

УДК 531.36, 521.1

© *О. В. Холостова*

## О КРАТНЫХ РЕЗОНАНСАХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В НЕАВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматриваются движения неавтономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в системе реализуется кратный (двойной или тройной) резонанс четвертого порядка. Дан перечень всех возможных наборов характеристических показателей, соответствующих указанным резонансным случаям. Получены пять качественно различных приближенных (модельных) гамильтонианов, отвечающих данным наборам. Для всех рассматриваемых случаев кратных резонансов получены достаточные условия формальной устойчивости тривиального равновесия полной системы, записанные в виде ограничений на коэффициенты форм четвертой степени в нормализованных гамильтонианах возмущенного движения, дана графическая интерпретация этих условий. Показано, что полученные области формальной устойчивости содержатся внутри областей устойчивости каждого имеющегося сильного резонанса, рассматриваемого по отдельности, а резонансные коэффициенты, отвечающие слабым резонансам, должны принимать значения из ограниченного диапазона. Рассмотрены некоторые вопросы о неустойчивости тривиального равновесия системы в случаях кратных резонансов четвертого порядка. Найденные условия формальной устойчивости проверены в точках кратных резонансов четвертого порядка в задаче об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника-пластинки в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета.

*Ключевые слова:* гамильтонова система, кратный резонанс четвертого порядка, формальная устойчивость, спутник, цилиндрическая прецессия.

DOI: [10.20537/vm190210](https://doi.org/10.20537/vm190210)

### Введение

Случаи кратных резонансов довольно часто встречаются при исследовании устойчивости частных движений многопараметрических систем, рассматриваемых в классической и небесной механике. Взаимное влияние нескольких резонансов одного порядка на устойчивость положения равновесия в многомерных автономных негамильтоновых и гамильтоновых системах изучались в работах [1–4]. Случаи кратных параметрических резонансов в близких к автономным, периодическим по времени линейных гамильтоновых системах рассмотрены в работах [5–7], где выявлено различное (от одного до трех) число областей параметрического резонанса, рождающихся из резонансных точек. Полученные результаты использованы в ряде задач динамики спутников относительно центра масс [7–9]. Вопросы существования, бифуркации и устойчивости резонансных периодических движений (аналитических по целым или дробным степеням малого параметра) в соответствующих нелинейных гамильтоновых системах в окрестности точек кратных параметрических резонансов исследованы в статьях [10, 11].

Различные варианты кратных резонансов третьего порядка в неавтономных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы рассмотрены в работе [12]. Взаимодействие

слабого комбинационного резонанса третьего порядка и сильного основного резонанса четвертого порядка (в зоне его устойчивости) и вопросы ограниченности движений системы изучались в статье [13]. Случаи кратных резонансов третьего и четвертого порядков в задаче об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел рассмотрены в работе [14]. Кратные резонансы четвертого порядка в задаче об устойчивости относительных равновесий на вертикали плоского двойного маятника при наличии вертикальных гармонических колебаний произвольной частоты и амплитуды точки его подвеса изучены в [15].

Задача о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений в близких к автономным, периодическим по времени гамильтоновым системам с двумя степенями свободы в случаях двойного, основного и комбинационного (сильного или слабого), резонанса третьего порядка решена в статье [16]. в случаях двойного (сильного и слабого) комбинационного резонанса третьего порядка эта задача рассмотрена в работе [17], а взаимодействие указанных резонансов с комбинационным резонансом четвертого порядка (на примере задачи о движении динамически симметричного спутника на слабоэллиптической орбите) — в статье [18].

Данная работа посвящена исследованию неавтономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что значения параметров задачи отвечают случаям кратных (двойных или тройных) резонансов четвертого порядка. Перечислены все возможные наборы характеристических показателей, соответствующих данным резонансам. Получены пять качественно различных приближенных (модельных) гамильтонианов, отвечающих данным наборам. Для всех рассматриваемых случаев кратных резонансов четвертого порядка найдены условия формальной устойчивости тривиального равновесия, записанные в виде неравенств, содержащих коэффициенты нормализованных форм четвертой степени в гамильтонианах возмущенного движения. Дана графическая интерпретация полученных условий. Применяемый подход обобщает результаты, полученные в работах [14] и [15]. Рассмотрены некоторые вопросы о неустойчивости тривиального равновесия системы в случаях кратных резонансов четвертого порядка. Найденные условия формальной устойчивости проверены в точках кратных резонансов рассматриваемого типа в задаче об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника (с геометрией масс пластинки) в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета.

## § 1. Постановка задачи. Случаи кратных резонансов

Рассмотрим движения неавтономной,  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Пусть начало координат фазового пространства является положением равновесия, в окрестности которого гамильтониан  $H$  системы аналитичен. Полагаем, что это положение равновесия устойчиво в линейном приближении, характеристические показатели  $\pm i\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) линеаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые.

Если величины  $\lambda_j, 2\lambda_j, \lambda_1 \pm \lambda_2, 3\lambda_j, \lambda_1 \pm 2\lambda_2, 2\lambda_1 \pm \lambda_2$  не являются целыми числами (то есть в системе нет резонансов первого, второго и третьего порядков), то при помощи ряда канонических преобразований квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения может быть приведена к нормальной форме, а члены третьей степени уничтожены. В результате гамильтониан системы может быть представлен в виде

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\sigma\lambda_2(q_2^2 + p_2^2) + H_4(q_j, p_j, t) + O_5. \quad (1.1)$$

Здесь  $q_j$  и  $p_j$  ( $j = 1, 2$ ) — обобщенные координаты и сопряженные с ними импульсы. Величины  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) считаем положительными, коэффициент  $\sigma$  принимает значения 1 или  $-1$ . Слагаемое  $H_4(q_j, p_j, t)$  — совокупность членов четвертой, а  $O_5$  — не ниже пятой степени по  $q_j, p_j$  с  $2\pi$ -периодическими по  $t$  коэффициентами.

Пусть в системе реализуется случай кратного резонанса четвертого порядка, для которого величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  связаны несколькими (двумя или тремя) соотношениями вида  $(m_1, m_2$  и  $\ell$  — целые числа)

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = \ell, \quad |m_1| + |m_2| = 4. \quad (1.2)$$

Перечислим все возможные варианты пар чисел  $\lambda_1, \lambda_2$ , отвечающих случаям кратных резонансов четвертого порядка. В приведенных ниже выражениях  $k_1, k_2$  — целые числа.

Если величины  $\lambda_1, \lambda_2$  задаются одним из наборов значений

$$\begin{aligned} \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{7}{12}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{11}{12}; \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{12}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{12}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{12}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{11}{12}; \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{12}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{7}{12}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

то в системе реализуется двойной резонанс четвертого порядка: для наборов (1.3) величины  $4\lambda_1$  и  $\lambda_1 + 3\lambda_2$ , а для наборов (1.4) — величины  $4\lambda_1$  и  $\lambda_1 - 3\lambda_2$  являются целыми числами.

В случаях

$$\begin{aligned} \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{10}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{7}{10}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{10}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{10}; \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{7}{10}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{9}{10}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{9}{10}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{3}{10} \end{aligned} \quad (1.5)$$

целыми являются величины  $3\lambda_1 + \lambda_2$  и  $\lambda_1 - 3\lambda_2$ .

Если выполнены соотношения

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{8}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{8}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{7}{8}; \quad (1.6)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{8}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{3}{8}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{5}{8}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{7}{8}, \quad (1.7)$$

то имеет место тройной резонанс четвертого порядка, причем в случаях (1.6) целыми являются величины  $\lambda_1 + 3\lambda_2$ ,  $3\lambda_1 + \lambda_2$  и  $2\lambda_1 - 2\lambda_2$ , а в случаях (1.7) — величины  $\lambda_1 - 3\lambda_2$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2$  и  $2\lambda_1 + 2\lambda_2$ .

Отметим еще наборы

$$\begin{aligned} \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{5}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{4}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{3}{5}; \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{2}{5}; & \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{4}{5}; \end{aligned} \quad (1.8)$$

для которых реализуется одновременно двойной резонанс третьего порядка (величины  $\lambda_1 + 2\lambda_2$  и  $\lambda_2 - 2\lambda_1$  целые) и двойной резонанс четвертого порядка (величины  $3\lambda_1 + \lambda_2$

и  $\lambda_1 - 3\lambda_2$  целые). Наличие резонансов третьего порядка является определяющим фактором, если в разложении гамильтониана имеются слагаемые третьей степени относительно возмущений; этот случай исследован ранее [12]. Если же слагаемых третьей степени нет, то резонансы третьего порядка оказываются несущественными, и свойства движения определяют имеющиеся резонансы четвертого порядка.

Число приведенных вариантов удваивается, если у величин  $\lambda_j$  и  $k_j$  поменять местами индексы 1 и 2.

Будем различать основные и комбинационные, а также сильные и слабые резонансы. Резонанс назовем основным, если в соотношении (1.2) присутствует только одна частота, и комбинационным, если оно содержит обе частоты. Резонанс будем называть сильным, если при его наличии (и отсутствии других резонансов) исследуемое тривиальное равновесие может быть неустойчивым, и слабым, если наличие только этого резонанса не вызывает неустойчивости. Отметим, что основным резонанс всегда сильный. Комбинационный резонанс будет сильным, если выполнено условие  $\sigma m_1 m_2 > 0$ . При  $\sigma m_1 m_2 < 0$  в системе имеется положительно-определенный формальный интеграл, и комбинационный резонанс слабый.

