

УДК 531.36, 531.53

© *А. П. Маркеев***О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ**

Рассматривается плоское движение твердого тела в однородном поле тяжести. Тело подвешено на невесомой нерастяжимой нити. Предполагается, что во все время движения тела нить остается натянутой. Изучены нелинейные периодические колебания тела в окрестности его устойчивого положения равновесия на вертикали. Эти движения рождаются из малых (линейных) нормальных колебаний тела. Вопрос о существовании таких движений решается при помощи теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле. Указан алгоритм построения этих движений при помощи метода канонических преобразований. Соответствующие решения представимы в виде рядов по малому параметру, характеризующему амплитуду порождающих нормальных колебаний. Дано строгое решение нелинейной задачи об орбитальной устойчивости построенных движений. Указаны возможные области параметрического резонанса (области неустойчивости), рассмотрены случаи резонансов третьего и четвертого порядков, а также нерезонансный случай. Исследование опирается на методы Ляпунова и Пуанкаре и КАМ-теорию.

*Ключевые слова:* периодические движения, система Гамильтона, резонанс, устойчивость.

DOI: [10.20537/vm190208](https://doi.org/10.20537/vm190208)

**Введение**

Рассмотрим твердое тело, подвешенное при помощи невесомой нерастяжимой нити длиной  $\ell$  в однородном поле тяжести. Вес тела равен  $mg$ . Тело движется так, что все его точки имеют скорости, параллельные фиксированной вертикальной плоскости  $OXY$ , проходящей через центр тяжести  $C$  тела и его точку подвеса  $A$  (рис. 1), причем во все время движения нить остается натянутой.

За обобщенные координаты примем угол  $\psi$ , который составляет отрезок  $AC$  с горизонтальной осью  $OY$ , и угол  $\theta$  между направлением нити  $OA$  и вертикалью  $OX$ . Существует устойчивое положение равновесия  $\psi = \pi/2$ ,  $\theta = 0$ , отвечающие висящему телу, когда его центр тяжести  $C$  и точка подвеса  $A$  все время находятся на вертикали, проходящей через точку  $O$ .

Целью статьи является исследование нелинейной задачи о плоских периодических движениях твердого тела, существование которых следует из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле [1]. Анализ проводится при помощи классических и современных методов и алгоритмов теории возмущений нелинейных динамических систем [2–8].

Задача о движении твердого тела на невесомой идеально гибкой нерастяжимой нити (струне) возникла из потребностей инженерной практики в середине прошлого века и к настоящему времени получила значительное развитие. Имеются десятки публикаций, содержащих изложение результатов теоретических и экспериментальных исследований этой задачи. Очень подробно изучен вопрос о существовании, устойчивости и бифуркациях стационарных и прецессионных движений тела. Изучалась динамика систем твердых тел с различными типами подвесов. Рассмотрен также случай, когда струна не является идеальной. Основные результаты этих исследований изложены в работах [9–11]. В статьях [12, 13] исследованы некоторые задачи динамики твердого тела, в которых нить рассматривается как идеальная неударивающая связь.

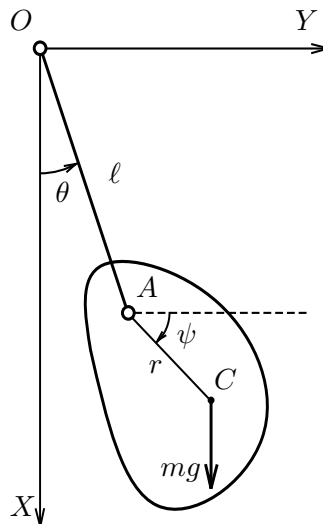


Рис. 1. Твердое тело, подвешенное на нити

### § 1. Уравнения движения

Уравнения движения можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода, задаваемых функцией Лагранжа  $L$  вида

$$L = \frac{1}{2} (a^2 + b) \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - a \sin(\psi + \theta) \dot{\psi} \dot{\theta} + \cos \theta + a \sin \psi, \quad (1.1)$$

где  $a$  и  $b$  — безразмерные параметры задачи:

$$a = \frac{r}{\ell}, \quad b = \left( \frac{\rho_c}{\ell} \right)^2. \quad (1.2)$$

Здесь  $r$  — расстояние  $AC$  от точки подвеса до центра тяжести тела, а  $\rho_c$  — радиус инерции тела для оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости  $OXY$ . Точкой в (1.1) обозначено дифференцирование по безразмерной независимой переменной  $t_* = \sqrt{g/l} t$ .

Для исследования движений, близких положению висящего тела, положим  $\psi = \pi/2 + x_1$ ,  $\theta = x_2$ . Тогда функцию (1.1) можно представить в виде сходящегося ряда по формам четных степеней относительно  $x_i, \dot{x}_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$L = L_2 + L_4 + \dots \quad (1.3)$$

Здесь многоточием обозначена совокупность членов ряда выше пятой степени, аддитивная постоянная отброшена, а формы  $L_2$  и  $L_4$  имеют вид:

$$L_2 = \frac{1}{2} (a^2 + b) \dot{x}_1^2 - a \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} (ax_1^2 + x_2^2), \quad (1.4)$$

$$L_4 = \frac{1}{2} a (x_1 + x_2)^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{24} ax_1^4 + \frac{1}{24} x_2^4.$$

## § 2. О нормальных координатах и нормальных колебаниях

Рассмотрим малые колебания тела в окрестности устойчивого положения равновесия  $x_1 = x_2 = 0$ . Они описываются линейными дифференциальными уравнениями с функцией Лагранжа (1.4). Частоты  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) малых колебаний будут положительными корнями уравнения

$$b\omega^4 - (a^2 + a + b)\omega^2 + a = 0,$$

из которого следует, что

$$\omega_1^2 = \frac{a^2 + a + b + \sqrt{(a^2 - a + b)^2 + 4a^3}}{2b}, \quad \omega_2^2 = \frac{a^2 + a + b - \sqrt{(a^2 - a + b)^2 + 4a^3}}{2b}.$$

Можно показать, что в области  $a > 0$ ,  $b > 0$  физически допустимых значений параметров (1.2) частоты удовлетворяют неравенству  $\omega_1 > 1 > \omega_2 > 0$ .

