ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 2

УДК 517.927.25

© *А. А. Сарсенби, Б. Х. Турметов*

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В настоящей работе мы изучаем спектральную задачу для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с краевыми условиями типа Дирихле. Построена функция Грина изучаемой краевой задачи. Получены равномерные оценки функций Грина рассматриваемых краевых задач. Установлена равносходимость разложений произвольной функции из класса $L_1(-1,1)$ по собственным функциям двух дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями типа Дирихле. Мы используем интегральный метод, основанный на функции Грина дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и со спектральным параметром. Как следствие из доказанной теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям, мы доказываем базисность в пространстве $L_2(-1,1)$ собственных функций спектральной задачи с непрерывным комплекснозначным коэффициентом $q(x)$.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с инволюцией, функция Грина, разложения по собственным функциям, базис.

DOI: 10.20537/vm190204

Вопросам сходимости разложений по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов посвящено много работ (см., например, E. Ch. Titchmarsh [1], M. A. Naimark [2], E. A. Coddington, N. Levinson [3]), в которых рассматривались дифференциальные операторы с конкретными краевыми условиями. Другой метод исследования вопросов сходимости разложений по корневым векторам несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов был предложен В. А. Ильиным, в основе которого лежит отказ от конкретного вида краевых условий. Обзор по этой тематике можно найти в работе [4]. В работах [5, 6] вопросы равносходимости разложений по собственным функциям несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов изучались с помощью спектрального метода В. А. Ильина. Результаты по теории базисности корневых векторов одномерных дифференциальных операторов находят применения в различных вопросах теории уравнений с частными производными. В качестве одной из самих последних работ можно указать работу [7].

Вопросы сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов с инволюцией мало изучены. Такие вопросы в случае дифференциального оператора первого порядка с инволюцией затрагивались в работах [8–10]. Модельные дифференциальные операторы второго порядка с инволюцией рассмотрены в работах [11–14]. В работах [15, 16] построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, имеющий бесконечное число присоединенных функций и доказана базисность собственных и присоединенных функции. Монографии [17, 18], посвящены теории дифференциальных уравнений с инволюцией.

Исследованию свойств функции Грина краевых задач для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией посвящена работа [19]. В работах [11, 14] исследована спектральная задача

$$-u''(-x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \tag{0.1}$$
$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{0.2}$$

Было установлено, что система собственных функций вида

$$\left\{\sin k\pi x,\ k = 1,\, 2,\, \ldots, \quad \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\pi x, \quad l = 0,\, 1,\, 2, \ldots\right\}$$

образует ортонормированный базис пространства $L_2\,(-1,\, 1)$. В связи с этим естественно возникает вопрос об устойчивости базисных свойств собственных функций спектральной задачи

$$-\,u''(-x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{0.3}$$

с непрерывным комплекснозначным коэффициентом $q\,(x)$, то есть будет ли базисом в пространстве $L_2(-1, 1)$ система собственных функций этой спектральной задачи?

В настоящей работе построена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и со спектральным параметром. С помощью оценки функции Грина доказана теорема о равносходимости и базисности собственных функций спектральной задачи (0.3). Отметим, что наличие функции Грина и равномерной оценки функции Грина позволяют свести краевую задачу (0.3) к задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения [2]. Поэтому к рассматриваемой краевой задаче можно применить результаты теории интегральных уравнений о бесконечности числа собственных значений и собственных функций (см., например, [2, с. 44]). Теоремы 1 и 2 снимают вопрос о существовании бесконечного числа собственных значений и собственных функций краевой задачи (0.3). Основными результатами работы являются Теоремы 3 и 4.

§ 1. Функция Грина краевой задачи с инволюцией

Хорошо известно, что при изучении краевых задач важное значение имеет функция Грина. Поэтому нас интересует функция Грина краевой задачи (0.1), (0.2). Рассмотрим краевую задачу

$$-\,u''(-x) = \lambda u(x) + f(x), \quad -1 < x < 1, \quad u(-1) = 0, \;\; u(1) = 0, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция. Заметим, что уравнение (1.1) содержит инволюцию. Соответствующей однородной краевой задачей называем задачу (0.1), (0.2). Функции

$$u_1(x) = e^{\rho x} - e^{-\rho x}, \qquad u_2(x) = e^{i\rho x} + e^{-i\rho x}, \quad \rho = \sqrt{\lambda},$$

являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (0.1).