Далее в § 2 будут найдены пять качественно различных вариантов нормализованных (до членов четвертой степени включительно относительно возмущений) гамильтонианов, соответствующих перечисленным наборам (1.3)–(1.8) величин  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Исследование случаев кратных резонансов четвертого порядка в конкретных механических системах показывает, что резонансные точки часто попадают в области формальной устойчивости пространства параметров задачи (в предположении об отсутствии влияния резонансов). Представляется важным установить, при каких условиях, накладываемых на резонансные коэффициенты, формальная устойчивость сохраняется. Этот вопрос изучается в § 3, где получены достаточные условия формальной устойчивости тривиального равновесия полной системы, приближенная часть которой приводится к одному из пяти модельных видов, и дана их графическая интерпретация. В § 4 рассмотрены некоторые вопросы о неустойчивости тривиального равновесия системы в случаях кратных резонансов четвертого порядка.

В § 5 полученные условия формальной устойчивости применены в задаче об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника (твердого тела) с геометрией масс пластинки на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета для значений параметров, соответствующих изучаемым случаям кратных резонансов четвертого порядка.

## § 2. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы

Проведем, с учетом имеющихся резонансов четвертого порядка, нормализацию формы  $H_4$  в гамильтониане (1.1). В симплектических полярных координатах  $\varphi_j, r_j$  ( $j = 1, 2$ ), задаваемых формулами  $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$ ,  $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ , нормализованная форма  $H_4$  имеет структуру

$$H_4 = c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + H_4^{(\text{res})},$$

где  $c_{ij}$  — константы, а  $H_4^{(\text{res})}$  — совокупность резонансных слагаемых, определяемая исследуемым резонансным случаем.

**2.1.** Если рассматриваются наборы (1.3), (1.4), то имеем

$$H_4^{(\text{res})} = ar_1^2 \cos(4\varphi_1 - 4\lambda_1 t + 4\varphi_1^*) + br_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos[(\varphi_1 \pm 3\sigma\varphi_2) - (\lambda_1 \pm 3\lambda_2)t + (\varphi_1^* \pm 3\sigma\varphi_2^*)],$$

где  $a, b, \varphi_j^*$  — постоянные величины, а верхний и нижний знаки относятся к случаям (1.3) и (1.4) соответственно.

Осуществим в преобразованном гамильтониане возмущенного движения унивалентную каноническую замену переменных  $\varphi_j, r_j \rightarrow \Phi_j, R_j$  ( $j = 1, 2$ ) по формулам

$$R_1 = r_1, \quad R_2 = r_2, \quad \Phi_1 = \varphi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \Phi_2 = \varphi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t. \quad (2.1)$$

В результате в гамильтониане уничтожаются слагаемые, линейные по  $R_j$  ( $j = 1, 2$ ), а из слагаемых с резонансными гармониками исчезает время.

Гамильтониан системы примет вид

$$H^{(1,2)} = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + aR_1^2 \cos 4\Phi_1 + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\sigma\Phi_2) + O(R_j^{5/2}), \quad (2.2)$$

где  $O(R_j^{5/2})$  — совокупность слагаемых не менее пятой степени по  $R_j^{1/2}$ ,  $2\pi$ -периодичных по  $\Phi_j$  и имеющих по времени  $t$  период, равный  $24\pi$ .

Придавая в (2.2) величине  $\sigma$  во второй гармонике одно из значений 1 или  $-1$  и выбирая один из знаков  $+$  или  $-$ , получим два различных гамильтониана вида

$$\Gamma_{1,2} = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + aR_1^2 \cos 4\Phi_1 + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) + O(R_j^{5/2}), \quad (2.3)$$

Гамильтониан  $\Gamma_1$  из (2.3) (где выбран верхний знак) является характерным при наличии в системе двух сильных резонансов четвертого порядка, основного и комбинационного. Гамильтониан  $\Gamma_2$  (с нижним знаком) характерен при наличии сильного основного и слабого комбинационного резонансов.

**2.2.** Для наборов (1.5) и (1.8), аналогично, уничтожим в форме четвертой степени гамильтониана (1.1) слагаемые с нерезонансными гармониками и осуществим замену (2.1), в результате чего получим гамильтониан вида

$$\Gamma_3 = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + cR_1^{3/2}R_2^{1/2} \cos(3\Phi_1 + \Phi_2) + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(R_j^{5/2}), \quad (2.4)$$

где слагаемое  $O(R_j^{5/2})$  имеет по  $t$  период  $20\pi$  и  $10\pi$  для наборов (1.5) и (1.8) соответственно. Этот гамильтониан характерен для случаев, когда в системе имеются два комбинационных резонанса четвертого порядка, сильный и слабый.

**2.3.** Действуя тем же способом в случаях тройных резонансов, реализующихся для наборов (1.6) и (1.7), получаем два характерных гамильтониана вида

$$\Gamma_{4,5} = c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + bR_1^{1/2}R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) + cR_1^{3/2}R_2^{1/2} \cos(3\Phi_1 \pm \Phi_2) + dR_1R_2 \cos(2\Phi_1 \mp 2\Phi_2 + \kappa) + O(R_j^{5/2}), \quad (2.5)$$

где  $\kappa$  — константа, а слагаемое  $O(R_j^{5/2})$  периодически по  $t$  с периодом  $16\pi$ . Гамильтониан  $\Gamma_4$  из (2.5) (с верхними знаками) отвечает случаям двух сильных и одного слабого комбинационных резонансов, гамильтониан  $\Gamma_5$  (с нижними знаками) — случаям двух слабых и одного сильного комбинационных резонансов.

Резонансные коэффициенты  $a, b, c, d$  в соотношениях (2.3)–(2.5) можно считать положительными, чего всегда можно добиться сдвигом угловых переменным  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и величины  $\kappa$ .

Пусть в системах с гамильтонианами (2.3)–(2.5) присутствует только один сильный резонанс четвертого порядка, а остальные резонансные коэффициенты равны нулю. Тогда при выполнении условий

$$a > |c_{20}| \quad (\Gamma_1, \Gamma_2), \quad 3\sqrt{3}b > |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| \quad (\Gamma_1, \Gamma_4), \\ 3\sqrt{3}c > |9c_{20} + 3c_{11} + c_{02}| \quad (\Gamma_3, \Gamma_4), \quad d > |c_{20} + c_{11} + c_{02}| \quad (\Gamma_5) \quad (2.6)$$

тривиальное равновесие системы с гамильтонианами, стоящими в скобках, неустойчиво. При изменении знаков неравенств на противоположные имеет место устойчивость при учете в соответствующих гамильтонианах слагаемых не выше второго порядка по  $R_1, R_2$  [19].

Наряду с гамильтонианами (2.3)–(2.5) будем рассматривать приближенные (модельные) гамильтонианы  $\Gamma_j^{(0)}$ , получаемые при отбрасывании в гамильтонианах  $\Gamma_j$  последних слагаемых. Соответствующие приближенные системы будем называть модельными.

### § 3. Достаточные условия формальной устойчивости в случаях кратных резонансов четвертого порядка

При отсутствии в системе резонансов до четвертого порядка включительно тривиальное равновесие формально устойчиво, если квадратичная форма

$$c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2$$

является знакоопределенной при  $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$  [21]. Коэффициенты  $c_{20}$  и  $c_{02}$  должны быть одного знака, далее без ограничения общности считаем их положительными. Тогда в нерезонансном случае условие формальной устойчивости будут выполнены, если

$$(1) c_{11} > 0 \quad \text{или} \quad (2) c_{11} < 0, \quad \Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} < 0. \quad (3.1)$$

Пусть коэффициенты  $c_{ij}$  гамильтонианов (2.3)–(2.5) отвечают одному из этих вариантов. Найдем, при каких ограничениях на резонансные коэффициенты формальная устойчивость сохраняется и при наличии резонансов.

На первом этапе получим условия знакоопределенности (при  $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$ ) модельных гамильтонианов  $\Gamma_j^{(0)}$ . При  $R_2 = 0$  (и  $R_1 > 0$ ) функции  $\Gamma_3^{(0)}$  и  $\Gamma_{4,5}^{(0)}$ , очевидно, положительны. Функции  $\Gamma_{1,2}^{(0)}$  положительны при условии  $c_{20} > a$ , и искомая область содержится в зоне устойчивости основного резонанса; далее для систем с гамильтонианами  $\Gamma_{1,2}^{(0)}$  это условие считаем выполненным.