1. Для дальнейшего полезно отметить некоторые свойства семейства кривых

$$\omega_2 = \mu\omega_1, \quad (2.1)$$

зависящего от параметра  $\mu$  из интервала  $(0, 1)$ . В плоскости  $a, b$  график функции (2.1) при заданном значении  $\mu$  представляет собой петлеобразную кривую, состоящую из двух ветвей  $b = b_i(a, \mu)$  ( $i = 1, 2$ ):

$$b_1 = \frac{\mu^4 - 2a\mu^2 + 1 + (\mu^2 + 1)\sqrt{\mu^4 - 2(2a + 1)\mu^2 + 1}}{2\mu^2} \cdot a,$$

$$b_2 = \frac{\mu^4 - 2a\mu^2 + 1 - (\mu^2 + 1)\sqrt{\mu^4 - 2(2a + 1)\mu^2 + 1}}{2\mu^2} \cdot a.$$

В точке с координатами  $a = a_*$ ,  $b = b_*$ , где

$$a_* = \frac{(1 - \mu^2)^2}{4\mu^2}, \quad b_* = b_1(a_*, \mu) = b_2(a_*, \mu) = \frac{(1 - \mu^4)^2}{16\mu^4},$$

кривая (2.1) имеет вертикальную касательную. Наибольшее значение  $b$  на кривой (2.1) достигается на ее ветви  $b = b_1$  в точке с координатами

$$a = a_{**} = \frac{1}{32\mu^2} \left[ (3\mu^2 - 1)(\mu^2 - 3) + (\mu^2 + 1)\sqrt{9\mu^4 - 14\mu^2 + 9} \right], \quad b = b_{**} = b_1(a_{**}, \mu).$$

Вся кривая (2.1) целиком лежит в прямоугольнике  $(0 < a < a_*, 0 < b < b_{**})$ . Ветви  $b = b_1$  и  $b = b_2$  кривой исходят из точки  $a = 0$ ,  $b = 0$ , составляя с осью  $b = 0$  углы  $\arctg(1/\mu^2)$  и  $\arctg(\mu^2)$  соответственно. Кривая (2.1), отвечающая значению  $\mu = \mu'$  из интервала  $(0, 1)$  охватывает все другие кривые (2.1), для которых  $\mu' < \mu < 1$ . Многие кривые вида (2.1) будут рассмотрены далее при анализе нелинейных колебаний тела (рисунки 2, 3, 4, 5, 6).

2. Вместо переменных  $x_1, x_2$  введем нормальные координаты  $y_1, y_2$ . Соответствующую им замену переменных  $x_i, \dot{x}_i \rightarrow y_i, \dot{y}_i$  ( $i = 1, 2$ ) можно получить, следуя хорошо известному алгоритму [14], в таком виде:

$$x_i = u_{i1}y_1 + u_{i2}y_2, \quad \dot{x}_i = u_{i1}\dot{y}_1 + u_{i2}\dot{y}_2 \quad (i = 1, 2), \quad (2.2)$$

$$u_{1j} = \frac{1 - \omega_j^2}{\sqrt{a^2 + b(1 - \omega_j^2)^2}}, \quad u_{2j} = -\frac{a\omega_j^2}{\sqrt{a^2 + b(1 - \omega_j^2)^2}} \quad (j = 1, 2). \quad (2.3)$$

В нормальных координатах квадратичная часть (1.4) функции Лагранжа (1.3) записывается в виде суммы лагранжианов двух не связанных один с другим линейных осцилляторов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\dot{y}_i^2 - \omega_i^2 y_i^2).$$

Для первого нормального колебания, происходящего с частотой  $\omega_1$ , в исходных переменных  $x_1, x_2$  имеем выражение

$$x_1 = c_1 u_{11} \sin(\omega_1 t_* + \alpha_1), \quad x_2 = c_1 u_{21} \sin(\omega_1 t_* + \alpha_1), \quad (2.4)$$

а для второго — выражение

$$x_1 = c_2 u_{12} \sin(\omega_2 t_* + \alpha_2), \quad x_2 = c_2 u_{22} \sin(\omega_2 t_* + \alpha_2). \quad (2.5)$$

В (2.4) и (2.5) величины  $c_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные постоянные.

Далее в нелинейной задаче будут рассматриваться периодические движения, рождающиеся из первого и второго нормальных колебаний (2.4) и (2.5). Период этих движений близок к  $2\pi/\omega_1$  и  $2\pi/\omega_2$ . Их обычно называют соответственно короткопериодическими и долгопериодическими движениями Ляпунова.

### § 3. Функция Гамильтона

При нелинейном анализе будем использовать гамильтонову форму уравнений движения. Обобщенные импульсы  $Y_1, Y_2$  определяются равенствами  $Y_i = \partial L / \partial \dot{y}_i$  ( $i = 1, 2$ ), где  $L = L(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$  — функция (1.3), в которой сделана замена переменных (2.2). Обобщенные скорости  $\dot{y}_i$  выражаются через канонически сопряженные переменные  $y_1, y_2, Y_1, Y_2$  по формулам

$$\dot{y}_i = Y_i - \frac{\partial L_4(y_1, y_2, Y_1, Y_2)}{\partial Y_i} + \dots, \quad (3.1)$$

где многоточием обозначена совокупность членов выше четвертой степени относительно  $y_1, y_2, Y_1, Y_2$ . Функция Гамильтона определяется равенством

$$H = \sum_{i=1}^2 Y_i \dot{y}_i - L(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2),$$

в правой части которого величины  $\dot{y}_i$  заменены на их выражения (3.1). Если еще сделать каноническую унивалентную замену переменных  $y_i, Y_i \rightarrow q_i, p_i$  по формулам

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} q_i, \quad Y_i = \sqrt{\omega_i} p_i \quad (i = 1, 2), \quad (3.2)$$

то получим функцию Гамильтона  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ , представимую сходящимся рядом вида

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i (q_i^2 + p_i^2) + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 4} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} + \dots, \quad (3.3)$$

где многоточием обозначены члены ряда выше пятой степени.

