МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175.

УДК 519.63

© *М. Х. Бештоков*

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Работа посвящена построению приближенных решений краевых задач в прямоугольнике для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя, выступающих в качестве математических моделей движения влаги и солей в почвах с фрактальной организацией. Построены разностные схемы для дифференциальных задач. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Построен алгоритм численного решения разностных схем, полученных при аппроксимации краевых задач для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные в работе теоретические выкладки.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, нагруженные уравнения, разностная схема, псевдопараболическое уравнение, уравнение влагопереноса, уравнение Аллера, дробная производная Капуто.

DOI: 10.35634/vm200202

В настоящее время проявляется повышенный рост внимания исследователей к фрактальному анализу, дробному исчислению, а также развитию методов решения начально-краевых задач для уравнений, выступающих в качестве математических моделей процессов переноса в средах с фрактальной структурой [1–5].

Существуют различные определения фрактала [3, с. 194], [6, с. 15]. Более физическим и наглядным является определение Б. Мандельброта — определения фрактала как структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому, образно говоря, выглядят одинаково, в каком бы масштабе ее ни наблюдать.

В основе математических моделей процессов фильтрации в пористых средах с фрактальной организацией и памятью лежат дифференциальные уравнения дробного порядка как по временной, так и по пространственной переменной и их разностные аналоги. Сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт, образуют эффективное поровое пространство, которое является примером системы, близкой к фрактальной. Одной из важнейших характеристик почв, оказывающих влияние практически на все почвенные свойства, является их влажность. Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности существенно может повлиять на процесс нестационарного движения влаги в этой капиллярно-пористой среде.

Хорошо известно, что решение многих практически важных задач, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [7], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [8], переноса влаги [9, 10], тепла [11] и солей [12] в пористых средах, связано с необходимостью исследования краевых задач для псевдопараболического уравнения

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_x)_{xt} + r(x,t)u_x - q(x,t)u(x,t) + f(x,t).$$

Нагруженными дифференциальными уравнениями называются уравнения, содержащие функции от решения на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают при изучении движении подземных вод, в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из n источников загрязняющее вещество определенной интенсивности, при построении математической модели переноса дисперсных загрязнений в пограничном слое атмосферы.

Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений рассматривались в [13]. Задачи расчета тепломассообмена с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции [14] и, подобно [15, 16], задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений.

Так, в работе [17] исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка. С помощью метода Римана доказаны существование и единственность классического решения исследуемой задачи.

Численным методам решения некоторых нагруженных дифференциальных уравнений посвящены работы [18–23].

В работе [18] методом конечных разностей исследуются краевые задачи для нагруженных обыкновенных и с частными производными дифференциальных уравнений.

Работа [19] посвящена численному решению нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными. Рассмотрена краевая задача относительно параболического уравнения с различными вариантами точечного нагружения. Применением методов разностной аппроксимации рассматриваемые задачи приводятся к системам алгебраических уравнений специальной структуры, для решения которых предлагается параметрическое представление, использующее решения вспомогательных линейных систем с трехдиагональными матрицами.

В работе [20] предложена компактная трехслойная разностная схема повышенного порядка аппроксимации для решения интегро-дифференциального уравнения диффузии, доказаны устойчивость и сходимость компактной схемы. Для подтверждения теоретических результатов проведены численные расчеты.

В работах автора [21–23] рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Для решения поставленных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [24–31].

Так, в работе [24] получены результаты, позволяющие применять метод энергетических неравенств для получения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках, как и в классическом случае ($\alpha = 1$).

В [25] построен новый разностный аналог (называемая формулой $L2 - 1_\sigma$), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2-норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

В [26, 27] рассматриваются краевые задачи для псевдопараболических уравнений дробного порядка. Для решения поставленных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Для каждой из рассмотренных задач доказана сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи. Для одной краевой задачи построен алгоритм численного решения.

В [28] построен разностный аналог дробной производной дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти (аналог формулы L1). Исследованы основные свойства этого разностного оператора, на его основе построены разностные схемы второго и четвертого порядков аппроксимации по пространственной переменной и дробного порядка $2-\alpha_0$ по временной переменной. Доказаны устойчивость предложенных разностных схем, а также их сходимость в сеточной L_2-норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

Работы [29–31] посвящены исследованию различных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка с эффектом запаздывания по времени. В физическом аспекте понятия «память», «последействие», «запаздывание», «наследственность» считаются очень близкими.

В работе [32] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения Аллера с дробной по времени производной.

В настоящей работе исследуются краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя, выступающие в качестве математических моделей движения влаги и солей в почвах с фрактальной организацией. Неклассичность рассматриваемых задач заключается в том, что вместо первой производной по времени нагруженное уравнение содержит производную дробного порядка в смысле Капуто, а вместо второй производной по пространственной переменной — сингулярный дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами, обобщающий оператор Бесселя. Оба неклассических направления (и уравнения дробного порядка, и уравнения с особенностями типа оператора Бесселя) актуальны в силу обилия разнообразных приложений, в которых возникают такие неклассические объекты. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau^2)$.