При  $R_2 \neq 0$  введем обозначение  $x = (R_1/R_2)^{1/2}$  и представим модельные гамильтонианы в виде

$$\Gamma_j^{(0)} = R_2^2 f_j(x).$$

Здесь  $f_j(x)$  — многочлены четвертой степени относительно  $x$ , причем индекс  $j$  может принимать значения 1, 2, 3, относящиеся соответственно к гамильтонианам  $\Gamma_{1,2}^{(0)}, \Gamma_3^{(0)}, \Gamma_{4,5}^{(0)}$ , а

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (c_{20} + a\alpha)x^4 + c_{11}x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (\alpha = \cos 4\Phi_1, \beta = \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2)), \\ f_2(x) &= c_{20}x^4 + c\gamma x^3 + c_{11}x^2 + b\beta x + c_{02} \quad (\gamma = \cos(3\Phi_1 + \Phi_2), \beta = \cos(\Phi_1 - 3\Phi_2)), \\ f_3(x) &= c_{20}x^4 + c\gamma x^3 + (c_{11} + d\delta)x^2 + b\beta x + c_{02} \\ &\quad (\gamma = \cos(3\Phi_1 \pm \Phi_2), \beta = \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2), \delta = \cos(2\Phi_1 \mp 2\Phi_2 + \kappa)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величины  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  в этих соотношениях будем рассматривать как параметры, принимающие произвольные значения из диапазона  $[-1, 1]$ . Найдем, при каких ограничениях на резонансные коэффициенты  $a, b, c, d$  (с учетом наложенных выше условий на величины  $c_{ij}$ ) функции (3.2) положительны при всех  $x \geq 0$  и всех значениях параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  из указанного диапазона. Эти ограничения и обеспечивают знакоопределенность рассматриваемых модельных гамильтонианов.



**3.1. Анализ функции  $f_1(x)$**

Элементарный анализ коэффициентов функции  $f_1(x)$  показывает, что при всех  $\alpha$  и  $\beta$  эта функция либо не имеет корней на положительной полуоси  $x \geq 0$ , либо имеет два корня. Переход от первого варианта ко второму осуществляется для тех значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых многочлены  $f_1(x)$  и  $f_1'(x)$  имеют общие корни на положительной полуоси  $x \geq 0$ . Это означает, что результат  $Rs_1(\alpha, \beta)$  двух многочленов по переменной  $x$ , равный

$$Rs_1(\alpha, \beta) = -(c_{20} + \alpha a)^2 F_1, \tag{3.3}$$

$$F_1 = 27(c_{20} + \alpha a)(\beta b)^4 - 4c_{11}[36c_{02}(c_{20} + \alpha a) - c_{11}^2](\beta b)^2 - 16c_{02}[4c_{02}(c_{20} + \alpha a) - c_{11}^2]^2,$$

должен обратиться в нуль.

Рассмотрим квадратное относительно  $\beta^2$  уравнение  $F_1 = 0$ . Его единственный положительный корень вычисляется по формуле

$$\beta^2(\alpha) = \frac{2[c_{11}[36c_{02}(c_{20} + \alpha a) - c_{11}^2] + [12c_{02}(c_{20} + \alpha a) + c_{11}^2]^{3/2}}{27b^2(c_{20} + \alpha a)} \tag{3.4}$$

Геометрическое место точек плоскости параметров  $\alpha, \beta$ , удовлетворяющих условию (3.4), состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси абсцисс.

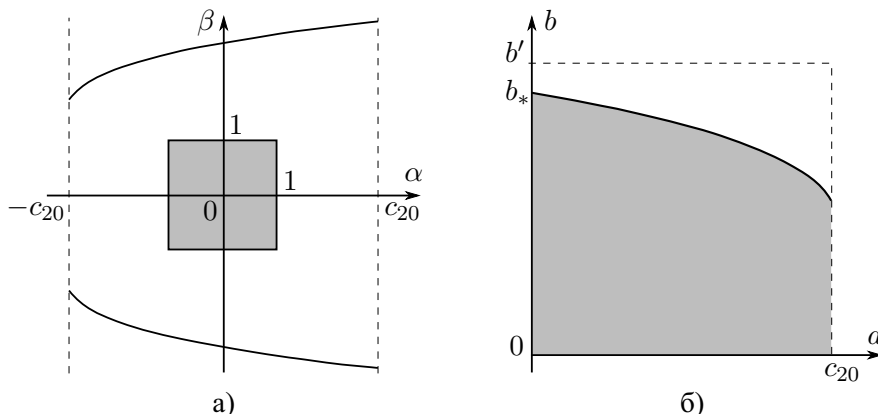
**3.1.1.** При выполнении условия (1) из соотношений (3.1) функция  $\beta = \beta(\alpha)$  монотонно возрастает на верхней ветви и монотонно убывает на нижней ветви в допустимой области  $|\alpha| < c_{20}/a$  (рис. 1, а). Проверка показывает, что общие корни многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$  имеются для значений  $\alpha, \beta$ , соответствующих точкам нижней ветви.

Если справедливо неравенство  $\beta^2(-1) > -1$ , то квадрат, задаваемый условиями  $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ , определяющими множество допустимых значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , целиком лежит между двумя описанными ветвями (см. рис. 1, а), и для всех его точек результат (3.3) сохраняет постоянный знак (то есть в нуль не обращается). Тогда, как и в случае  $\alpha = \beta = 0$ , модельные гамильтонианы  $\Gamma_1^{(0)}$  и  $\Gamma_2^{(0)}$  являются положительно определенными функциями при всех  $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$ .

Указанное условие сводится к неравенству

$$cr_1 = b^2 - \frac{2[c_{11}[36c_{02}(c_{20} - a) - c_{11}^2] + [12c_{02}(c_{20} - a) + c_{11}^2]^{3/2}}{27(c_{20} - a)} < 0, \tag{3.5}$$

которое при заданных значениях величин  $c_{20}, c_{11}$  и  $c_{02}$  определяет искомую область в плоскости резонансных коэффициентов  $a$  и  $b$  при  $a \geq 0, b \geq 0$ .



**Рис. 1.** Исследование функции  $f_1(x)$  для случая (1) из (3.1)

Эта область закрашена на рис. 1, б, ее границей является прямоугольная трапеция с криволинейной верхней границей, имеющей концы в точках  $(0, b_*)$  и  $(c_{20}, 2\sqrt{c_{11}c_{02}})$ . Величина  $b_*$  определяется из соотношения

$$b_*^2 = \frac{2[c_{11}(36c_{20}c_{02} - c_{11}^2) + (12c_{20}c_{02} + c_{11}^2)^{3/2}]}{27c_{20}}, \quad (3.6)$$

причем справедлива оценка

$$2\sqrt{c_{11}c_{02}} < b_* \leq b', \quad b' = \frac{c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}}{3\sqrt{3}}, \quad (3.7)$$

в которой знак равенства реализуется только при выполнении условия  $c_{11} = 3c_{02} - c_{20} > 0$ .

Отметим, что верхняя граница  $b = b'$  в неравенстве (3.7) совпадает с границей области устойчивости сильного комбинационного резонанса для модельной системы с гамильтонианом  $\Gamma_1^{(0)}$ . Для этой системы найденная область знакоопределенности функции  $f_1(x)$  лежит внутри области (с границами — пунктирными линиями на рис. 1, б, где каждый сильный резонанс, рассматриваемый по отдельности, устойчив).

Для модельной системы с гамильтонианом  $\Gamma_2^{(0)}$  неравенство (3.5) задает ограничение на резонансный коэффициент слабого комбинационного резонанса, сужая (по сравнению со случаем  $a = 0$ ) область формальной устойчивости за счет взаимодействия этого слабого резонанса с сильным основным резонансом.

**3.1.2.** Пусть теперь выполняются условия (2) из (3.1). В этом случае графики функций  $\beta = \pm\beta(\alpha)$  из (3.4) представлены на рис. 2, а. Эти графики имеют на отрезке  $|\alpha| < c_{20}$  общую точку  $(\alpha_*, 0)$ , а прямая  $\alpha = -c_{20}$  является для них вертикальной асимптотой. Здесь введено обозначение  $\alpha_* = \Delta/(4c_{02}a)$  ( $\alpha_* < 0$ ). Анализ показывает, что изменение числа корней многочлена  $f_1(x)$  может происходить при переходе через обе кривые  $\beta = \pm\beta(\alpha)$ .

Требую, чтобы квадрат  $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$  мог быть вписан в область, лежащую между двумя описанными кривыми, вновь приходим к неравенству  $\beta^2(-1) > -1$  и условию (3.5). Соответствующее геометрическое место точек в плоскости резонансных коэффициентов  $a, b$  представляет криволинейный треугольник с вершинами в начале координат и в точках  $(0, b_*)$  и  $(a_*, 0)$ , где  $a_* = |\Delta|/(4c_{02})$  (рис. 2, б).

Границы зоны устойчивости каждого резонанса модельной системы с гамильтонианом  $\Gamma_1^{(0)}$  (рассматриваемого по отдельности) отмечены на рис. 2, б пунктирными линиями.