Вычисления показывают, что из тридцати пяти коэффициентов  $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$  одночленов четвертой степени отличны от нуля только четырнадцать коэффициентов, причем

$$\begin{aligned} h_{4000} &= -\frac{au_{11}^4 + u_{21}^4}{24\omega_1^2}, & h_{3100} &= -\frac{u_{22}u_{21}^3 + au_{12}u_{11}^3}{6\omega_1^{3/2}\omega_2^{1/2}}, \\ h_{2200} &= -\frac{u_{22}^2u_{21}^2 + au_{12}^2u_{11}^2}{4\omega_1\omega_2}, & h_{2011} &= -\frac{a(u_{11} + u_{21})^2(u_{21}u_{12} + u_{22}u_{11})\omega_2^{1/2}}{2\omega_1^{1/2}}, \\ h_{2020} &= -\frac{1}{2}au_{11}u_{21}(u_{11} + u_{21})^2, & h_{2002} &= -\frac{au_{12}u_{22}(u_{11} + u_{21})^2\omega_2}{2\omega_1}, \\ h_{1300} &= -\frac{au_{12}^3u_{11} + u_{22}^3u_{21}}{6\omega_1^{1/2}\omega_2^{3/2}}, & h_{1120} &= -\frac{au_{11}u_{21}(u_{12} + u_{22})(u_{11} + u_{21})\omega_1^{1/2}}{\omega_2^{1/2}}, \\ h_{1111} &= -a(u_{12} + u_{22})(u_{11} + u_{21})(u_{21}u_{12} + u_{22}u_{11}), \\ h_{1102} &= -\frac{au_{12}u_{22}(u_{12} + u_{22})(u_{11} + u_{21})\omega_2^{1/2}}{\omega_1^{1/2}}, \\ h_{0400} &= -\frac{au_{12}^4 + u_{22}^4}{24\omega_2^2}, & h_{0220} &= -\frac{au_{11}u_{21}(u_{12} + u_{22})^2\omega_1}{2\omega_2}, \\ h_{0211} &= -\frac{a(u_{12} + u_{22})^2(u_{21}u_{12} + u_{22}u_{11})\omega_1^{1/2}}{2\omega_2^{1/2}}, & h_{0202} &= -\frac{1}{2}au_{12}u_{22}(u_{12} + u_{22})^2. \end{aligned}$$

#### § 4. Короткопериодические движения

В нелинейной задаче при построении решений, описывающих периодические движения тела, рождающиеся из его линейных колебаний (2.4) и (2.5), будет использоваться метод канонических преобразований. При помощи этого метода вместо переменных  $q_i, p_i$  вводятся новые переменные, в которых искомые решения записываются в наиболее простой форме. Анализ устойчивости периодических движений осуществляется методами Ляпунова и КАМ-теории.

##### 4.1. Невозмущенные короткопериодические движения

В системе с функцией Гамильтона (3.3) сделаем близкую к тождественной каноническую замену переменных  $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$  с помощью производящей функции  $S(q_1, q_2, P_1, P_2)$  вида

$$\begin{aligned} S &= q_1P_1 + q_2P_2 + \sum_{k=2}^{\infty} S_{2k}(q_1, q_2, P_1, P_2), \\ S_{2k} &= \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2k} s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Связь между старыми и новыми переменными задается соотношениями

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2).$$

Формы  $S_{2k}$  в (4.1) подберем таким образом, чтобы разложение новой функции Гамильтона  $G(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  в ряд не содержало членов, линейных относительно  $Q_2, P_2$ , а члены, зависящие только от  $Q_1, P_1$ , были максимально упрощены.

Искомое преобразование представимо рядами

$$q_i = Q_i - \frac{\partial S_4(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial P_i} + \dots, \quad p_i = P_i + \frac{\partial S_4(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial Q_i} + \dots, \quad (4.2)$$

которые являются сходящимися [3, 15].

Вычисления показывают, что в нашей задаче форма  $S_4$  является суммой шести одночленов (а не тридцати пяти, как это должно быть в общем случае). Соответствующие этим одночленам коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 s_{3010} &= \frac{5h_{4000} - h_{2020}}{8\omega_1}, & s_{3001} &= -\frac{\omega_2(7\omega_1^2 - \omega_2^2)h_{3100} + \omega_1(3\omega_1^2 - \omega_2^2)h_{2011} + 2\omega_1^2\omega_2h_{1120}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(9\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \\
 s_{2110} &= \frac{3\omega_1(3\omega_1^2 - \omega_2^2)h_{3100} + \omega_2(3\omega_1^2 - \omega_2^2)h_{2011} + 2\omega_1\omega_2^2h_{1120}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(9\omega_1^2 - \omega_2^2)}, & s_{1030} &= \frac{3h_{4000} + h_{2020}}{8\omega_1}, \\
 s_{1021} &= -\omega_2 \cdot \frac{6\omega_1^2h_{3100} + 2\omega_1\omega_2h_{2011} + (3\omega_1^2 - \omega_2^2)h_{1120}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(9\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \\
 s_{0130} &= -\frac{\omega_1}{\omega_2}s_{1021}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Новая функция Гамильтона представляется сходящимся рядом вида

$$G = G_2 + G_4 + \dots, \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i (Q_i^2 + P_i^2), \\
 G_4 &= \frac{1}{4}c_2 (Q_1^2 + P_1^2) + h_{2200}Q_1^2Q_2^2 + h_{2002}Q_1^2P_2^2 + h_{1300}Q_1Q_2^3 + h_{1111}Q_1Q_2P_1P_2 + \\
 &\quad + h_{1102}Q_1Q_2P_2^2 + h_{0400}Q_2^4 + h_{0220}Q_2^2P_1^2 + h_{0211}Q_2^2P_1P_2 + h_{0202}Q_2^2P_2^2, \\
 c_2 &= \frac{3}{2}h_{4000} + \frac{1}{2}h_{2020}.
 \end{aligned}$$

Уравнения движения, задаваемые функцией Гамильтона (4.4), допускают частное решение, отвечающее короткопериодическому движению тела:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \varepsilon \sin w_1, & P_1 &= \varepsilon \cos w_1, & Q_2 &= 0, & P_2 &= 0, \\
 w_1 &= w_1(t_*) = \Omega_1 t_* + w_1(0), & \Omega_1 &= \omega_1 + \varepsilon^2 c_2 + O(\varepsilon^4).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $w_1(0)$  — постоянные величины, причем  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

В исходных переменных короткопериодическое движение находится при помощи формул (2.2), (2.3), (3.1), (3.2) и (4.2), (4.3), задающих переход от переменных  $x_i, \dot{x}_i$  к переменным  $Q_i, P_i$ .

