frac{\sqrt{E+\mu}\varepsilon}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}} \int_R V(x')e^{ip|x'|}\,dx'\right). \tag{2.6}$$

Т. к. $p = p_+ \approx 0$, то $\int_R V(x')e^{ip|x'|}\,dx' \approx V_0$ и $\int_R V(x')e^{ipx'}\,dx' \approx V_0$. Равенство (2.6) примет вид

$$\psi_2(x) = e^{ipx} - \frac{\sqrt{E+\mu}\varepsilon V_0}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}} e^{ip|x|} \Big/ \left(1 + \frac{\sqrt{E+\mu}\varepsilon V_0}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}}\right).$$

Выпишем амплитуды рассеяния $a_\pm$ вперед и назад:

$$a_+ = \frac{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu}}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu} + \sqrt{E+\mu}\varepsilon V_0}, \quad a_- = -\frac{\sqrt{E+\mu}\varepsilon V_0}{2i|\Delta|\sqrt{E-\mu} + \sqrt{E+\mu}\varepsilon V_0}.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для вероятности прохождения P_+ квазичастицы через потенциальный барьер в случае $E \approx \mu$, $|E| > |\mu|$ справедлива формула*

$$P_+ = |a_+|^2 = \frac{4\Delta^2(E-\mu)}{4\Delta^2(E-\mu) + (E+\mu)\varepsilon^2 V_0^2} + O(\varepsilon),$$

причем квазичастица дырочноподобна. При замене E на $-E$ эта же формула справедлива при $E \approx -\mu$, тогда квазичастица электроноподобна.

Замечание 2. Если $\varepsilon^2 \gg |E-\mu|$, т. е. энергия частицы очень близка к границе щели, то $P_+ \approx 0$. Если же $\varepsilon^2 \ll |E-\mu|$, то $P_+ \approx 1$.

Финансирование. Исследования первого автора выполнены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем». Исследования второго автора частично поддержаны Уральским отделением РАН, грант № 15-8-2-12, и программой финансирования АААА-А16-116021010082-8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elliot S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87. No. 1. P. 137–163. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Reports on Progress in Physics. 2012. Vol. 75. 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors // Journal of the Physical Society of Japan. 2016. Vol. 85. 072001. https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.072001
4. Lutchyn R. M., Bakkers E., Kouwenhoven L. P., Krogstrup P., Marcus C. M., Oreg Y. Majorana zero modes in superconductor–semiconductor heterostructures // Nature Reviews Materials. 2018. Vol. 3. P. 52–68. https://doi.org/10.1038/s41578-018-0003-1
5. Oppen F., Peng Y., Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension // Topological Aspects of Condensed Matter Physics: Lecture Notes of the Les Houches Summer School. Vol. 103. Oxford: Oxford University Press, 2017. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009
6. Тинюкова Т. С., Чубурин Ю. П. Отражение Андреева в контакте «p-волновой сверхпроводник–нормальный металл» // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 55–62. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-05
7. Chuburin Yu. P. On small perturbations of the Schrödinger operator with a periodic potential // Theoretical and Mathematical Physics. 1997. Vol. 110. Issue 3. P. 351–359. https://doi.org/10.1007/BF02630460
8. Chuburin Yu. P. On levels of a weakly perturbed periodic Schrödinger operator // Communications in Mathematical Physics. 2004. Vol. 249. Issue 3. P. 497–510. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1117-4
9. Sarma S. D., Nag A., Sau J. D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires // Physical Review B. 2016. Vol. 94. 035143. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.035143
10. Karzig T., Refael G. Boosting Majorana zero modes // Physical Review X. 2013. Vol. 3. 041017. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041017
11. Sau J. D., Demler E. Bound states at impurities as a probe of topological superconductivity in nanowires // Physical Review B. 2013. Vol. 88. 205402. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.205402
12. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Physics-Uspekhi. 2001. Vol. 44. P. 131–136. https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29
13. Тинюкова Т. С. Майорановские состояния вблизи примеси в p-волновой сверхпроводящей нанопроволоке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 222–230. https://doi.org/10.20537/vm180208
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
15. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 28.04.2020

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: Ttinyukova@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34
E-mail: chuburin@udman.ru

Цитирование: Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин. Исследование собственных значений и рассеяния для гамильтониана Боголюбова – де Жена вблизи границы сверхпроводящей щели // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 259–269.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 259–269.