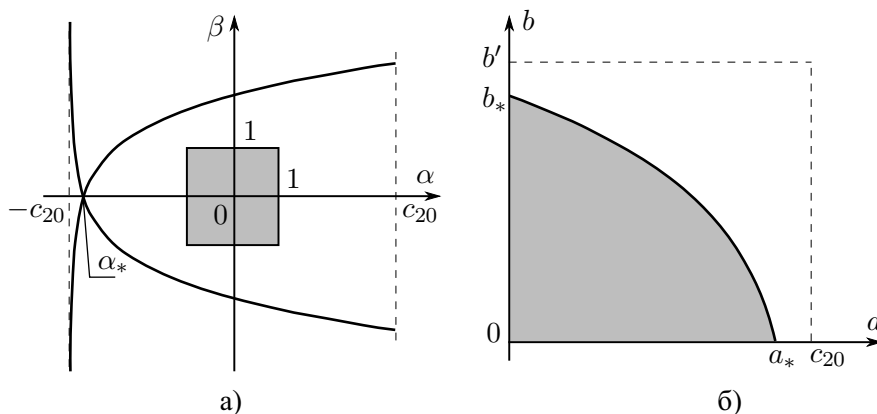


Рис. 2. Исследование функции  $f_1(x)$  для случая (2) из (3.1)



**3.2. Анализ функции  $f_2(x)$**

Аналогичным путем исследуются свойства функции  $f_2(x)$ . Результат двух многочленов  $f_2(x)$  и  $f_2'(x)$  по переменной  $x$  представляется в виде  $Rs_2 = -c_{20}F_2(\beta, \gamma)$ , где

$$F_2(\beta, \gamma) = 27c_{20}^2(\beta b)^4 + 4(\beta\gamma)^3(bc)^3 + (6c_{20}c_{02} - c_{11}^2)(\beta\gamma bc)^2 + 27c_{02}^2(\gamma c)^4 + 2c_{11}(2\Delta_1 - 9\beta\gamma bc)[c_{20}(\beta b)^2 + c_{02}(\gamma c)^2] + 16c_{20}c_{02}(12c_{20}c_{02} + 5c_{11}^2)\beta\gamma bc - 16c_{20}c_{02}\Delta^2.$$

Здесь введено обозначение  $\Delta_1 = c_{11}^2 - 36c_{20}c_{02}$ . Геометрическое место точек в плоскости величин  $\beta, \gamma$ , удовлетворяющих условию  $F_2 = 0$ , симметрично относительно начала координат, так как выражение  $F_2(\beta, \gamma)$  не изменяется при одновременной замене знаков  $\beta$  и  $\gamma$ .

Кривые  $F_2(\beta, \gamma) = 0$  пересекают оси  $\gamma = 0$  и  $\beta = 0$  в точках  $\beta = \pm\beta_*$  и  $\gamma = \pm\gamma_*$ , где

$$\beta_*^2 = \frac{2}{27} \frac{(12c_{20}c_{02} + c_{11}^2)^{3/2} - c_{11}\Delta_1}{b^2c_{20}}, \quad \gamma_*^2 = \frac{c_{20}b^2}{c_{02}c^2} \beta_*^2.$$

В этих точках функция  $\gamma = \gamma(\beta)$ , задаваемая неявно соотношением  $F_2(\beta, \gamma) = 0$ , убывает, так как ее производные  $\gamma'_\beta = -F'_{2\beta}/F'_{2\gamma}$  в точках  $(\pm\beta_*, 0)$  и  $(0, \pm\gamma_*)$ , определяемые соответственно выражениями

$$-\frac{b(\sqrt{12c_{20}c_{02} + c_{11}^2} + c_{11})}{2c_{02}c} \quad \text{и} \quad -\frac{b(\sqrt{12c_{20}c_{02} + c_{11}^2} - c_{11})}{6c_{02}c},$$

отрицательны.

Исследование результатов пар функций  $F_2, F'_{2\beta}$  и  $F_2, F'_{2\gamma}$  по аргументам  $\beta$  и  $\gamma$  показывает, что на кривых  $F_2(\beta, \gamma) = 0$  производные  $F'_{2\beta}$  и  $F'_{2\gamma}$  обращаются в нуль одновременно. Координаты  $\beta, \gamma$  соответствующих точек (особых точек) задаются двумя системами уравнений вида

$$(b\beta)^4 - 8c_{02}c_{11}(b\beta)^2 + 16c_{02}^2\Delta = 0, \quad (c\gamma)^4 - 8c_{11}c_{20}(c\gamma)^2 + 16c_{20}^2\Delta = 0 \quad (3.8)$$

и

$$\begin{aligned} 27c_{20}(b\beta)^4 - c_{11}(c_{11}^2 + 108c_{20}c_{02})(b\beta)^2 + 3c_{02}(12c_{20}c_{02} + c_{11}^2)^2 &= 0, \\ 27c_{02}(c\gamma)^4 - c_{11}(c_{11}^2 + 108c_{20}c_{02})(c\gamma)^2 + 3c_{20}(12c_{20}c_{02} + c_{11}^2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

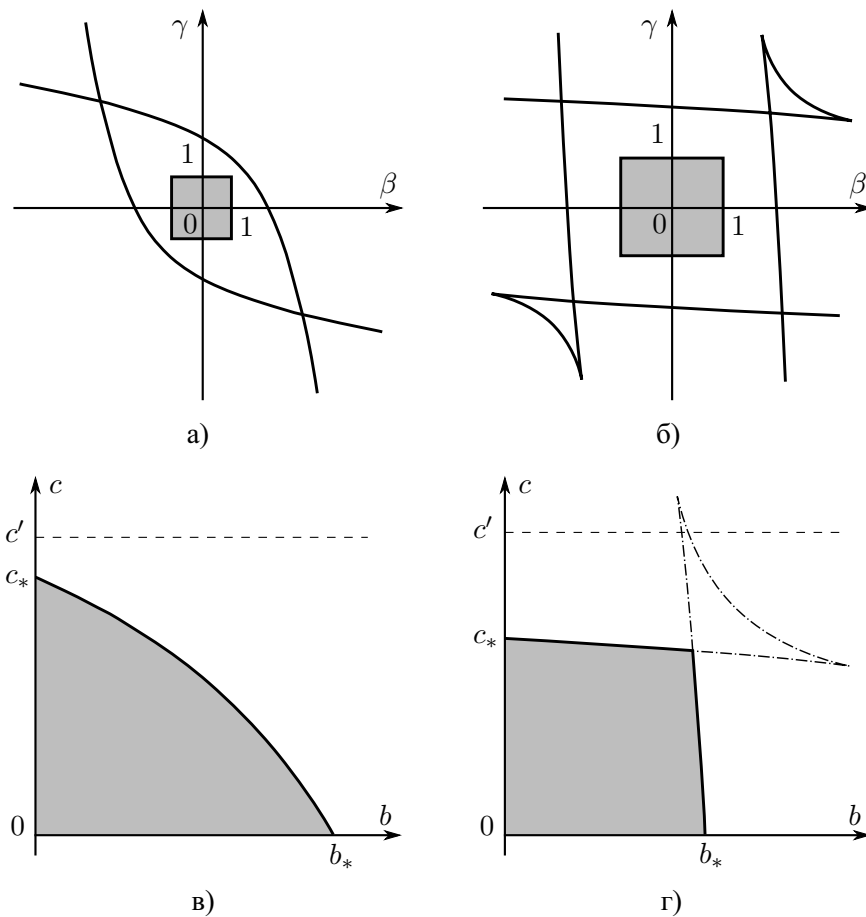
Рассматривая совместно систему (3.8) и уравнение  $F_2 = 0$ , найдем для обоих случаев (3.1) две симметричные особые точки

$$\beta = \beta_1 = \pm \frac{1}{b} \sqrt{c_{02}(c_{11} + 2\sqrt{c_{20}c_{02}})}, \quad \gamma = \gamma_1 = \mp \frac{1}{c} \sqrt{c_{20}(c_{11} + 2\sqrt{c_{20}c_{02}})}.$$

Для случая (1) при  $0 < c_{11} < 6\sqrt{c_{20}c_{02}}$  ( $\Delta_1 < 0$ ) и случая (2) кривая  $F_2 = 0$  состоит из двух ветвей, пересекающихся в этих точках (рис. 3, а). В их окрестности ( $\beta = \beta_1 + \xi$ ,  $\gamma = \gamma_1 + \eta$ ) имеем

$$\eta = \frac{\pm \sqrt{c_{11}^2 + 8\sqrt{c_{20}c_{02}}c_{11} + 12c_{20}c_{02}} - c_{11} - 4\sqrt{c_{20}c_{02}}}{2c_{02}c} b\xi + O(\xi^2). \quad (3.10)$$

При выполнении условия  $c_{11} > 6\sqrt{c_{20}c_{02}}$  ( $\Delta_1 > 0$ ) для случая (1) из (3.1) на каждой ветви кривой  $F_2 = 0$  имеется точка самопересечения, и образуется «петля», содержащая две точки возврата (см. рис. 3, б).



**Рис. 3.** Исследование функции  $f_2(x)$

Координаты точек самопересечения, являющиеся решениями той же системы (3.8), задаются выражениями

$$\beta = \beta_2 = \pm \frac{2}{b} \sqrt{c_{02}(c_{11} - 2\sqrt{c_{20}c_{02}})}, \quad \gamma = \gamma_2 = \pm \frac{2}{c} \sqrt{c_{20}(c_{11} - 2\sqrt{c_{20}c_{02}})} \quad (3.11)$$

В окрестности этих точек ( $\beta = \beta_2 + \xi, \gamma = \gamma_2 + \eta$ ) уравнения двух ветвей кривой  $F_2 = 0$  имеет вид (3.10), в котором изменен на противоположный знак второго слагаемого в подкоренном выражении.