Если сделать каноническую замену переменных  $Q_1, Q_2, P_1, P_2 \rightarrow w_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  по формулам

$$Q_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\eta_1} \sin w_1, \quad P_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\eta_1} \cos w_1, \quad Q_2 = \xi_2, \quad P_2 = \eta_2 \tag{4.6}$$

и перейти к новой независимой переменной  $\tau = \Omega_1 t_*$ , то исследуемое короткопериодическое движение будет описываться равенствами

$$w_1 = \tau + w_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0. \tag{4.7}$$

#### 4.2. Функция Гамильтона возмущенного движения. Резонансы

1. Задача об орбитальной устойчивости движения (4.7) эквивалентна задаче о его устойчивости по отношению к возмущениям величин  $\eta_1, \xi_2, \eta_2$ . Сделав в функции Гамильтона (4.4) замену (4.6) и перейдя к независимой переменной  $\tau$ , можно получить функцию Гамильтона  $\Gamma$  возмущенного движения в виде ряда по степеням  $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$ . Отбросив несущественную постоянную, равную значению функции (4.4) на невозмущенном движении, получим

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots, \quad (4.8)$$

где  $\Gamma_k$  — форма степени  $k$  относительно  $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$ , причем

$$\Gamma_2 = \eta_1 + \varphi_2, \quad \Gamma_3 = \psi_1 \eta_1 + \varphi_3, \quad \Gamma_4 = \chi \eta_1^2 + \psi_2 \eta_1 + \varphi_4,$$

где  $\chi = \chi(w_1)$  —  $2\pi$ -периодическая функция от  $w_1$ , а  $\varphi_m, \psi_m$  — формы степени  $m$  относительно  $\xi_2, \eta_2$  с  $2\pi$ -периодическими по  $w_1$  коэффициентами. Пренебрегая членами выше четвертой степени относительно  $\varepsilon$ , получаем

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \lambda_0 (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \varepsilon^2 [(a_{20} + b_{20} \cos 2w_1) \xi_2^2 + b_{11} \sin 2w_1 \xi_2 \eta_2 + (a_{02} + b_{02} \cos 2w_1) \eta_2^2], \quad (4.9)$$

$$\lambda_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad a_{20} = -\frac{\lambda_0 c_2}{2\omega_1} + \frac{h_{2200} + h_{0220}}{2\omega_1}, \quad b_{20} = \frac{h_{0220} - h_{2200}}{2\omega_1}, \quad b_{11} = \frac{h_{1111}}{2\omega_1},$$

$$a_{02} = -\frac{\lambda_0 c_2}{2\omega_1} + \frac{h_{2002}}{2\omega_1}, \quad b_{02} = -\frac{h_{2002}}{2\omega_1},$$

$$\psi_1 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{\varepsilon}{\omega_1^2} (\omega_1 - \varepsilon^2 c_2) (h_{1300} \sin w_1 \xi_2^3 + h_{0211} \cos w_1 \xi_2^2 \eta_2 + h_{1102} \sin w_1 \xi_2 \eta_2^2),$$

$$\chi = \frac{c_2}{\omega_1^2} (\omega_1 - \varepsilon^2 c_2),$$

$$\psi_2 = \frac{(\omega_1 - \varepsilon^2 c_2)}{\omega_1^2} \{ [\lambda_0 c_2 + 2\omega_1 (a_{20} + b_{20} \cos 2w_1)] \xi_2^2 +$$

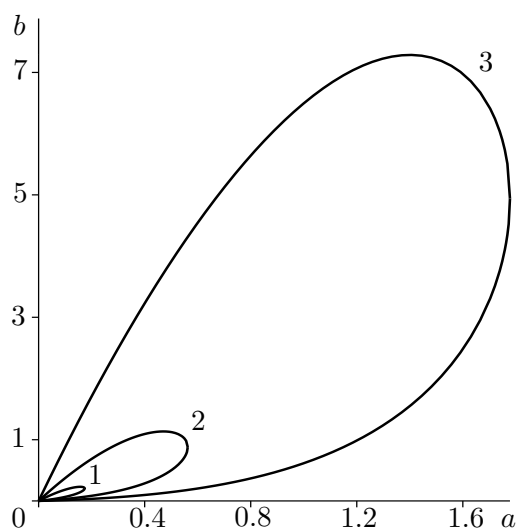
$$+ h_{1111} \sin 2w_1 \xi_2 \eta_2 + h_{2002} (1 - \cos 2w_1) \eta_2^2 \},$$

$$\varphi_4 = h_{0400} \xi_2^4 + h_{0202} \xi_2^2 \eta_2^2.$$

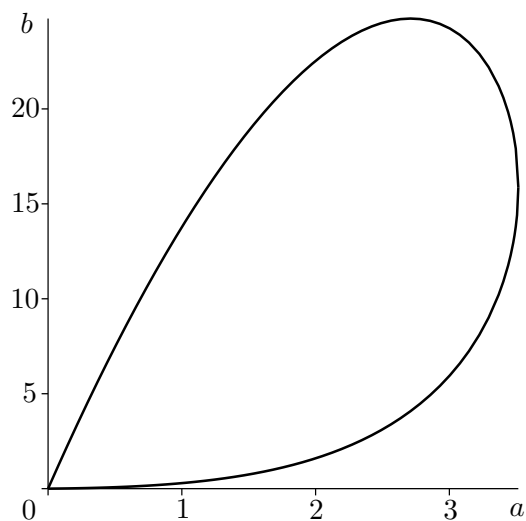
2. Функция Гамильтона (4.8) зависит от трех параметров  $a, b$  и  $\varepsilon$ . Если для целого числа  $k$  величина  $k\lambda_0$  также будет целым числом, то в системе при  $0 < \varepsilon \ll 1$  реализуется резонанс  $k$ -го порядка. Для задачи об устойчивости наиболее важны резонансы до четвертого порядка включительно ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Так как у нас  $0 < \lambda_0 = \omega_2/\omega_1 < 1$ , то таких резонансов будет только пять: один резонанс второго порядка  $2\lambda_0 = 1$ , два резонанса третьего порядка  $3\lambda_0 = 1, 3\lambda_0 = 2$  и два резонанса четвертого порядка  $4\lambda_0 = 1, 4\lambda_0 = 3$ . Соответствующие этим резонансам (порождающие) кривые показаны на рисунках 2, 3 и 4 в плоскости  $a, b$ . Общие свойства таких кривых описаны в § 2 (см. равенство (2.1), в котором следует положить  $\mu = \lambda_0$ ).

#### 4.3. Анализ линейной задачи. Нормализация функции $\Gamma_2$ из (4.8)

1. При малых, отличных от нуля значениях  $\varepsilon$ , в пространстве трех параметров  $a, b$  и  $\varepsilon$  возможна область неустойчивости (область параметрического резонанса), которая при  $\varepsilon = 0$  вырождается в кривую  $2\lambda_0 = 1$  в плоскости  $a, b$ . Но при учете в разложении функции  $\Gamma_2$  членов не выше третьей степени по  $\varepsilon$  область неустойчивости не обнаруживается. Это объясняется тем, что функция  $\varphi_2$  из (4.9) не содержит первую гармонику по переменной  $w_1$ .