Разностным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений с оператором Бесселя посвящены работы [33–35]. Настоящая работа является непосредственным продолжением этой серии работ.

§ 1. Постановка краевой задачи с условием первого рода

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T=\{(x,t)\colon 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ рассмотрим краевую задачу для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,t)u(x_0,t)+f(x,t),$$

$$0<x<l,\ 0<t\leqslant T, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x\to 0}x^m\Pi(x,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.2}$$

$$u(l,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.4}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k(x,t), \eta(x) \leqslant c_1, \ |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), q(x,t)| \leqslant c_2, \ 0 \leqslant m \leqslant 2, \tag{1.5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau$ — дробная производная в смысле Капуто порядка α, где $0 < \alpha < 1$, c_i, $i = 0,1,2$, — положительные числа, $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(x)u_x\big)$.

В случае когда $\alpha = 1$, различные краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с оператором Бесселя изучались в работах [33, 34].

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (1.2), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(x,t) = 0$ [36, с. 173], если функции $r(0,t), k(0,t), q(0,t), f(0,t)$ конечны.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1, 2, \ldots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

§ 2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1)–(1.4) в дифференциальной форме введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\big(u, v\big) = \int_0^l uv\, dx, \ \|u\|_0^2 = \big(u, u\big), \text{ где } u, v \text{ — заданные на } [0,l] \text{ функции.}$$

Умножим уравнение (1.1) скалярно на $x^m u$:

$$\begin{aligned} \big(\partial_{0t}^{\alpha} u, x^m u\big) &= \Big(\big(x^m k u_x\big)_x, u\Big) + \Big(\partial_{0t}^{\alpha}\big(x^m \eta u_x\big)_x, u\Big) + \\ &+ \big(r u_x, x^m u\big) - \big(q u(x_0,t), x^m u\big) + \big(f, x^m u\big). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Преобразуя интегралы, входящие в тождество (2.1), пользуясь неравенством Коши с ε и леммой 1 [24], после несложных преобразований, с учетом

$$\begin{aligned} -\big(q u(x_0,t), x^m u\big) &= -\int_0^l x^m q u(x_0,t) u\, dx = -u(x_0,t) \int_0^l x^m q u\, dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} u^2(x_0,t) + \frac{1}{2}\left(\int_0^l x^m q u\, dx\right)^2 \leqslant M_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2\Big), \end{aligned}$$

из (2.1) находим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \eta \partial_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}} u_x)^2\, dx + \int_0^l x^m k u_x^2\, dx \leqslant \\ &\leqslant x^m u \Pi(x,t)|_0^l + M_2\Big(\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2\Big) + \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Учитывая условия (1.2), (1.3), из (2.2) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \int_0^l \eta \partial_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}} u_x)^2\, dx + \int_0^l x^m k u_x^2\, dx \leqslant M_3\|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_4\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \tag{2.3}$$

Тогда, применяя к обеим частям (2.3) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\begin{gathered}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leqslant \\ \leqslant M_5 D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + M_6\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big),\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}\|^2_{W_2^1(0,l)} = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$.

С помощью леммы 2 [24] из (2.4) получаем следующую априорную оценку:

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{2.5}$$

где M — положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1.1)–(1.4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

Теорема 1. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t)$, $q(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(Q_T)$ *и выполнены условия* (1.5)*, тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.4) *справедлива априорная оценка* (2.5).

Из априорной оценки (2.5) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

§ 3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(\dfrac{h^2+\tau^2}{x}\right)$:

$$\begin{gathered}\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_i = \frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}\Big)_x + \frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(x_{i-0.5}^m\gamma_i y_{\overline{x},i}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}\Big) + \\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big) - d_i^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big) + \varphi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{(x,0)}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_1 y_{x,0}\Big) = \frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 + d_0\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)\Big) - \mu,\ x=0, \tag{3.2}$$

$$y_N^{(\sigma)} = 0,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=l, \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{3.4}$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0<\alpha<1$ (формула $L2-1_\sigma$), обеспечивающий высокий порядок аппроксимации $O(\tau^{3-\alpha})$ [25], нежели чем разностный аналог, известный под названием формула $L1$.

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)} = \Big(l+\sigma\Big)^{1-\alpha} - \Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\alpha},\ l\geqslant 1,\quad \sigma = 1-\frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l\geqslant 1,$$

$$\text{при } j=0,\quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$
\text{при } j>0,\quad c_s^{(\alpha,\sigma)}=\begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)}+b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)}+b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)}-b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1\leqslant s\leqslant j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)}-b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s=j,\end{cases}
$$

$$
c_s^{(\alpha,\sigma)}>\frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha}>0,\ a_i^j=k(x_{i-0.5},t^{j+\sigma}),\ \gamma_i=\eta(x_{i-0.5}),\ b_i^{\pm j}=\frac{\overline{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},
$$

$$
y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j, r_N=r(l,t)=r_N^{j+\sigma}\geqslant 0,\ r=r^++r^-,\ r_0=r(0,t)=r_0^{j+\sigma}\leqslant 0,
$$

$$
\overline{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\ i=\overline{1,N-1},\ r^+=0.5(r+|r|)\geqslant 0,\ r^-=0.5(r-|r|)\leqslant 0,
$$