T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin

Investigation of eigenvalues and scattering problem for the Bogoliubov – de Gennes Hamiltonian near the superconducting gap edge

Keywords: Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian, Green's function, spectrum, eigenvalue, Andreev bound states, scattering problem, transmission probability.

MSC2010: 81Q10, 81Q15, 47A10, 47A40

DOI: 10.35634/vm200209

We consider the Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian perturbed by a small potential, which describes quasiparticles of electron-hole type, in particular, Andreev bound states (ABSs) in a one-dimensional superconducting structure in the presence of an impurity. In the last 15–20 years, interest in such quasiparticles has increased sharply due to the discovery of Majorana bound states (MBSs) in topological superconductors. MBSs are neutral zero-energy quasiparticles resistant to external influences, which are very promising for future use in quantum computing. The study of the appearance and behavior, depending on the system parameters and the topological phase, of ABSs described by the eigenfunctions of the Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian, is interesting both from a mathematical point of view, in comparison with the usual Schrödinger operator, and from a physical point of view, since it can clarify prerequisites for the occurrence of MBSs in the topologically nontrivial phase and marjoram-like states (often playing the role of MBSs) in the topologically trivial phase. The study of scattering is interesting due to the fact that the probability of a quasiparticle transmission through a potential barrier is proportional to the conductance, that can be measured experimentally, which in principle makes it possible to relate the conductance to the presence of ABS. In the paper, the conditions for the appearance of eigenvalues (energies of quasiparticles) in the superconducting gap in the continuous spectrum of the Hamiltonian, as well as their dependence on the parameters in both the topological nontrivial and topologically trivial phases, are found. In addition, the scattering problem for energies near the edge of the gap has been investigated, in particular, the probability of a quasiparticle transmission through a potential barrier as a function of system parameters has been found.

Funding. The study of the first author was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project 0827-2020-0010 "Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical systems". The study of the second author was partially supported by the Ural Branch of the Russian Academy of Science, grant No. 15-8-2-12 and the finansing program AAAA-A16-116021010082-8.

REFERENCES

1. Elliot S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, issue 1, pp. 137–163. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, *Reports on Progress in Physics*, 2012, vol. 75, 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana Fermions and topology in superconductors, *Journal of the Physical Society of Japan*, 2016, vol. 85, 072001. https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.072001
4. Lutchyn R. M., Bakkers E., Kouwenhoven L. P., Krogstrup P., Marcus C. M., Oreg Y. Majorana zero modes in superconductor–semiconductor heterostructures, *Nature Reviews Materials*, 2018, vol. 3, pp. 52–68. https://doi.org/10.1038/s41578-018-0003-1
5. Oppen F., Peng Y., Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension, *Topological Aspects of Condensed Matter Physics: Lecture Notes of the Les Houches Summer School*, vol. 103, Oxford: Oxford University Press, 2017. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009

6. Tinyukova T. S., Chuburin Yu. P. Andreev reflection in the p-wave superconductor–normal metal contact, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 55–62 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-05
7. Chuburin Yu. P. On small perturbations of the Schrödinger operator with a periodic potential, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1997, vol. 110, issue 3, pp. 351–359. https://doi.org/10.1007/BF02630460
8. Chuburin Yu. P. On levels of a weakly perturbed periodic Schrödinger operator, *Communications in Mathematical Physics*, 2004, vol. 249, issue 3, pp. 497–510. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1117-4
9. Sarma S. D., Nag A., Sau J. D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires, *Physical Review B*, 2016, vol. 94, 035143. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.035143
10. Karzig T., Refael G. Boosting Majorana zero modes, *Physical Review X*, 2013, vol. 3, 041017. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041017
11. Sau J. D., Demler E. Bound states at impurities as a probe of topological superconductivity in nanowires, *Physical Review B*, 2013, vol. 88, 205402. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.205402
12. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Physics-Uspekhi*, 2001, vol. 44, pp. 131–136. https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29
13. Tinyukova T. S. Majorana states in a p-wave superconducting nanowire, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 222–230 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180208
14. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 1. Funktsional'nyi analiz* (Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis), Moscow: Mir, 1977.
15. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 3. Teoriya rssseyaniya* (Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory), Moscow: Mir, 1982.

Received 28.04.2020

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru

Chuburin Yurii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: chuburin@udman.ru

Citation: T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Investigation of eigenvalues and scattering problem for the Bogoliubov – de Gennes Hamiltonian near the superconducting gap edge, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 259–269.