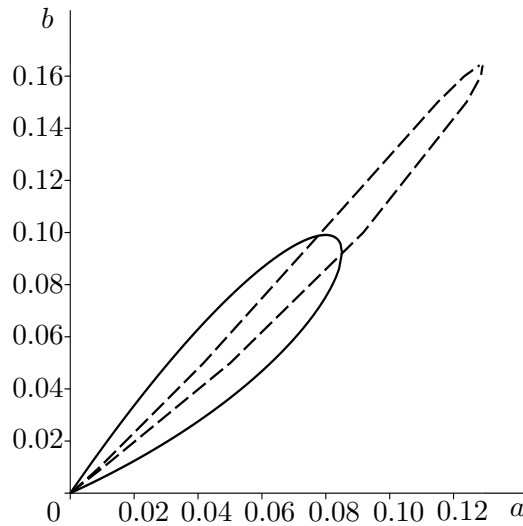


**Рис. 2.** Порождающие кривые для резонансов второго и третьего порядков:  
1)  $3\lambda_0 = 2$  ( $3\omega_2 = 2\omega_1$ ); 2)  $2\lambda_0 = 1$  ( $2\omega_2 = \omega_1$ ); 3)  $3\lambda_0 = 1$ , ( $3\omega_2 = \omega_1$ )



**Рис. 3.** Порождающая кривая для резонанса четвертого порядка  $4\lambda_0 = 1$  ( $4\omega_2 = \omega_1$ )





**Рис. 4.** Порождающая кривая для резонанса четвертого порядка  $4\lambda_0 = 3$  ( $4\omega_2 = 3\omega_1$ ) — сплошная линия и кривая вырождения  $D_0 = 0$  — штриховая линия

Если параметры  $a, b$  таковы, что  $2\lambda_0 \neq 1$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$  периодическое движение (4.7) орбитально устойчиво в первом (линейном) приближении.

2. Для строгого же решения задачи об устойчивости требуется нелинейный анализ. Предварительно целесообразно сделать в функции Гамильтона (4.8) каноническую замену переменных  $w_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow u_1, u_2, v_1, v_2$ , чтобы ее квадратичная часть  $\Gamma_2$  приняла нормальную форму.

Согласно работам [5, 8], эту замену переменных можно задать следующими равенствами:

$$w_1 = u_1, \quad \eta_1 = v_1 + \frac{1}{2}\lambda(u_2^2 + v_2^2) - \varphi_2(n_{11}u_2 + n_{12}v_2, n_{21}u_2 + n_{22}v_2),$$

$$\xi_2 = n_{11}u_2 + n_{12}v_2, \quad \eta_2 = n_{21}u_2 + n_{22}v_2,$$

в которых

$$n_{11} = 1 - \varepsilon^2 m_{11} + O(\varepsilon^4), \quad n_{12} = -\varepsilon^2 m_{12} + O(\varepsilon^4),$$

$$n_{21} = \varepsilon^2 m_{21} + O(\varepsilon^4), \quad n_{22} = 1 + \varepsilon^2 m_{22} + O(\varepsilon^4),$$

$$m_{11} = \frac{a_{20} - a_{02}}{2\lambda_0} + \frac{b_{11} - \lambda_0(b_{20} - b_{02})}{2(1 - \lambda_0^2)} \cos 2u_1, \quad m_{12} = \frac{\lambda_0^2(b_{20} + b_{02}) - \lambda_0 b_{11} - 2b_{02}}{2(1 - \lambda_0^2)} \sin 2u_1,$$

$$m_{21} = \frac{\lambda_0^2(b_{20} + b_{02}) + \lambda_0 b_{11} - 2b_{20}}{2(1 - \lambda_0^2)} \sin 2u_1, \quad m_{22} = m_{11},$$

а  $\lambda$  — постоянная величина,

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2(a_{20} + a_{02}) + O(\varepsilon^4). \tag{4.10}$$

В новых переменных функция Гамильтона (4.8) записывается в виде ряда

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \dots, \tag{4.11}$$

где  $F_k$  — форма степени  $k$  относительно  $|v_1|^{1/2}, u_2, v_2$  с  $2\pi$ -периодическими по  $u_1$  коэффициентами, причем

$$F_2 = v_1 + \frac{1}{2}\lambda (u_2^2 + v_2^2). \quad (4.12)$$

Для  $F_3$  имеем следующее выражение:

$$F_3 = \varepsilon \frac{1}{\omega_1} (h_{1300} \sin u_1 u_2^3 + h_{0211} \cos u_1 u_2^2 v_2 + h_{1102} \sin u_1 u_2 v_2^2) + O(\varepsilon^3). \quad (4.13)$$

Члены третьего и более высоких порядков относительно  $\varepsilon$  в (4.13) явно не выписываем из-за их громоздкости. Отметим только, что члены порядка  $\varepsilon^3$  содержат первую и третью гармоники  $u_1$ , но не содержат вторую гармонику.

Форма  $F_4$  из (4.11) имеет вид

$$F_4 = \frac{c_2}{\omega_1} v_1^2 + \frac{1}{\omega_1} \{ [\lambda_0 c_2 + 2\omega_1 (a_{20} + b_{20} \cos 2u_1)] v_2^2 + h_{1111} \sin 2u_1 u_2 v_2 + h_{2002} (1 - \cos 2u_1) u_2^2 \} v_1 + h_{0400} u_2^4 + h_{0202} u_2^2 v_2^2 + O(\varepsilon). \quad (4.14)$$

Явное выражение для величин  $O(\varepsilon)$  из (4.14) далее не потребуется. Отметим, что если в функции (4.14) пренебречь членами выше третьего порядка по  $\varepsilon$ , то она не будет содержать первую и третью гармоники  $u_1$ .

#### 4.4. Об устойчивости при резонансах третьего порядка

Из кривых  $3\lambda_0 = m$  ( $m = 1, 2$ ) (см. рис. 2) при малых  $\varepsilon$  исходят поверхности резонансов третьего порядка  $3\lambda = m$ , где  $\lambda$  — величина (4.10). Рассмотрим устойчивость периодического движения (4.7) для значений параметров  $a, b, \varepsilon$ , лежащих на этих поверхностях.