$$
d_i^j=\begin{cases}\overline{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma},\ i\neq 0,N,\\ q_i^{j+\sigma}, i=0,N,\end{cases}\quad \varphi_i^j=\begin{cases}\overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma},\ i\neq 0,N,\\ f_i^{j+\sigma},\ i=0,N,\end{cases}\quad \hbar=\begin{cases}0.5h, i=0,\\ h, i\neq 0,N,\end{cases}
$$

$$
\varkappa_i=\frac{1}{1+R_i},\ R_i=\frac{0.5h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}},\ \varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}},\ r_0\leqslant 0,\ |r|=r^+-r^-,
$$

$$
\mu=\frac{0.5h}{m+1}\varphi_0,\ Y=\widehat{y}+y,\ \widehat{y}=y^{j+1},\ y_t=\frac{\widehat{y}-y}{\tau},\ y=y_i^j=y(x_i,t_j),\ t^*=t^{j+\sigma},
$$

$$
x_{i_0}^-=\frac{x_{i_0+1}-x_0}{h},\ x_{i_0}^+=\frac{x_0-x_{i_0}}{h},\ x_{i_0}\leqslant x_0\leqslant x_{i_0+1}.
$$

Для численного решения разностной схемы (3.1)–(3.4), полученной при аппроксимации задачи (1.1)–(1.4), удобно использовать метод параметрической прогонки [37, с. 131].

Введем скалярные произведения и норму:

$$
\Big(u,v\Big)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\ \|u\|_1^2=\Big(1,u^2\Big),\ \|u_{\overline{x}}]|_0^2=\Big(1,u_{\overline{x}}^2\Big],\ \|u]|_0^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2\hbar=\Big(1,u^2\Big].
$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (3.1) скалярно на $x^my^{(\sigma)}$:

$$
\begin{gathered}
\Big(\overline{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,x^my^{(\sigma)}\Big)=\Big(\varkappa(x^m_{i-0.5}a_i^jy_{\overline{x}}^{(\sigma)})_x,y^{(\sigma)}\Big)+\\
+\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^m_{i-0.5}\gamma_iy_{\overline{x},i})_x,y^{(\sigma)}\Big)+\Big(b^{-j}x^m_{i-0.5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x},i},y^{(\sigma)}\Big)+\\
+\Big(b^{+j}x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},y^{(\sigma)}\Big)-\Big(d_i^{(\sigma)}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x^-_{i_0}+y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big),x^my^{(\sigma)}\Big)+\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big).
\end{gathered}\tag{3.5}
$$

Оценивая суммы, входящие в (3.5), с учетом леммы 1 [25] после несложных преобразований из (3.5) находим

$$
\begin{gathered}
\frac14\Big(1,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac m2}y)^2\Big)+\Big(x^m_{i-0.5}\frac{\gamma_i}{2},\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_{\overline{x}})^2\Big]+\frac{1}{1+hM_2}\Big(x^m_{i-0.5}a\varkappa,(y^{(\sigma)}_{\overline{x}})^2\Big]\leqslant\\
\leqslant x^m_{i-0.5}y^{(\sigma)}\Big[\varkappa a_iy_{\overline{x}}^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_iy_{\overline{x}})\Big]\Big|_0^N-(x^m_{i-0.5}a\varkappa_{\overline{x}},y^{(\sigma)}_{\overline{x}}y^{(\sigma)}\Big]+\\
+\Big(b^{-j}(x^m_{i-0.5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x}}),y^{(\sigma)}\Big)+\Big(b^{+j}(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}),y^{(\sigma)}\Big)+\\
+M_4\Big(\|x^{\frac m2}y^{(\sigma)}\|_1^2+\|x^{\frac m2}_{i-0.5}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|_0^2\Big)+\frac12\|x^{\frac m2}\varphi\|_1^2.
\end{gathered}\tag{3.6}
$$

Преобразуем второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (3.6), тогда получим

$$
\begin{gathered}
-\Big(x^m_{i-0.5}a\varkappa_{\overline{x}},y^{(\sigma)}_{\overline{x}}y^{(\sigma)}\Big]+\Big(b^{-j}(x^m_{i-0.5}a_i^jy^{(\sigma)}_{\overline{x}}),y^{(\sigma)}\Big)+\\
+\Big(b^{+j}(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}),y^{(\sigma)}\Big)\leqslant M_5\Big(\|x^{\frac m2}y^{(\sigma)}\|_1^2+\|x^{\frac m2}_{i-0.5}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|_0^2\Big).
\end{gathered}\tag{3.7}
$$