Координаты точек возврата являются решениями системы уравнений (3.9). Для двух точек возврата имеем

$$\begin{aligned} \beta = \beta_3 &= \pm \frac{\sqrt{6} \sqrt{c_{11}(c_{11}^2 + 108c_{20}c_{02}) + \Delta_1^{3/2}}}{18b\sqrt{c_{20}}}, \\ \gamma = \gamma_3 &= \pm \frac{\sqrt{6} \sqrt{c_{11}(c_{11}^2 + 108c_{20}c_{02}) - \Delta_1^{3/2}}}{18c\sqrt{c_{02}}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Координаты двух других точек возврата получаются, если в соотношениях (3.12) одновременно поменять на противоположные знаки перед  $\Delta_1^{3/2}$ .

Уравнения двух участков кривой  $F_2 = 0$  в окрестности ( $\beta = \beta_3 + \xi, \gamma = \gamma_3 + \eta$ ) точки (3.12), в которой выбран верхний знак, имеют вид

$$\eta = k_1\xi + k_2\xi^{3/2} + O(\xi^2) \quad (\xi > 0), \quad k_1 = -\frac{b(c_{11} - \sqrt{\Delta_1})}{6c_{02}c},$$

$$k_2^2 = \frac{4\sqrt{6}b^3(c_{11} - \sqrt{\Delta_1})[(18c_{20}c_{02} + c_{11}^2)\sqrt{\Delta_1} - c_{11}^3]\sqrt{c_{11}(c_{11}^2 + 108c_{20}c_{02}) + \Delta_1^{3/2}}}{2187c_{02}^3\sqrt{c_{20}}(12c_{20}c_{02} + c_{11}^2)c^2\sqrt{\Delta_1}}.$$

Окрестности остальных точек могут быть описаны аналогичным образом.

Для граничного случая  $c_{11} = 6\sqrt{c_{20}c_{02}}$  точки (3.11) и (3.12) сливаются и образуют две симметричные регулярные точки  $\beta = \beta_0 = \pm 4c_{20}^{1/4}c_{02}^{3/4}/b$ ,  $\gamma = \gamma_0 = \pm 4c_{20}^{3/4}c_{02}^{1/4}/c$ , в окрестности которых ( $\beta = \beta_0 + \xi$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \eta$ ) имеем  $\eta = -(\sqrt{c_{20}}b/(\sqrt{c_{02}}c))\xi + O(\xi^2)$ .

В перечисленных особых точках (если они существуют) производные  $F'_{2\beta}$  и  $F'_{2\gamma}$  одновременно обращаются в нуль, а при переходе через эти точки меняют знаки. На участках обеих ветвей кривой  $F_2 = 0$  вне особых точек указанные производные сохраняют одинаковые знаки. Отсюда следует, что производная  $\gamma'_\beta$  на этих участках отрицательна, как в рассмотренных выше точках  $(\pm\beta_*, 0)$  и  $(0, \pm\gamma_*)$ . Таким образом, для каждой ветви функция  $\gamma = \gamma(\beta)$  на указанных участках монотонно убывает.

Рассмотрим квадрат, задаваемый неравенствами  $|\beta| \leq 1$ ,  $|\gamma| \leq 1$ , определяющими допустимые значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . Этот квадрат должен целиком вписаться во внутреннюю область, содержащую начало координат, между кривыми на рис. 3, а и 3, б. Так как  $F_2(0, 0) < 0$ , то достаточно потребовать выполнения условия  $F_2(1, 1) < 0$ , равносильного неравенству

$$cr_2 = 27c_{02}^2c^4 + 2(2b^2 - 9c_{11}c_{02})bc^3 + [(6c_{20}c_{02} - c_{11}^2)b^2 + 4c_{02}c_{11}\Delta_1]c^2 - 2c_{20}[9c_{11}b^2 - 8c_{02}(12c_{20}c_{02} + 5c_{11}^2)]bc + c_{20}[27c_{20}b^4 + 4c_{11}\Delta_1b^2 - 16c_{02}\Delta_1^2] < 0. \quad (3.13)$$

При фиксированных значениях  $c_{ij}$  геометрическое место точек первой четверти координатной плоскости  $b, c$ , удовлетворяющих условию (3.13), показано на рис. 3, в и 3, г для случаев, соответствующих рис. 3, а и 3, б. В случае на рис. 3, в это множество представляет собой криволинейный треугольник с вершинами в начале координат и точках  $(b_*, 0)$  и  $(0, c_*)$ , причем величины  $b_*$  и  $c_*$  задаются соотношениями

$$b_*^2 = \frac{2}{27} \frac{(12c_{20}c_{02} + c_{11}^2)^{3/2} - c_{11}\Delta_1}{c_{20}}, \quad c_*^2 = \frac{c_{20}b_*^2}{c_{02}}. \quad (3.14)$$

В случае, представленном на рис. 3, г, имеем криволинейный четырехугольник с теми же тремя вершинами и четвертой вершиной с координатами  $(b_{**}, c_{**})$ , где

$$b_{**}^2 = 4c_{02}(c_{11} - 2\sqrt{c_{20}c_{02}}), \quad c_{**}^2 = b_{**}^2 c_{20}/c_{02}.$$

Отметим, что в этом случае должны быть исключены из рассмотрения точки, охватываемые «петлей» (штрихпунктирная линия на рис. 3, г), координаты которых также удовлетворяют условию (3.13).

Для обоих описанных случаев справедлива оценка

$$c_* \leq c', \quad c' = \frac{|9c_{20} + 3c_{11} + c_{02}|}{3\sqrt{3}}, \quad (3.15)$$

причем знак равенства достигается при условии  $c_{11} = 3c_{20} - c_{02}$ . Таким образом, найденная область лежит внутри области устойчивости сильного комбинационного резонанса (рассматриваемого без учета второго резонанса).

### 3.3. Анализ функции $f_3(x)$

Рассмотрим свойства функции  $f_3(x)$  для точек пространства параметров  $\beta, \gamma, \delta$ , принадлежащих кубу  $|\beta| \leq 1, |\gamma| \leq 1, |\delta| \leq 1$ . При фиксированном значении  $\delta = \delta_0$  функция  $f_3(x)$  совпадает с функцией  $f_2(x)$ , если в последней сделать замену  $c_{11}$  на  $c_{11} + d\delta_0$ . Как в предыдущем пункте, в плоскости параметров  $\beta, \gamma$  строим кривые, на которых результат многочленов  $f_3(x)$  и  $f'_3(x)$  (при  $\delta = \delta_0$ ) обращается в нуль. При различных  $\delta_0$  получаем систему вложенных друг в друга фигур, содержащих начало координат.

Нетрудно показать, что в обоих случаях (1) и (2) из (3.1) фигуры, соответствующие меньшим значениям  $\delta_0$ , заключены внутри фигур, соответствующих большим значениям  $\delta_0$ . Выбираем фигуру, отвечающую  $\delta_0 = -1$ , и находим условие, при котором в нее может быть вписан квадрат  $|\beta| \leq 1, |\gamma| \leq 1$ . Тогда в часть трехмерного пространства параметров  $\beta, \gamma, \delta$ , ограниченную поверхностью  $R_{S_3}(\beta, \gamma, \delta) = 0$ , где  $R_{S_3}(\beta, \gamma, \delta)$  — результат многочленов  $f_3(x)$  и  $f'_3(x)$  по переменной  $x$ , и содержащую начало координат, можно вписать упомянутый куб.

Делая в условии (3.13) замену  $c_{11}$  на  $c_{11} - d$ , получаем неравенство

$$\begin{aligned} cr_3 = & 27c_{02}^2c^4 + 2(2b^2 - 9(c_{11} - d)c_{02})bc^3 + \\ & + [(6c_{20}c_{02} - (c_{11} - d)^2)b^2 + 4c_{02}((c_{11} - d)(36c_{20}c_{02} - (c_{11} - d)^2)]c^2 - \\ & - 2c_{20}[9(c_{11} - d)b^2 - 8c_{02}(12c_{20}c_{02} + 5(c_{11} - d)^2)]bc + c_{20}[27c_{20}b^4 - \\ & - 4(c_{11} - d)(36c_{20}c_{02} - (c_{11} - d)^2)b^2 - 16c_{02}((c_{11} - d)^2 - 4c_{20}c_{02})^2] < 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

которое при заданных значениях величин  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  задает искомые ограничения на резонансные коэффициенты  $b, c, d$ . При этом выбирается область первого октанта трехмерного пространства этих коэффициентов, удовлетворяющая (3.16), с границей, содержащей начало координат.

Максимальные значения величин  $b, c$  и  $d$  на ограничивающей эту область поверхности достигаются в точках пересечения поверхности с осями координат. Эти значения равны соответственно  $b_*, c_*$  и  $d_*$ , где  $b_*$  и  $c_*$  определены в (3.14), а  $d_* = c_{11} + 2\sqrt{c_{20}c_{02}}$ . Для величин  $b_*$  и  $c_*$ , справедливы оценки (3.6) и (3.15), а для  $d_*$  для обоих случаев (1) и (2) имеем неравенство

$$d_* \leq c_{20} + c_{11} + c_{02} \quad (c_{20} + c_{11} + c_{02} > 0),$$

в котором знак равенства реализуется при условии  $c_{20} = c_{02}$ . Таким образом, как и в предыдущих случаях, найденная область знакоопределенности модельных гамильтонианов  $\Gamma_0^{(4)}$  и  $\Gamma_0^{(5)}$  содержится внутри области устойчивости каждого из имеющихся в системе сильных резонансов (рассматриваемых по отдельности).