При помощи близкой к тождественной канонической замены переменных  $u_1, v_1, u_2, v_2 \rightarrow \theta_1, \rho_1, \nu_2, \mu_2$  функцию Гамильтона (4.11) можно привести к следующей нормальной форме:

$$K = \rho_1 + \lambda \rho_2 + \rho_2 \sqrt{\rho_2} [\alpha_{30} \sin(3\theta_2 - m\theta_1) + \beta_{30} \cos(3\theta_2 - m\theta_1)] + O_4. \quad (4.15)$$

Здесь  $\nu_2 = \sqrt{2\rho_2} \sin \theta_2$ ,  $\mu_2 = \sqrt{2\rho_2} \cos \theta_2$ ,  $O_4$  — члены выше третьей степени относительно  $|\rho_1|^{1/2}, \nu_2, \mu_2$ , а  $\alpha_{30}, \beta_{30}$  — постоянные коэффициенты. Если хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля, то имеет место неустойчивость [8].

Вычисления показывают, что если пренебречь членами порядка  $\varepsilon^4$  и выше, то при резонансе  $3\lambda = 2$  оба коэффициента  $\alpha_{30}$  и  $\beta_{30}$  будут равны нулю. Это объясняется тем, что функция (4.13) не содержит второй гармоники от  $u_1$  в членах до третьей степени включительно относительно  $\varepsilon$ . Скорее всего, при резонансе  $3\lambda = 2$  неустойчивость будет, но она может проявиться при учете в функции Гамильтона возмущенного движения членов выше третьей степени относительно  $\varepsilon$ .

На резонансной поверхности  $3\lambda = 1$  получаем, что  $\alpha_{30} = O(\varepsilon^4)$ , а  $\beta_{30} = \varepsilon \beta_{30}^{(1)} + O(\varepsilon^3)$ , где

$$\beta_{30}^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{4\omega_1} (h_{1300} - h_{1102} + h_{0211}).$$

Расчеты показали, что на кривой  $3\lambda_0 = 1$  величина  $\beta_{30}^{(1)}$  отрицательна: ее максимальное значение на этой кривой равняется  $-0.000215$  и достигается в точке с координатами  $a = 1.695$ ,  $b = 6.474$ . Следовательно, при достаточно малых  $\varepsilon$  коэффициент  $\beta_{30}$  отличен от нуля, и при резонансе  $3\lambda = 1$  исследуемое периодическое движение неустойчиво.

**4.5. Об устойчивости при резонансах четвертого порядка и в нерезонансном случае**

Если параметры  $a, b, \varepsilon$  таковы, что  $2\lambda_0 \neq 1$ ,  $3\lambda_0 \neq 1$ ,  $3\lambda_0 \neq 2$ , но при этом реализуется один из возможных резонансов четвертого порядка  $4\lambda = m$ , ( $m = 1, 3$ ), то функция Гамильтона (4.11) приводится к нормальной форме вида

$$K = \rho_1 + \lambda\rho_2 + c_{20}\rho_1^2 + c_{11}\rho_1\rho_2 + c_{02}\rho_2^2 + \rho_2^2 [\alpha_{40} \sin(4\theta_2 - m\theta_1) + \beta_{40} \cos(4\theta_2 - m\theta_1)] + O_5, \quad (4.16)$$

где  $O_5$  — совокупность членов выше четвертой степени относительно  $|\rho_1|^{1/2}, \nu_2, \mu_2$ , а  $c_{ij}, \alpha_{40}, \beta_{40}$  — постоянные коэффициенты. Вычисления по алгоритму статьи [8] показывают, что  $\alpha_{40} = O(\varepsilon^4)$ ,  $\beta_{40} = O(\varepsilon^4)$ , а

$$c_{20} = \frac{c_2}{\omega_1} + O(\varepsilon^2), \quad c_{11} = \frac{h_{2200} + h_{2002} + h_{0220}}{\omega_1} + O(\varepsilon^2), \quad c_{02} = \frac{3}{2}h_{0400} + \frac{1}{2}h_{0202} + O(\varepsilon^2).$$

1. В нерезонансном случае (когда параметры не лежат в области параметрического резонанса, исходящей из кривой  $2\lambda_0 = 1$ , или на ее границах, и нет резонансов  $3\lambda = 1$ ,  $3\lambda = 2$ ,  $4\lambda = 1$ ,  $4\lambda = 3$ ) коэффициенты  $\alpha_{40}$  и  $\beta_{40}$  равны нулю тождественно, и нормальной формой функции Гамильтона будет функция (4.16), в которой  $\alpha_{40} = \beta_{40} = 0$ . Положим

$$D = c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02}. \quad (4.17)$$

Условие  $D \neq 0$  изоэнергетической невырожденности функции  $K$  является достаточным условием для устойчивости [2, 3].

Кривая  $D_0 = 0$  ( $D_0$  — это вычисленная в предельном случае  $\varepsilon = 0$  функция (4.17)) показана на рис. 4 штриховой линией. В части плоскости  $a, b$ , лежащей внутри (вне) кривой  $D_0 = 0$  функция  $D_0$  положительна (отрицательна).

2. При наличии резонанса четвертого порядка  $4\lambda = m$  величина  $\alpha_{40}^2 + \beta_{40}^2$ , вообще, отлична от нуля. Здесь достаточным условием устойчивости является [8] выполнение неравенства  $D > \sqrt{\alpha_{40}^2 + \beta_{40}^2}$ . Так как  $\alpha_{40}^2 + \beta_{40}^2 \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то условие устойчивости при достаточно малых  $\varepsilon$  выполнено для почти всех значений параметров  $a, b$ , отвечающих резонансам  $4\lambda = 1$  и  $4\lambda = 3$ . Исключение составляют только две точки (0.0850, 0.0911) и (0.0776, 0.0988) пересечения кривой  $D_0 = 0$  и кривой  $4\lambda_0 = 3$  (рис. 4).

**4.6. Результаты анализа устойчивости короткопериодических движений**

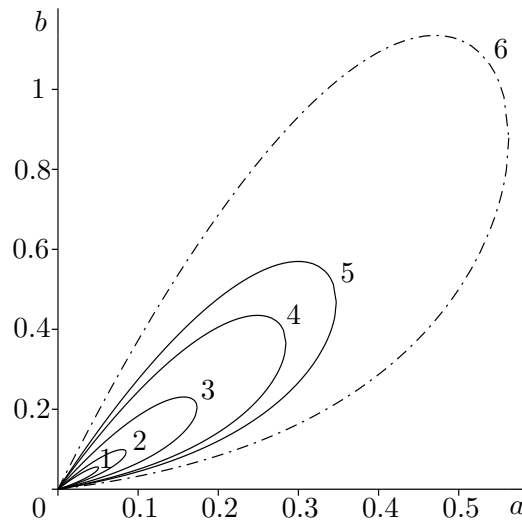
Из проведенного выше анализа следует, что если параметры  $a, b$  не лежат на кривых  $2\lambda_0 = 1$ ,  $3\lambda_0 = 1$ ,  $3\lambda_0 = 2$  и  $D_0 = 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$  исследуемые короткопериодические движения тела орбитально устойчивы.