Преобразуем первое выражение в правой части (3.6):

$$\begin{gathered} x^m_{i-0.5}y^{(\sigma)}\left[\varkappa a_i y^{(\sigma)}_{\overline{x}} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\overline{x}})\right]\Big|_0^N = \\ = -x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\left[\frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0 + d_0\left(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\right)\right) - \mu\right] = \\ = -\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}d_0\left(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\right)y^{(\sigma)}_0 + x^m_{0.5}\mu y^{(\sigma)}_0 \leqslant \\ \leqslant -\frac{1}{2}\frac{0.5h}{m+1}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0)^2 + M_6\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_1 + \|x^{\frac{m}{2}}_{i-0.5}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|^2_0 + \left(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y^{(\sigma)}_0\right)^2\right) + \mu^2. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Учитывая (3.7), (3.8), из (3.6) получаем

$$\begin{gathered} \frac{1}{4}\left(1, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\right) + \left(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^m_{i-0.5}y_{\overline{x}})^2\right] + \\ + \frac{h}{4(m+1)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0)^2 + M_5\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|^2_0 \leqslant \\ \leqslant M_6\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_1 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|^2_0 + (x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y^{(\sigma)}_0)^2\right) + M_7\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|^2_1 + \mu^2\right). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Из (3.9) получаем

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y\|^2_2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|^2_0 \leqslant M_8\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_2 + M_9\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|^2_1 + \mu^2\right), \tag{3.10}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}y\|^2_2 = \|x^{\frac{m}{2}}y\|^2_1 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}]|^2_0 + (x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0)^2$.

Перепишем (3.10) в другой форме:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y\|^2_2 \leqslant M^\sigma_{10}\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\|^2_2 + M^\sigma_{11}\|x^{\frac{m}{2}}y^j\|^2_2 + M_9\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|^2_1 + \mu^2\right). \tag{3.11}$$

На основании леммы 7 [26] из (3.11) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\|^2_2 \leqslant M\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0\|^2_2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi^{j'}\|^2_1 + \mu^2\right)\right), \tag{3.12}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.5)*, тогда существуют такие h_0, τ_0, что если $h \leqslant h_0$, $\tau \leqslant \tau_0$, то для решения разностной задачи* (3.1)–(3.4) *справедлива априорная оценка* (3.12).

Из априорной оценки (3.12) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (3.1)–(3.4) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в сеточной норме $\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}\|^2_2$ со скоростью $O\left(h^2+\tau^2\right)$ [25] — так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $h \leqslant h_0$, $\tau \leqslant \tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1} - u^{j+1}\right)\|_2 \leqslant M\|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1\left(h^2+\tau^2\right) \leqslant \overline{M}\left(h^2+\tau^2\right),$$

где $\overline{M}$ — положительное число, не зависящее от h и τ.

§ 4. Постановка краевой задачи с условием третьего рода и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим краевую задачу с условием третьего рода для уравнения (1.1). Для этого заменим условие (1.3) условием вида

$$-\Pi(l,t) = \beta(t)u(l,t) - \mu(t),\ |\beta| \leqslant c_2. \tag{4.1}$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1.1) скалярно на $x^m u$. Тогда из (2.1) после некоторых преобразований находим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \eta\partial_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}u_x)^2\,dx + \int_0^l x^m k u_x^2\,dx \leqslant \\ \leqslant x^m u\Pi(x,t)\Big|_0^l + M_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big) + \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (4.2):

$$\begin{gathered}x^m u\Pi(x,t)|_0^l = l^m u(l,t)\Big(\mu(t) - \beta(t)u(l,t)\Big) = l^m\mu(t)u(l,t) - l^m\beta(t)u^2(l,t) \leqslant \\ \leqslant M_2\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big) + \mu^2(t).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Учитывая (4.3), из (4.2) с учетом преобразований (2.3)–(2.5) находим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{4.4}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$, $M-$ положительное число, зависящее только от входных данных задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t)$, $q(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (1.5), (4.1), *тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) *справедлива априорная оценка* (4.4).

Из априорной оценки (4.4) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

§ 5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(\dfrac{h^2+\tau^2}{x}\right)$:

$$\begin{gathered}\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_i = \frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}\Big)_x + \frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(x_{i-0.5}^m\gamma_i y_{\overline{x},i}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}\Big) + \\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big) - d_i^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big) + \varphi_i^j,\ (x,t) \in \omega_{h,\tau},\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered}\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_1 y_{x,0}\Big) = \frac{0.5h}{m+1}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0 + \beta_1\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big) - \mu_1, \\ t \in \overline{\omega}_{\tau},\quad x = 0,\end{gathered} \tag{5.2}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma y_{\bar{x}}\Big)_N\Big) = \\ \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N + 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N + \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) - \mu_2, \\ x = N, \tag{5.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad t = 0, \tag{5.4}$$

где

$$\beta_1 = \frac{0.5h}{m+1}d^j_0,\ \beta_2 = 0.5hd^j_N,\ \mu_1 = \frac{0.5h}{m+1}\varphi^j_0,\quad \mu_2 = \widetilde{\varkappa}\mu^{j+\sigma} + 0.5h\varphi^j_N,$$
$$\widetilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}}, \varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k^{j+\sigma}_{0.5}}},\ r^{j+\sigma}_0 \leqslant 0,\ \varkappa_N = \frac{1}{1+0.5h\frac{|r^{j+\sigma}_N|}{k_{N-0.5}}},\ r^{j+\sigma}_N \geqslant 0.$$