### 3.4. Достаточные условия формальной устойчивости полных систем

Вернемся к полным системам с гамильтонианами (2.3)–(2.5). Наличие кратных резонансов четвертого порядка означает, что в этих системах есть резонансы, вообще говоря, всех четных порядков выше четвертого. Можно продолжить нормализацию полных гамильтонианов в слагаемых всех степеней, начиная с пятой, с учетом этих резонансов. Несложно показать, что замена переменных, уничтожающая время в резонансных слагаемых четвертого порядка, уничтожает его также и во всех остальных резонансных гармониках. Нормализованные таким образом гамильтонианы, являясь формальными интегралами соответствующих им автономных систем, при достаточно малых неотрицательных значениях  $r_1$  и  $r_2$  остаются положительно определенными функциями этих величин, если коэффициенты нормальной формы в членах четвертой степени гамильтониана возмущенного движения удо-

влетворяют соответствующему условию (3.5), (3.13) или (3.16). Эти неравенства и составляют достаточные условия формальной устойчивости положения равновесия  $r_1 = r_2 = 0$  полной системы в соответствующем резонансном случае.

Во всех рассмотренных системах полученные области формальной устойчивости целиком содержатся внутри областей устойчивости каждого сильного резонанса, рассматриваемого по отдельности. Если в системе имеются слабые резонансы, то для обеспечения формальной устойчивости отвечающие им резонансные коэффициенты, при наличии других резонансов, должны выбираться из ограниченного диапазона.

#### § 4. О неустойчивости тривиального равновесия при наличии кратных резонансов четвертого порядка

Интуитивно кажется ясным, что тривиальное равновесие системы при наличии нескольких резонансов четвертого порядка неустойчиво, если параметры системы находятся в зоне неустойчивости хотя бы одного имеющегося сильного резонанса (рассматриваемого отдельно от других резонансов). Данное утверждение доказывается ниже для зоны неустойчивости основного резонанса в системах с гамильтонианами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Зона неустойчивости комбинационного резонанса четвертого порядка организована сложнее. При наличии сильного комбинационного резонанса (и отсутствии других резонансов) функция Четаева строится с учетом имеющегося в системе первого интеграла, линейного по  $R_j$  [19]. При добавлении других резонансов четвертого порядка первый интеграл исчезает, и такой подход неприменим. Строгое доказательство неустойчивости в этих случаях остается открытым вопросом. Отметим также, что открытым остается вопрос о характере устойчивости исследуемого равновесия вне найденных областей формальной устойчивости, но внутри зоны устойчивости сильных резонансов.

##### 4.1. Доказательство неустойчивости при наличии основного резонанса (системы с гамильтонианами $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ )

Пусть в системе с гамильтонианом  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$  коэффициенты  $c_{ij}$  произвольны, а резонансный коэффициент  $a$  удовлетворяет первому условию из (2.6). Докажем неустойчивость тривиального равновесия этих систем, используя теорему Четаева о неустойчивости [20]. В качестве функции Четаева выберем функцию (см. [19])

$$V = (R_1^\gamma - R_2^2)R_1^2 \sin(4\alpha\Phi_1) \quad (\alpha = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad 2 < \gamma < 3). \quad (4.1)$$

Область  $V > 0$  (с границей  $V = 0$ ) определим условиями  $R_1^\gamma > R_2^2$ ,  $\sin(4\alpha\Phi_1) > 0$ , сводящимися к неравенствам

$$R_2 = \delta R_2^{\gamma/2} \quad (0 < \delta < 1), \quad 0 < \Phi_1 < \frac{\pi}{4\alpha}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим уравнения движения систем с гамильтонианами  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$ . в силу условий (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= R_1^2(4a \sin 4\Phi_1 + g_1), & \dot{R}_2 &= \pm 3b\delta^{3/2} R_1^{(2+3\gamma)/4} \sin \Psi + O(R_1^{5/2}), \\ \dot{\Phi}_1 &= R_1[2(c_{20} + a \cos 4\Phi_1) + g_2]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь введено обозначение  $\Psi = \Phi_1 \pm 3\Phi_2$ , в котором верхние и нижние знаки относятся к системе с гамильтонианом  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно. Величины  $g_1$  и  $g_2$  определяются формулами

$$\begin{aligned} g_1 &= b\delta^{3/2} R_1^{3(\gamma-2)/4} \sin \Psi + O(R_1^{1/2}), \\ g_2 &= c_{11} \delta R_1^{(\gamma-2)/2} + \frac{1}{2} b\delta^{3/2} R_1^{3(\gamma-2)/4} \cos \Psi + O(R_1^{1/2}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

причем  $g_j \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2$ ) при  $R_1 \rightarrow 0$ . Отметим, что, в зависимости от выбранного значения  $\gamma$ , степени по  $R_1$  некоторых слагаемых в (4.3) и (4.4), выписанных явно, могут быть как меньше, так и больше степеней по  $R_1$  в последних слагаемых-поправках; данное обстоятельство не отражается на итоговом заключении.

Найдем производную  $dV/dt$  функции (4.1) в силу уравнений (4.3), (4.4). Проведя расчеты, получаем

$$\begin{aligned} dV/dt &= 4R_1^{\gamma+3} \{ a\gamma \sin(4\alpha\Phi_1) \sin 4\Phi_1 + 2(1 - \delta^2) [a \cos(4\epsilon\Phi_1) + \\ &\quad + c_{20} \cos(4\alpha\Phi_1) + \epsilon \cos(4\alpha\Phi_1)(c_{20} + a \cos 4\Phi_1)] + g \}, \\ 4g &= [\gamma + 2(1 - \delta^2)]g_1 \sin(4\alpha\Phi_1) + 4\alpha(1 - \delta^2)g_2 \cos(4\alpha\Phi_1) + g_3, \\ g_3 &= \mp 6\delta^{5/2} b R_1^{(\gamma-2)/4} \sin(4\alpha\Phi_1) \sin \Psi + O(R_1^{(3-\gamma)/2}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь функция  $g$ , как и  $g_3$ , стремится к нулю при  $R_1 \rightarrow 0$ .

Из выражения (4.5) следует, что в достаточно малой окрестности начала координат и при достаточно малых  $\epsilon$  производная  $dV/dt$  положительна в области (4.2), если выполнено условие  $a > |c_{20}|$ . Таким образом, при выполнении этого условия тривиальное равновесие системы с гамильтонианом  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$  неустойчиво.

### § 5. О формальной устойчивости цилиндрической прецессии спутника-пластинки на эллиптической орбите в случаях кратных резонансов четвертого порядка

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Предполагаем, что центр масс  $O$  спутника движется по эллиптической орбите произвольного эксцентриситета  $e$  ( $0 < e < 1$ ). Ориентацию главных центральных осей инерции  $Ox, Oy, Oz$  тела относительно осей  $OX, OY, OZ$  орбитальной системы координат (направленных соответственно по трансверсали, по бинормали к орбите и вдоль радиус-вектора центра масс спутника) будем задавать углами Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ , вводимыми обычным образом.

Пусть  $A$  и  $C$  — экваториальный и осевой моменты инерции спутника, причем геометрия масс спутника отвечает тонкой пластинке ( $C = 2A$ ). Обозначим через  $r_0$  проекцию абсолютной угловой скорости спутника на ось динамической симметрии ( $r_0 = \text{const}$ ) и через  $\omega_0$  среднее движение центра масс. Движение спутника относительно центра масс описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона вида [22]

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_\psi^2}{2(1 + e \cos \nu)^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2(1 + e \cos^2 \nu)} - p_\psi \cot \theta \cos \psi - \frac{2\beta(1 - e^2)^{3/2} p_\psi \cos \theta}{(1 + e \cos^2 \nu) \sin^2 \theta} - \\ &\quad - p_\theta \sin \psi + \frac{2\beta(1 - e^2)^{3/2} \cos \psi}{\sin \theta} + \frac{2\beta^2(1 - e^2)^3 \cot^2 \theta}{(1 + e \cos^2 \nu)} + \frac{3}{2} (1 + e \cos \nu) \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $\beta = r_0/\omega_0$ , а  $p_\psi$  и  $p_\theta$  — импульсы, канонически сопряженные с углами  $\psi$  и  $\theta$  и безразмерные при помощи множителя  $A\omega_0(1 - e^2)^{3/2}$ . За независимую переменную принята истинная аномалия  $\nu$ .

Ранее в статье [23] был проведен подробный, линейный и нелинейный, анализ устойчивости частного решения

$$\theta = \pi/2, \quad \psi = \pi, \quad p_\theta = 0, \quad p_\psi = 0 \quad (5.2)$$

системы с гамильтонианом (5.1), отвечающего стационарному вращению (цилиндрической прецессии), для которого спутник расположен в плоскости орбиты и вращается с постоянной угловой скоростью  $r_0$  вокруг оси динамической симметрии.