При резонансе  $3\lambda = 1$  имеет место неустойчивость, если величина  $\varepsilon$  достаточно мала.

Строгое решение вопроса об устойчивости вблизи резонансных кривых  $2\lambda_0 = 1$ ,  $3\lambda_0 = 2$  и вблизи лежащей на поверхности  $4\lambda = 3$  кривой пересечения поверхностей  $4\lambda = 3$  и  $D = 0$  требует учета в разложении функции Гамильтона (4.8) членов выше третьей степени относительно  $\varepsilon$ .

**§ 5. Долгопериодические движения**

Пусть величина  $\sigma_0 = \omega_1/\omega_2$  отлична от целого числа. Тогда, согласно теореме Ляпунова о голоморфном интеграле [1], существует семейство долгопериодических движений с периодом, близким  $2\pi/\omega_2$ . Анализ этих движений совершенно аналогичен исследованию короткопериодических движений, проведенному в предыдущем параграфе. Поэтому, совсем не останавливаясь на деталях, кратко опишем полученные результаты.



**Рис. 5.** Порождающие резонансные кривые в случае долгопериодических движений: 1)  $4\sigma_0 = 5$  ( $4\omega_1 = 5\omega_2$ ); 2)  $3\sigma_0 = 4$  ( $3\omega_1 = 4\omega_2$ ); 3)  $2\sigma_0 = 3$  ( $2\omega_1 = 3\omega_2$ ); 4)  $3\sigma_0 = 5$  ( $3\omega_1 = 5\omega_2$ ); 5)  $4\sigma_0 = 7$  ( $4\omega_1 = 7\omega_2$ ); 6)  $\sigma_0 = 2$  ( $\omega_1 = 2\omega_2$ )

Долгопериодические движения (как и короткопериодические) могут быть представлены сходящимися рядами по малому параметру  $\varepsilon$ . Соответствующие им решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходят в нормальные колебания (2.5). Частота долгопериодических движений определяется равенствами

$$\Omega_2 = \omega_2 + \varepsilon^2 c_2 + O(\varepsilon^4), \quad c_2 = \frac{3}{2}h_{0400} + \frac{1}{2}h_{0202}.$$

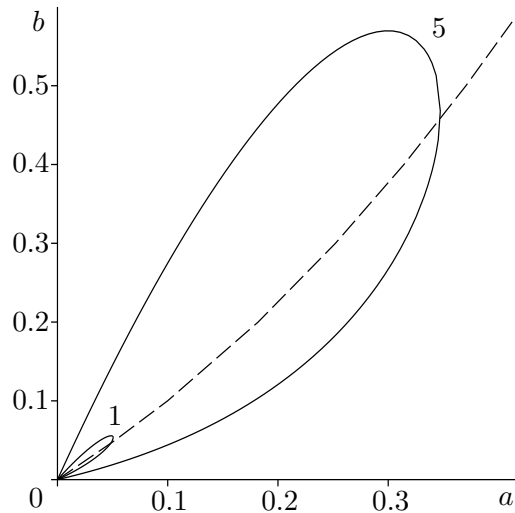
Нормализованная квадратичная часть функции Гамильтона возмущенного движения определяется равенством (4.12), в котором величина  $\lambda$  должна быть заменена на величину  $\sigma$ , вычисляемую по формуле

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon^2 \frac{h_{2200} + h_{2002} + h_{0220} - 2\sigma_0 c_2}{2\omega_2} + O(\varepsilon^4).$$

В пространстве параметров  $a, b, \varepsilon$  возможна неустойчивость в счетном множестве областей параметрического резонанса. При  $\varepsilon = 0$  эти области переходят в порождающие кривые  $2\sigma_0 = 2n - 1$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) в плоскости  $a, b$ , отвечающие полужелым значениям  $\sigma_0$ ; одна из таких кривых показана на рис. 5. Если точка  $(a, b)$  не попадает ни на одну из порождающих кривых, то в этой точке при достаточно малых  $\varepsilon$  имеет место устойчивость в первом (линейном) приближении.

Множества резонансов третьего и четвертого порядков также счетны. Они реализуются на поверхностях  $3\sigma = m$  ( $m = 4, 5, 7, 8, \dots$ ) и  $4\sigma = m$  ( $m = 5, 7, 9, 11, \dots$ ). На рис. 5 показаны две порождающих кривых для резонансов третьего порядка ( $3\sigma_0 = 4$  и  $3\sigma_0 = 5$ ) и две порождающих кривых для резонансов четвертого порядка ( $4\sigma_0 = 5$  и  $4\sigma_0 = 7$ ). На том же рисунке штрихпунктиром показана кривая  $\sigma_0 = 2$  — первая из нерассматриваемого счетного множества кривых, для которых  $\sigma_0$  — целое число.

Вычисления показали, что ни одна из областей параметрического резонанса не обнаруживается, если в функции Гамильтона возмущенного движения учитываются члены не выше третьей степени по  $\varepsilon$ . То же самое относится и к резонансам третьего и четвертого



**Рис. 6.** Кривая вырождения  $D_0 = 0$  (штриховая линия) и кривые  $4\sigma_0 = 5$  и  $4\sigma_0 = 7$ .

порядков: оказалось, что величины  $\alpha_{30}, \beta_{30}$  и  $\alpha_{40}, \beta_{40}$  в нормальных формах (4.15) и (4.16) могут отличаться от нуля только в членах выше третьей степени относительно  $\varepsilon$ .