Перепишем задачу (5.1)–(5.4) в операторной форме

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\delta}y + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{5.5}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i, & x \in \omega_h, \\ 1, & x = 0, l, \end{cases} \qquad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\ t^* = t^{j+1/2},$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)}_i = \dfrac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x + \dfrac{b^{-j}}{x_{i^m}}\Big(x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big) + \\ \qquad + \dfrac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\Big) - d^j_i\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big), \\ \Lambda^- y^{(\sigma)}_0 = \dfrac{(m+1)\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \beta_1\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\Big)}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^+ y^{(\sigma)}_N = -\dfrac{\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N + \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)}{0.5h}, & x = l, \end{cases}$$

$$\overline{\delta}(t)y = \begin{cases} \delta y_i = \frac{1}{x_i^m}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(x^m_{i-0.5}\gamma_i y_{\bar{x},i}\Big)_x, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \delta^- y_0 = \frac{m+1}{0.5h}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1 y_{x,0}\Big), & x = 0, \\ \delta^+ y_N = -\frac{1}{0.5h}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big), & x = l, \end{cases} \qquad \overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{(m+1)}{0.5h}\mu_1, & x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h}\mu_2, & x = l. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\Big(u, v\Big] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \|u]|^2_0 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (5.5) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\Big(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y, x^m y^{(\sigma)}\Big] = \Big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\overline{\delta}y, x^m y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)}\Big]. \tag{5.6}$$

После некоторых несложных преобразований из (5.6) получим

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big] + \Big(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}})^2\Big] + \frac{1}{1+hM_1}\Big(\overline{x}^m a_i\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\overline{x}})^2\Big] \leqslant \\ \leqslant M_2\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|_0^2\Big) - \Big(d\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big), x_i^m y^{(\sigma)}\Big) + \\ + \Big(\overline{x}^m_N - x^m_N\Big)y^{(\sigma)}_N\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\overline{x},N} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\overline{x},N})\Big) - \\ - x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0})\Big) + \\ + \Big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\Big) + y^{(\sigma)}_N x^m_N\Big(\mu_2 - \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N - \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\Big).\end{gathered} \tag{5.7}$$

Преобразуем третье, четвертое и шестое слагаемые в правой части (5.7) с учетом (5.2), (5.3)

$$\begin{gathered}\Big(\overline{x}^m_N - x^m_N\Big)y^{(\sigma)}_N\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\overline{x}N} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\overline{x},N})\Big) - \\ - x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0})\Big) + \\ + x^m_N y^{(\sigma)}_N\Big(\mu_2 - \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N - \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\Big) = \\ = \Big(\overline{x}^m_N - x^m_N\Big)y^{(\sigma)}_N\Big[\mu_2 - \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N - \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) - 0.5h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big] + \\ + x^m_N y^{(\sigma)}_N\Big[\mu_2 - \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N - \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\Big] - \\ - x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Big[\beta_1\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) + \frac{0.5h}{m+1}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \mu_1\Big] = \\ = y^{(\sigma)}_N\overline{x}^m_N\Big[\mu_2 - \widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N - \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\Big] - \\ - 0.5hy^{(\sigma)}_N(\overline{x}^m_N - x^m_N)\Delta_{0t_{j+\sigma}}y_N - x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Big[\beta_1\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) - \mu_1\Big] - \\ - \frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0 \leqslant \\ \leqslant \overline{x}^m_N\mu_2 y^{(\sigma)}_N - \overline{x}^m_N y^{(\sigma)}_N\Big(\widetilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N + \beta_2\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big)\Big) - \\ - \beta_1 x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) + x^m_{0.5}\mu_1 y^{(\sigma)}_0 - \\ - \frac{h}{4}\Big(\overline{x}^m_N - x^m_N\Big)\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y^2_N - \frac{h}{4(m+1)}x^m_{0.5}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y^2_0.\end{gathered} \tag{5.8}$$

Учитывая (5.8), из (5.7) после некоторых преобразований находим

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|_0^2 \leqslant M_6\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2 + M_7\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big), \tag{5.9}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}]|_0^2 + \big(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0\big)^2$.

С помощью леммы 7 [26] из (5.9) получаем априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}]|_1^2 \leqslant M\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^0]|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\Big), \tag{5.10}$$

где M — положительное число, не зависящее от h и τ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.5), (4.1), *тогда существуют такие* h_0, τ_0, *что если* $h \leqslant h_0$, $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (5.1)–(5.4) *справедлива априорная оценка* (5.10).

Из априорной оценки (5.10) следуют единственность и решения разностной схемы (5.1)–(5.4) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) в сеточной норме $\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}]|_1^2$ со скоростью $O\left(h^2+\tau^2\right)$ [25] — так, что если существуют такие τ_0, h_0, то при $\tau \leqslant \tau_0$, $h \leqslant h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1}-u^{j+1}\right)]|_1 \leqslant \overline{M}\left(h^2+\tau^2\right),$$

где $\overline{M}$ — положительное число, не зависящее от h и τ.

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} u=\frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-$$

$$-\sum_{s=1}^{p} q_s(x,t)u(x_s,t)+f(x,t), \qquad 0<x<l, \quad 0<t\leqslant T,$$

если потребовать выполнения условия $|q_s| \leqslant c_2$.