В частности, был рассмотрен случай прямых вращений ( $\beta > 0$ ), для которого совпадают направление вращения спутника вокруг оси симметрии и направление движения его центра масс по орбите. Исследование проведено в областях устойчивости в линейном приближении плоскости параметров  $e, \beta$ , расположенных ниже граничной кривой области параметрического резонанса, выходящей из точки  $\beta = (19 + 3\sqrt{161})/32 = 1.783304144$  оси  $e = 0$ . Было установлено, что в указанной части плоскости имеются обширные зоны формальной устойчивости решения (5.2) (вне точек кривых резонансов четвертого порядка). При этом на самих резонансных кривых выполняются соответствующие условия устойчивости. Точки пересечения резонансных кривых, отвечающие случаям кратных резонансов, в статье [23] не рассматривались.

В описанной части плоскости параметров существует 19 точек кратных резонансов четвертого порядка. в данной работе для каждой из этих точек была выполнена нормализация отвечающего ей гамильтониана возмущенного движения и проверены найденные в § 3 достаточные условия формальной устойчивости. При проведении расчетов была использована система Maple и применен конструктивный алгоритм нормализации неавтономных гамильтонианов, разработанный в статье [24] на основе метода точечных отображений.

Ниже приведены результаты расчетов. Для каждой точки указаны ее координаты  $(e, \beta)$  и, в скобках, соответствующие резонансные соотношения. Затем выписаны коэффициенты нормальной формы в слагаемых четвертой степени. в тех резонансных случаях, когда у величин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (по сравнению с наборами (1.3)–(1.8)) поменялись местами индексы 1 и 2, резонансные коэффициенты помечены штрихами; в этих случаях в критерии формальной устойчивости внесены необходимые изменения. Далее приведено значение соответствующей величины  $cr_j$  ( $j = 1, 2$  или 3).

Для случаев двойного (основного и комбинационного) резонанса четвертого порядка имеем:

- 1)  $e = 0.607388193, \quad \beta = 0.801227648 \quad (4\lambda_2 = 3, 3\lambda_1 + \lambda_2 = 7),$   
 $c_{20} = 29.29863892, \quad c_{11} = 32.31780430, \quad c_{02} = 1.566609140,$   
 $a' = 0.5412543461, \quad b' = 21.54284368, \quad cr_1 = -3426.743912;$
- 2)  $e = 0.14664709, \quad \beta = 1.10519913 \quad (4\lambda_1 = 9, \lambda_1 + 3\lambda_2 = 5),$   
 $c_{20} = 0.078524572, \quad c_{11} = -0.02591295146, \quad c_{02} = 0.0633909459,$   
 $a = 0.495980040 \cdot 10^{-4}, \quad b = 0.837579610 \cdot 10^{-3}, \quad cr_1 = -0.963543941 \cdot 10^{-2};$
- 3)  $e = 0.28696898, \quad \beta = 1.09728326 \quad (4\lambda_2 = 3, 3\lambda_1 + \lambda_2 = 8),$   
 $c_{20} = 0.099551314, \quad c_{11} = 0.0111523054, \quad c_{02} = 0.116244193,$   
 $a' = 0.003057585716, \quad b' = 0.00571426509, \quad cr_1 = -0.03551109319;$
- 4)  $e = 0.07220860, \quad \beta = 1.21661734 \quad (4\lambda_1 = 9, \lambda_1 - 3\lambda_2 = -1),$   
 $c_{20} = 0.064135071, \quad c_{11} = -0.001446211225, \quad c_{02} = 0.07401831936,$   
 $a = 1.536481820 \cdot 10^{-7}, \quad b = 0.00258827405, \quad cr_1 = -0.01541213117;$
- 5)  $e = 0.24371466, \quad \beta = 1.70810775 \quad (4\lambda_2 = 5, 3\lambda_1 + \lambda_2 = 10),$   
 $c_{20} = 0.1441448496, \quad c_{11} = 0.240668283, \quad c_{02} = 0.000111664859,$   
 $a' = 0.3009972693 \cdot 10^{-4}, \quad b' = 0.225056524 \cdot 10^{-3}, \quad cr_1 = -0.1387924802;$
- 6)  $e = 0.44384790, \quad \beta = 1.66830586 \quad (4\lambda_1 = 11, \lambda_1 + 3\lambda_2 = 7),$   
 $c_{20} = 0.13928237, \quad c_{11} = 0.312581409, \quad c_{02} = 0.107150963,$   
 $a = 0.2642136064 \cdot 10^{-3}, \quad b = 0.00161422453, \quad cr_1 = -0.1504926642.$

Для точек, соответствующих двойным комбинационным резонансам четвертого порядка, получаем следующие результаты:

- 7)  $e = 0.29548939$ ,  $\beta = 0.87533625$  ( $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 4$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2 = 6$ ),  
 $c_{20} = 0.037343764$ ,  $c_{11} = 0.403478868$ ,  $c_{02} = 0.0883623386$ ,  
 $b' = 0.09559920144$ ,  $c' = 0.04729022392$ ,  $cr_2 = -0.9555710120 \cdot 10^{-3}$ ;
- 8)  $e = 0.586254003$ ,  $\beta = 0.783275115$  ( $3\lambda_1 + \lambda_2 = 7$ ,  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$ ),  
 $c_{20} = 13.12961375$ ,  $c_{11} = 11.88885870$ ,  $c_{02} = 0.1519430214$ ,  
 $b = 2.148666351$ ,  $c = 9.076005433$ ,  $cr_2 = -92407.35608$ ;
- 9)  $e = 0.17444080$ ,  $\beta = 1.12476794$  ( $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2 = 6$ ),  
 $c_{20} = 0.078524572$ ,  $c_{11} = -0.02591295146$ ,  $c_{02} = 0.0633909459$ ,  
 $b' = 0.0955992014$ ,  $c' = 0.8375796099 \cdot 10^{-3}$ ,  $cr_2 = -0.186512972 \cdot 10^{-5}$ ;
- 10)  $e = 0.25852805$ ,  $\beta = 1.11870348$  ( $3\lambda_1 + \lambda_2 = 8$ ,  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$ ),  
 $c_{20} = 0.08596285872$ ,  $c_{11} = -0.007024403905$ ,  $c_{02} = 0.100985525$ ,  
 $b = 0.0599163031$ ,  $c = 0.00149371174$ ,  $cr_2 = -0.1604146523 \cdot 10^{-3}$ ;
- 11)  $e = 0.08569116$ ,  $\beta = 1.25848892$  ( $3\lambda_1 + \lambda_2 = 8$ ,  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = -1$ ),  
 $c_{20} = 0.060215792$ ,  $c_{11} = 0.0262223032$ ,  $c_{02} = 0.0741228455$ ,  
 $b = 0.00268746435$ ,  $c = 9.76025646$ ,  $cr_2 = -0.2105055652 \cdot 10^{-4}$ ;
- 12)  $e = 0.05915156$ ,  $\beta = 1.38522025$ , ( $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2 = 6$ ),  
 $c_{20} = 0.095203833$ ,  $c_{11} = 0.1263009724$ ,  $c_{02} = 0.0134013515$ ,  
 $b' = 0.1222587688 \cdot 10^{-4}$ ,  $c' = 9.531789539 \cdot 10^{-8}$ ,  $cr_2 = -0.24024927 \cdot 10^{-5}$ ;
- 13)  $e = 0.12703310$ ,  $\beta = 1.50382121$  ( $3\lambda_1 + \lambda_2 = 9$ ,  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = -1$ ),  
 $c_{20} = 0.12546076$ ,  $c_{11} = 0.147037594$ ,  $c_{92} = 0.00361163352$ ,  
 $b = 0.007728711994$ ,  $c = 3.856005960 \cdot 10^{-7}$ ,  $cr_2 = -0.2819510882 \cdot 10^{-5}$ ;
- 14)  $e = 0.41708232$ ,  $\beta = 1.69231966$  ( $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2 = 7$ ),  
 $c_{20} = 0.12985181$ ,  $c_{11} = 0.300972759$ ,  $c_{02} = 0.0833461906$ ,  
 $b' = 0.0541738981$ ,  $c' = 0.484623467 \cdot 10^{-3}$ ,  $cr_2 = -0.5179995509 \cdot 10^{-3}$ ;
- 15)  $e = 0.31464923$ ,  $\beta = 1.71444733$  ( $3\lambda_1 + \lambda_2 = 10$ ,  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = -1$ ),  
 $c_{20} = 0.1096585823$ ,  $c_{11} = 0.2892865511$ ,  $c_{02} = 0.03856636271$ ,  
 $b = 0.00903848541$ ,  $c = 0.001365525299$ ;  $cr_2 = -0.3019959617 \cdot 10^{-3}$ .

Для точек 7, 8, 13 выполняется условие  $c_{11} > 6\sqrt{c_{20}c_{02}}$ , и было дополнительно проверено, что значения соответствующих резонансных коэффициентов попадают в область, примыкающую к началу координат.