Если параметры  $a, b, \varepsilon$  лежат вне областей параметрического резонанса и не попадают на поверхности резонансов третьего и четвертого порядков, то нормальная форма функции Гамильтона возмущенного движения записывается в виде

$$K = \rho_1 + \sigma \rho_2 + c_{20} \rho_1^2 + c_{11} \rho_1 \rho_2 + c_{02} \rho_2^2 + O_5,$$

где

$$c_{20} = \frac{c_2}{\omega_2} + O(\varepsilon^2), \quad c_{02} = \frac{3}{2} h_{4000} + \frac{1}{2} h_{2020} + O(\varepsilon^2),$$

$$c_{11} = \frac{1}{\omega_2} (h_{2200} + h_{2002} + h_{0220}) + O(\varepsilon^2).$$

Условие изоэнергетической невырожденности записывается в виде неравенства  $D \neq 0$ , где  $D = c_{20} \sigma^2 - c_{11} \sigma + c_{02}$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  поверхность  $D = 0$  стремится к кривой  $D_0 = 0$  в плоскости  $a, b$ . Участок этой кривой показан на рис. 6 штриховой линией. На том же рисунке показаны порождающие кривые  $4\sigma_0 = 5$  и  $4\sigma_0 = 7$  двух резонансов четвертого порядка. Кривая  $D_0 = 0$  пересекается с ними в точках  $(0.0482, 0.0460)$  и  $(0.3471, 0.4573)$  соответственно.

Общий вывод из анализа устойчивости долгопериодических движений таков. Если параметры  $a, b, \varepsilon$  не принадлежат счетному множеству областей параметрического резонанса и их границам и лежат вне счетного множества поверхностей резонансов третьего и четвертого порядков и вне поверхности  $D = 0$  изоэнергетического вырождения, то долгопериодические движения тела орбитально устойчивы.

Для строгого решения задачи об устойчивости при наличии резонансов до четвертого порядка включительно и вблизи кривых пересечения поверхностей резонансов четвертого порядка с поверхностью  $D = 0$  требуется учет в функции Гамильтона членов четвертой и более высоких степеней  $\varepsilon$ .

**Финансирование.** Исследование выполнено по теме государственного задания (номер регистрации АААА–А17–117021310382–5) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–01–00123) в Институте проблем

механики им. А. Ю. Ишлинского РАН и Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
3. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.
6. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
8. Маркеев А.П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 929–938.
9. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
10. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Динамика быстровращающихся на струне тел и некоторые смежные вопросы (обзор) // Прикладная механика. 1994. Т. 30. № 8. С. 3–30.
11. Мирер С.А., Сарычев В.А. О стационарных движениях тела на струнном подвесе // Нелинейная механика: сб. статей. М.: Физматлит, 2001. С. 281–322.
12. Иванов А.П. Об устойчивости перманентных вращений тела, подвешенного на струне, при наличии ударных взаимодействий // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 6. С. 47–50.
13. Маркеев А.П. Об устойчивости периодического движения стержня, подвешенного на идеальной нити // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 4. С. 3–13.
14. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
15. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Иностранная литература, 1959. 300 с.

Поступила в редакцию 22.05.2019

Маркеев Анатолий Павлович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, лаборатория механики систем, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101/1;

ведущий научный сотрудник, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4; E-mail: [anat-markeev@mail.ru](mailto:anat-markeev@mail.ru)

*A. P. Markeev*

**On periodic motions of a rigid body suspended on a thread in a uniform gravity field**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 245–260 (in Russian).

**Keywords:** periodic motions, Hamiltonian system, resonance, stability.

MSC2010: 70E20, 70H14, 70K28

DOI: [10.20537/vm190208](https://doi.org/10.20537/vm190208)

The planar motion of a rigid body in a uniform gravity field is considered. The body is suspended on a weightless inextensible thread. The thread is assumed to remain taut during the motion of the body. Nonlinear periodic oscillations of the body in the vicinity of its stable equilibrium position on the vertical are studied. These motions are generated by small (linear) normal body vibrations. The question of the existence of such motions is solved with the Lyapunov theorem on a holomorphic integral. An algorithm for constructing these motions using the canonical transformation method is proposed. The corresponding solutions are represented in the form of series in a small parameter characterizing the amplitude of the generating normal oscillations. A rigorous solution is given to the nonlinear problem of orbital stability of the motions obtained. Possible regions of parametric resonance (instability regions) are indicated. The third and fourth order resonance cases, as well as a nonresonant case, are considered. The study is based on the Lyapunov and Poincaré methods and KAM-theory.

**Funding.** The study was performed on the state task (registration no. AAAA–A17–117021310382–5), was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17–01–00123) at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science and at the Moscow Aviation Institute (National Research University).

## REFERENCES

1. Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebaniy* (Some problems of the theory of nonlinear oscillations), Moscow: Gostekhizdat, 1956, 491 p.
2. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9>
3. Mozer J.K. *Lectures on Hamiltonian systems*, Memoirs of the American Mathematical Society, New York: Courant Inst. Math. Sc., 1968, no. 81, pp. 1–60.
4. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
5. Markeev A.P. *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems on the stability of the motion of the satellite relative to the center of mass), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2009.
6. Giacaglia G.E.O. *Perturbation methods in non-linear systems*, New York: Springer, 1972. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6400-2>
7. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* (Theory of stability of motion), Moscow: Nauka, 1966, 530 p.
8. Markeyev A.P. An algorithm for normalizing Hamiltonian systems in the problem of the orbital stability of periodic motions, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 6, pp. 889–896. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)00131-4](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00131-4)
9. Ishlinky A.Yu., Storozhenko V.A., Temchenko M.E. *Vrashchenie tverdogo tela na strune i smezhnye zadachi* (Rotation of a rigid body on a string and adjacent problems), Moscow: Nauka, 1991, 330 p.
10. Ishlinky A.Yu., Storozhenko V.A., Temchenko M.E. Dynamics of rigid bodies rotating rapidly on a string and related topics (survey), *International Applied Mechanics*, 1994, vol. 30, issue 8, pp. 557–581. <https://doi.org/10.1007/BF00847228>
11. Mirer S.A., Sarychev V.A. On stationary motions of a body on a string suspension, *Nelineinaya mekhanika: sbornik statei* (Non-linear mechanics: Transactions), Moscow: Fizmatlit, 2001, pp. 281–322 (in Russian).
12. Ivanov A.P. On the stability of permanent rotations of a body suspended on a string in the presence of shock interactions, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1985, no. 6, pp. 47–50 (in Russian).

13. Markeev A.P. Stability of a periodic motion of a rod suspended by an ideal thread, *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 497–506. <https://doi.org/10.3103/S0025654407040012>
14. Gantmacher F.R. *Lectures in analytical mechanics*, Moscow: Mir, 1975, 265 p.
15. Siegel C.L. *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1956.

Received 22.05.2019

Markeev Anatolii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Laboratory of Mechanics of Systems, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Science, pr. Vernadskogo, 101/1, Moscow, 119526, Russia;

Leading Researcher, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125080, Russia;

E-mail: [anat-markeev@mail.ru](mailto:anat-markeev@mail.ru)