§ 6. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим следующий тестовый пример:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u=\frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,t)u(x_0,t)+f(x,t),$$

$$0<x<l,\ 0<t\leqslant T,$$

$$\lim_{x\to 0} x^m\Pi(x,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$-\Pi(l,t)=\beta(t)u(l,t)-\mu(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\leqslant x\leqslant l,$$

где

$$k(x,t)=e^{x+t}, \quad \eta(x)=e^x,\ r(x,t)=(x-0.5)\cos(x+t), \quad q(x,t)=xt^2,$$

$$\beta(t)=\frac{e^{(l+t)}}{l}, \quad \mu(t)=5e^{(l+t)}t^3l^3+4e^l l^3\left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+\frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}\right),$$

$$f(x,t)=\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}x^4-4t^3e^{x+t}(x^3+3x^2)+xt^5x_0^4-4e^x(x^3+3x^2)\left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+\frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}\right)-$$

$$-4(x-0.5)\cos(x+t)t^3x^3-4mt^3e^{x+t}x^2-4me^x x^2\left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+\frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}\right),$$

$$u_0(x)=0, \quad l=1,\ T=1.$$

Точное решение задачи $u(x,t) = t^3x^4$.

Ниже в таблице при различных значениях α = 0.01, 0.5, 0.99, $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$, $m = 2$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается со скоростью $O\left(h^2+\tau^2\right)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: ПС$= \log_{\frac{h_1}{h_2}} \dfrac{\|z_1]|_0}{\|z_2]|_0}$, где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Таблица

α	x_0	h	$\max\limits_{0<j<j_0} \|z^j]\|_0$	ПС в $\|\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	0.1	$\frac{1}{100}$	2.3289e-4		4.0169e-4	
		$\frac{1}{200}$	5.7829e-5	2.0098	1.0003e-4	2.0056
		$\frac{1}{400}$	1.4407e-5	2.0049	2.4958e-5	2.0029
		$\frac{1}{800}$	3.5958e-6	2.0025	6.2333e-6	2.0014
	0.5	$\frac{1}{100}$	2.3103e-4		4.0002e-4	
		$\frac{1}{200}$	5.7366e-5	2.0098	9.9612e-5	2.0057
		$\frac{1}{400}$	1.4292e-5	2.0050	2.4853e-5	2.0029
		$\frac{1}{800}$	3.5669e-6	2.0025	6.2071e-6	2.0014
	0.9	$\frac{1}{100}$	2.2584e-4		3.9531e-4	
		$\frac{1}{200}$	5.6070e-5	2.0100	9.8436e-5	2.0057
		$\frac{1}{400}$	1.3968e-5	2.0051	2.4559e-5	2.0029
		$\frac{1}{800}$	3.4859e-6	2.0025	6.1336e-6	2.0015
0.5	0.1	$\frac{1}{100}$	3.5759e-4		5.5375e-4	
		$\frac{1}{200}$	8.9017e-5	2.0061	1.3794e-4	2.0052
		$\frac{1}{400}$	2.2211e-5	2.0028	3.4421e-5	2.0027
		$\frac{1}{800}$	5.5479e-6	2.0012	8.5966e-6	2.0015
	0.5	$\frac{1}{100}$	3.5573e-4		5.5208e-4	
		$\frac{1}{200}$	8.8554e-5	2.0062	1.3753e-4	2.0052
		$\frac{1}{400}$	2.2095e-5	2.0028	3.4316e-5	2.0027
		$\frac{1}{800}$	5.5190e-6	2.0012	8.5704e-6	2.0015
	0.9	$\frac{1}{100}$	3.5107e-4		5.4784e-4	
		$\frac{1}{200}$	8.7391e-5	2.0062	1.3647e-4	2.0052
		$\frac{1}{400}$	2.1805e-5	2.0028	3.4053e-5	2.0027
		$\frac{1}{800}$	5.4466e-6	2.0012	8.5046e-6	2.0014
0.99	0.1	$\frac{1}{100}$	5.3072e-4		7.4972e-4	
		$\frac{1}{200}$	1.3214e-4	2.0059	1.8685e-4	2.0045
		$\frac{1}{400}$	3.2969e-5	2.0029	4.6637e-5	2.0023
		$\frac{1}{800}$	8.2346e-6	2.0014	1.1649e-5	2.0012
	0.5	$\frac{1}{100}$	5.2879e-4		7.4793e-4	
		$\frac{1}{200}$	1.3166e-4	2.0059	1.8640e-4	2.0045
		$\frac{1}{400}$	3.2848e-5	2.0029	4.6525e-5	2.0023
		$\frac{1}{800}$	8.2043e-6	2.0014	1.1621e-5	2.0012
	0.9	$\frac{1}{100}$	5.2406e-4		7.4349e-4	
		$\frac{1}{200}$	1.3048e-4	2.0059	1.8529e-4	2.0045
		$\frac{1}{400}$	3.2554e-5	2.0029	4.6249e-5	2.0023
		$\frac{1}{800}$	8.1308e-6	2.0014	1.1552e-5	2.0012