В случаях тройных комбинационных резонансов четвертого порядка имеем

- 16)  $e = 0.21572372$ ,  $\beta = 1.15325345$  ( $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5$ ,  $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 3$ ,  $3\lambda_1 + \lambda_2 = 8$ ),  
 $c_{20} = 0.072655048$ ,  $c_{11} = -0.008776381486$ ,  $c_{02} = 0.09068500660$ ,  $\kappa = 0$ ,  
 $b = 0.001331101229$ ,  $c = 0.1758324012 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 0.02956579776$ ,  
 $cr_3 = -0.6527458155 \cdot 10^{-4}$ ;

- 17)  $e = 0.10359630$ ,  $\beta = 1.32053700$  ( $\lambda_1 - 3\lambda_2 = -1$ ,  $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 7$ ,  $3\lambda_1 - \lambda_2 = 6$ ),  
 $c_{20} = 0.059775370$ ,  $c_{11} = 0.0800188372$ ,  $c_{02} = 0.0626145798$ ,  $\kappa = \pi$ ,  
 $b = 0.001721841235$ ,  $c = 0.1972212722 \cdot 10^{-3}$ ,  $d = 0.2706477553 \cdot 10^{-5}$ ,  
 $cr_3 = -0.4402481019 \cdot 10^{-5}$ ;
- 18)  $e = 0.21687984$ ,  $\beta = 1.46341752$  ( $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6$ ,  $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 3$ ,  $3\lambda_1 + \lambda_2 = 9$ ),  
 $c_{20} = 0.033462682$ ,  $c_{11} = 0.260521355$ ,  $c_{02} = 0.0497274326$ ,  $\kappa = 0$ ,  
 $b = 0.249723961 \cdot 10^{-3}$ ,  $c = 0.3546788914 \cdot 10^{-4}$ ,  $d = 0.1103670906$ ,  
 $cr_3 = -0.6722628964 \cdot 10^{-5}$ ;
- 19)  $e = 0.37416467$ ,  $\beta = 1.73053866$  ( $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7$ ,  $3\lambda_1 + \lambda_2 = 10$ ),  
 $c_{20} = 0.1260769897$ ,  $c_{11} = 0.2897759768$ ,  $c_{02} = 0.0585297934$ ,  $\kappa = 0$ ,  
 $b = 0.242089983 \cdot 10^{-3}$ ,  $c = 0.002966390254$ ,  $d = 0.2474138434$ ,  
 $cr_3 = -0.9070871583 \cdot 10^{-4}$ .

Таким образом, в задаче об устойчивости цилиндрической прецессии симметричного спутника-пластинки на эллиптической орбите для всех исследованных точек кратных резонансов четвертого порядка полученные в работе достаточные условия формальной устойчивости удовлетворяются.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19–11–00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куницын А.Л. Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 9. С. 1704–1706.  
<http://mi.mathnet.ru/de1373>
2. Хазина Г.Г. Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. № 1. С. 56–65.
3. Куницын А.Л., Медведев С.В. Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 3. С. 422–429.
4. Хазин Л.Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. № 3. С. 494–498.
5. Маркеев А.П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 3. С. 339–343. <http://mi.mathnet.ru/dan1234>
6. Маркеев А.П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.
7. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центр масс. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
8. Маркеев А.П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. Вып. 5. С. 388–394.
9. Маркеев А.П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 9. С. 701–708.
10. Холостова О.В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 477–504. <https://doi.org/10.20537/nd1704003>

11. Холостова О.В. О периодических движениях близкой к автономной системы в случаях двойного параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 175–201. <https://doi.org/10.1134/S0032823519020103>
12. Холостова О.В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 267–288. <https://doi.org/10.20537/nd1202005>
13. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671–683. <https://doi.org/10.20537/nd1504004>
14. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 73. P. 64–68. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005>
15. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
16. Сафонов А.И., Холостова О.В. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 3. С. 418–438. <https://doi.org/10.20537/vm160310>
17. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
18. Сафонов А.И., Холостова О.В. О периодических движениях симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в одном случае кратного комбинационного резонанса третьего и четвертого порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 373–394. <https://doi.org/10.20537/vm180308>
19. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
20. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
21. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // Communications of Pure and Applied Mathematics. 1964. Vol. 17. No. 4. P. 509–526.
22. Маркеев А.П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 530–539.
23. Холостова О.В. Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника в одном частном случае // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 3. С. 270–278.
24. Маркеев Л.П. Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 63–85.

Поступила в редакцию 10.06.2019

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра мехатроники и теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.

E-mail: [kholostova\\_o@mail.ru](mailto:kholostova_o@mail.ru)

*O. V. Kholostova*

**On multiple fourth-order resonances in a nonautonomous two-degree-of-freedom Hamiltonian system**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 275–294 (in Russian).

**Keywords:** Hamiltonian system, multiple fourth-order resonance, formal stability, satellite, cylindrical precession.

MSC2010: 70H08, 70H12, 70H14, 70H15, 70M20

DOI: [10.20537/vm190210](https://doi.org/10.20537/vm190210)

We consider the motion of a nonautonomous time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the vicinity of a trivial equilibrium being stable in the linear approximation. Fourth-order multiple (double or triple) resonance is assumed to be realized in the system. A list of all possible characteristic exponent sets corresponding to these resonant cases is given. Five qualitatively different approximate (model) Hamiltonian functions corresponding to these sets are obtained. For all cases of multiple resonances under study, sufficient conditions for the formal stability of the trivial equilibrium of the complete system are obtained, written as constraints on the coefficients of forms of the fourth degree in the normalized Hamiltonian functions of perturbed motion. A graphical interpretation of these conditions is given. The regions of formal stability are shown to be contained within the stability regions of each existing strong resonance considered separately, and the resonance coefficients corresponding to the weak resonances should take values from a limited range. Some questions of instability of the trivial equilibrium of the system in cases of multiple fourth-order resonances are considered. The found conditions of formal stability are examined at the points of multiple fourth-order resonances in the stability problem of cylindrical precession of a dynamically symmetric satellite-plate in the central Newtonian gravitational field on an elliptical orbit of arbitrary eccentricity.

**Funding.** This work supported by the Russian Science Foundation (project no. 19–11–00116) at Moscow Aviation Institute (National Research University).

#### REFERENCES

1. Kunitsyn A.L. The stability in the critical case of pure imaginary roots, with internal resonance, *Differ. Uravn.*, 1971, vol. 7, no. 9, pp. 1704–1706 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/de1373>
2. Khazina G.G. Certain stability questions in the presence of resonances, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1974, vol. 38, issue 1, pp. 43–51. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(74\)90087-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(74)90087-2)
3. Kunitsyn A.L., Medvedev S.V. On stability in the presence of several resonances, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 3, pp. 419–426. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(77\)90033-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90033-8)
4. Khazin L.G. Interaction of third-order resonances in problems of the stability of hamiltonian systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, vol. 48, issue 3, pp. 356–360. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(84\)90146-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90146-1)
5. Markeev A.P. On a multiple resonance in linear Hamiltonian systems, *Doklady Physics*, 2005, vol. 50, no. 5, pp. 278–282. <https://doi.org/10.1134/1.1941506>
6. Markeyev A.P. Multiple parametric resonance in Hamilton systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 2, pp. 176–194. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.06.001>
7. Markeev A.P. *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of satellite motion relative to the center of mass), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2009.
8. Markeev A.P. On one special case of parametric resonance in problems of celestial mechanics, *Astronomy Letters*, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 350–356. <https://doi.org/10.1134/1.1922534>

9. Markeev A.P. Multiple resonance in one problem of the stability of the motion of a satellite relative to the center of mass, *Astronomy Letters*, 2005, vol. 31, no. 9, pp. 627–633.  
<https://doi.org/10.1134/1.2039974>
10. Kholostova O.V. On periodic motions of a nonautonomous Hamiltonian system in one case of multiple parametric resonance, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 477–504 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1704003>
11. Kholostova O.V. On periodic motions of a near-autonomous system in the cases of a double parametric resonance, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 2019, vol. 83, no. 2, pp. 175–201 (in Russian).  
<https://doi.org/10.1134/S0032823519020103>
12. Kholostova O.V. Motions of a two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the presence of multiple third-order resonances, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 267–288 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1202005>
13. Kholostova O.V. The interaction of resonances of the third and fourth orders in a Hamiltonian two-degree-of-freedom system, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 671–683 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1504004>
14. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 73, pp. 64–68. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005>
15. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* (Problems of dynamics of rigid bodies with vibrating suspension), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2016.
16. Safonov A.I., Kholostova O.V. On the periodic motions of a Hamiltonian system in the neighborhood of unstable equilibrium in the presence of a double three-order resonance, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 418–438 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160310>
17. Kholostova O.V., Safonov A.I. On equilibrium positions bifurcations of Hamiltonian system in cases of double combined third order resonance, *Trudy Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2018, no. 100 (in Russian). <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
18. Safonov A.I., Kholostova O.V. On periodic motions of a symmetrical satellite in an orbit with small eccentricity in the case of multiple combinational resonance of the third and fourth orders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 373–394 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180308>
19. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978.
20. Malkin I.G. *Teoriya ustoichivosti dvizheniya* (Theory of stability of motion), Moscow: Nauka, 1966.
21. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems, *Communications of Pure and Applied Mathematics*, 1964, no. 4, pp. 509–526.
22. Markeev A.P. On the rotational motion of a dynamically symmetric satellite on elliptical orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, no. 4, pp. 530–539 (in Russian).
23. Kholostova O.V. A specific case of stability of cylindrical precession of a satellite, *Cosmic Research*, vol. 46, issue 3, pp. 264–272. <https://doi.org/10.1134/S0010952508030106>
24. Markeev A.P. Stability of planar rotations of a satellite in a circular orbit, *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 46–63.

Received 10.06.2019

Kholostova Ol'ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: [kholostova\\_o@mail.ru](mailto:kholostova_o@mail.ru)