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–670. http://mi.mathnet.ru/de7144
2. Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368. http://mi.mathnet.ru/tmf5547
3. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
4. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
5. Полубаринова–Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
6. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Университетская книга, 2005.
7. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545–548. http://mi.mathnet.ru/dan23599
8. Дзекцер Е. С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543. http://mi.mathnet.ru/dan38808
9. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L 'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. № 9. Pp. 27–62.
10. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение–почва–воздух. Л.: Гидрометиздат, 1975.
11. Chen P. J., Curtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1968. No. 19. P. 614–627. https://doi.org/10.1007/BF01594969
12. Канчукоев В. З., Шхануков М. Х. Краевые задачи для уравнений тепломассаобмена и их аппроксимация устойчивыми разностными схемами // В сб.: Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. Нальчик, 1979. № 2. С. 143–150.
13. Канчукоев В. З. Краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного гиперболо-псевдопараболического типа: дис. … к-та физ.-матем. наук / Нальчик, 1984. 101 с.
14. Канчукоев В. З. Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гиперболо-псевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассобмена в почвогрунтах // В сб.: САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик, 1983. С. 131–138.
15. Кочина Н. Н. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 51–54. http://mi.mathnet.ru/dan37901
16. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 105–110. http://mi.mathnet.ru/de2971
17. Зикиров О. С., Холиков Д. К. Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23. № 2. С. 19–30. http://mi.mathnet.ru/svfu21
18. Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков–Лафишев М. Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628. http://mi.mathnet.ru/zvmmf111
19. Абдуллаев В. М., Айда–заде К. Р. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 99–112. https://doi.org/10.7868/S0044466916010038
20. Kuldip S. P., Mani M. Fourth-order compact scheme for option pricing under the Merton's and Kou's jump–diffusion models // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2018. Vol. 21. No. 4. 1850027. https://doi.org/10.1142/S0219024918500279
21. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conference Series: Materials Science and

Engineering. 2016. Vol. 158. No. 1. 012019.
https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019

22. Бештоков М. Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041. https://doi.org/10.7868/S0044466917120092
23. Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 249–266. https://doi.org/10.1134/S0374064118020115
24. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658–664.
25. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 280. P. 424–438. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031
26. Бештоков М. Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова–Капуто // Известия вузов. Математика. 2018. № 10. С. 3–16. http://mi.mathnet.ru/ivm9400
27. Бештоков М. Х. Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 919–928. https://doi.org/10.1134/S0374064119070021
28. Хибиев А. Х. Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 3. С. 582–597. https://doi.org/10.14498/vsgtu1690
29. Пименов В. Г., Хенди А. С. Неявный численный метод решения дробного уравнения адвекции–диффузии с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 218–226. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-218-226
30. Pimenov V. G., Hendy A. S. A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay // Ural Math. J. 2016. Vol. 2. Issue 1. P. 48–57. https://doi.org/10.15826/umj.2016.1.005
31. Pimenov V. G. Numerical methods for fractional advection–diffusion equation with heredity // J. Math. Sci. (NY). 2018. Vol. 230. No. 5. P. 737–741. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3780-6
32. Беданокова С. Ю. Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4: Естественно-математические и технические науки. 2007. № 4. С. 68–71. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11967713
33. Бештоков М. Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1780–1794. https://doi.org/10.7868/S0044466916100045
34. Бештоков М. Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1393–1406. https://doi.org/10.1134/S0374064116100125
35. Бештоков М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778. https://doi.org/10.1134/S0374064118060055
36. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
37. Воеводин А. Л., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 11.02.2020

Бештоков Мурат Хамидбиевич, к. ф.-м. н., доцент, Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Цитирование: М. Х. Бештоков. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175.

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 158–175.

M. Kh. Beshtokov

Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution

Keywords: boundary value problems, a priori estimation, loaded equations, difference scheme, pseudoparabolic equation, moisture transfer equation, Hallaire's equation, Caputo fractional derivative.

MSC2010: 35L25

DOI: 10.35634/vm200202

The paper is devoted to the construction of approximate solutions of boundary value problems in a rectangle for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator, which act as mathematical models of the movement of moisture and salts in soils with fractal organization. Difference schemes for differential problems are constructed. The method of energy inequalities is used to derive a priori estimates of solutions to the problems under consideration in differential and difference interpretations. The obtained a priori estimates are followed by uniqueness, stability of the solution from the initial data and the right part, as well as convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem with a speed equal to the order of approximation error. An algorithm for the numerical solution of difference schemes obtained by approximating boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator is constructed.

REFERENCES

1. Kochubei A. N. Diffusion of fractional order, *Differential Equations*, 1990, vol. 26, issue 4, pp. 485–492.
2. Nigmatullin R. R. Fractional integral and its physical interpretation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 90, issue 3, pp. 242–251. https://doi.org/10.1007/BF01036529
3. Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* (Equations of mathematical biology), Moscow: Vysshaya shkola, 2012.
4. Chudnovsky A. F. *Teplofizika pochv* (Thermal physics of soils), Moscow: Nauka, 1976.
5. Polubarinova–Kochina P. Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* (The theory of groundwater movement), Moscow: Nauka, 1977.
6. Potapov A. A. *Fraktaly v radiofizike i radiolokatsii: Topologiya vyborki* (Fractals in radio physics and radiolocation: Topology of sample), Moscow: Universitetskaya Kniga, 2005.
7. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P. Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, vol. 132, issue 3, pp. 545–548 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan23599
8. Dzektser E. S. Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 220, issue 3, pp. 540–543 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan38808
9. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement, *L 'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, no. 9, pp. 27–62.
10. Nerpin S. V., Chudnovskii A. F. *Energo- i massoobmen v sisteme rasteniye–pochva–vozdukh* (Energy and mass transfer in the system plant–soil–air), Leningrad: Gidrometizdat, 1975.
11. Chen P. J., Curtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1968, no. 19, pp. 614–627. https://doi.org/10.1007/BF01594969
12. Kanchukoev V. Z., Shkhanukov M. Kh. Boundary value problems for heat and mass transfer equations and their approximation by stable difference schemes, *Boundary-value problems for equations of mixed type and related problems of functional analysis and applied mathematics*, Nalchik, 1979, vol. 2, pp. 143–150 (in Russian).

13. Kanchukoev V. Z. *Boundary value problems for a third-order equation of mixed hyperbolic-pseudo-parabolic type*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Nalchik, 1984, 101 p. (In Russian).
14. Kanchukoev V. Z. Boundary value problems for pseudoparabolic and hyperbolic-pseudoparabolic equations and their applications to computation of heat and mass transfer in soils, *in CAD Systems and Computerized Systems of Planning Calculations in Land Development*, Nalchik, 1983, pp. 131–138 (in Russian).
15. Kochina N. N. Regulation of the level of ground waters during irrigation, *Sov. Phys., Dokl.*, 1973, vol. 18, pp. 689–691. https://zbmath.org/?q=an:0303.73085
16. Nakhushev A. M., Borisov V. N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of groundwater level, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 105—110 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de2971
17. Zikirov O. S., Kholikov D. K. On some problem for a loaded pseudoparabolic equation of the third order, *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, issue 2, pp. 19–30 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/svfu21
18. Alikhanov A. A., Berezgov A. M., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, issue 9, pp. 1581–1590. https://doi.org/10.1134/S096554250809008X
19. Abdullayev V. M., Aida–zade K. R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, pp. 93–105. https://doi.org/10.1134/S0965542516010036
20. Kuldip S. P., Mani M. Fourth-order compact scheme for option pricing under the Merton's and Kou's jump–diffusion models, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2018, vol. 21, no. 4, 1850027. https://doi.org/10.1142/S0219024918500279
21. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, no. 1, 012019. https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019
22. Beshtokov M. Kh. Differential and difference boundary value problem for loaded third-order pseudo-parabolic differential equations and difference methods for their numerical solution, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1973–1993. https://doi.org/10.1134/S0965542517120089
23. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. https://doi.org/10.1134/S0012266118020118
24. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 5, pp. 660–666. https://doi.org/10.1134/S0012266110050058
25. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031
26. Beshtokov M. Kh. To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov–Caputo fractional derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 10, pp. 1–14. https://doi.org/10.3103/S1066369X18100018
27. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for a pseudoparabolic equation with the Caputo fractional derivative, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 7, pp. 884–893. https://doi.org/10.1134/S0012266119070024
28. Khibiev A. Kh. Stability and convergence of difference schemes for the multi-term time-fractional diffusion equation with generalized memory kernels, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 582–597 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1690
29. Pimenov V. G., Hendy A. S. An implicit numerical method for the solution of the fractional advection–diffusion equation with delay, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2,

pp. 218–226 (in Russian).
https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-218-226
30. Pimenov V. G., Hendy A. S. A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay, *Ural Mathematical Journal*, 2016, vol. 2, issue 1, pp. 48–57. https://doi.org/10.15826/umj.2016.1.005
31. Pimenov V. G. Numerical methods for fractional advection–diffusion equation with heredity, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 737–741.
https://doi.org/10.1007/s10958-018-3780-6
32. Bedanokova S. Yu. The equation of motion of soil moisture and a mathematical model of soil moisture content based on the Hallaire's equation, *Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. 4: Estestvenno-Matematicheslie i Tekhnicheskie Nauki*, 2007, no. 4, pp. 68–71 (in Russian).
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11967713
33. Beshtokov M. Kh. Difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a degenerating third-order pseudo-parabolic equation with variable coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1763–1777.
https://doi.org/10.1134/S0965542516100043
34. Beshtokov M. Kh. On the numerical solution of a nonlocal boundary value problem for a degenerating pseudoparabolic equation, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1341–1354.
https://doi.org/10.1134/S0012266116100104
35. Beshtokov M. Kh. Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann–Liouville fractional derivative, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 758–774. https://doi.org/10.1134/S0012266118060058
36. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*, New York: Marcel Dekker, 2001.
37. Voevodin A. F., Shugrin S. M. *Chislennye metody rascheta odnomernykh sistem* (Numerical methods for the analysis of one-dimensional systems), Novosibirsk: Nauka, 1981.

Received 11.02.2020

Beshtokov Murat Khamidbievich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, ul. Shortanova, 89 A, Nalchik, 360000, Russia.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Citation: M. Kh. Beshtokov. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175.