Функцией Грина краевой задачи (0.1)–(0.2) назовем такую функцию $G(x, t, \lambda)$, что функция

$$u(x) = \int_{-1}^{1} G(x, t, \lambda) f(t)\, dt$$

является решением краевой задачи (1.1).

Теорема 1. *Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи (0.1)–(0.2), то краевая задача (1.1) разрешима для любой непрерывной функции $f\,(x)$ и ее решение* *представимо в виде*

$$\begin{aligned}
u(x) = \frac{1}{8\rho}\Bigg\{ & \frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\int_{-1}^{1}\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)f(t)\,dt - \\
& - i\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{e^{i\rho}+e^{-i\rho}}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\int_{-1}^{1}\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)f(t)\,dt + \\
& + \int_{-1}^{-x}\left[-i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\right]f(t)\,dt + \\
& + \int_{-x}^{x}\left[i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\right]f(t)\,dt + \\
& + \int_{x}^{1}\left[i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\right]f(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Из теоремы вытекает важное

Следствие 1. *Функция Грина краевой задачи* (0.1)–(0.2) *имеет вид*

$$\begin{aligned}
G(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\Bigg\{ & \frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right) - \\
& - i\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{e^{i\rho}+e^{-i\rho}}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\Bigg\} + g(x,t,\lambda),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$g(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\begin{cases} -i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), & t \leqslant -x, \\ i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right), & -x \leqslant t \leqslant x, \\ i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), & t \geqslant x. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Для сокращения записи обозначим

$$u_3(x) = e^{\rho x}+e^{-\rho x},$$
$$u_4(x) = e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}.$$

Тогда формулу (1.2) можно переписать виде

$$\begin{aligned}
u(x) = \frac{1}{8\rho}\Bigg\{ & \frac{u_3(1)}{u_1(1)}u_1(x)\int_{-1}^{1}u_1(t)f(t)\,dt - i\frac{u_4(1)}{u_2(1)}u_2(x)\int_{-1}^{1}u_2(t)f(t)\,dt + \\
& + \int_{-1}^{-x}\left[-iu_2(x)u_4(t)+u_1(x)u_3(t)\right]f(t)\,dt + \\
& + \int_{-x}^{x}\left[iu_2(t)u_4(x)-u_1(t)u_3(x)\right]f(t)\,dt + \\
& + \int_{x}^{1}\left[iu_2(x)u_4(t)-u_1(x)u_3(t)\right]f(t)\,dt\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Функция $u(-x)$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
u(-x) = \frac{1}{8\rho}\Bigg\{ & \frac{u_3(1)}{u_1(1)}u_1(-x)\int_{-1}^{1}u_1(t)f(t)\,dt - i\frac{u_4(1)}{u_2(1)}u_2(-x)\int_{-1}^{1}u_2(t)f(t)\,dt + \\
& + \int_{-1}^{-x}\left[-iu_2(-x)u_4(t)+u_1(-x)u_3(t)\right]f(t)\,dt +
\end{aligned}$$

$$+\int_{-x}^{x}\left[-iu_2(t)u_4(-x)+u_1(t)u_3(-x)\right]f(t)\,dt+$$

$$\left.+\int_{x}^{1}\left[iu_2(-x)u_4(t)-u_1(-x)u_3(t)\right]f(t)\,dt\right\}.$$

Легко проверить справедливость следующих равенств

$$u_2(x)u_4'(x)-u_2'(x)u_4(x)=i\rho\left[\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)^2-\left(e^{i\rho x}-e^{-\rho x}\right)^2\right]=4i\rho,$$

$$u_1(x)u_3'(x)-u_1'(x)u_3(x)=\rho\left[\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)^2-\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right)^2\right]=-4\rho,$$

$$u_1''(x)=-\lambda u_1(-x),\quad u_2''(x)=-\lambda u_2(-x),$$

$$u_3''(x)=\lambda u_3(-x),\quad u_4''(x)=\lambda u_4\left(-x\right).$$

Так как функции $u_2(x)$, $u_3(x)$ являются четными, а функции $u_1(x)$, $u_4(x)$ — нечетными, то вычисляя $u''(x)$ можно убедиться в справедливости равенства

$$u''(x)=-\lambda u(-x)-f(-x),$$

которая получается из уравнения (1.1) путем замены переменной x на $-x$. Это значит, что функция (1.2) удовлетворяет уравнению (1.1). Непосредственно проверяется, что $u\left(-1\right)=0,\ u\left(1\right)=0$. Теорема 1 доказана. □

Функция Грина (1.3) выписывается из равенства (1.2).

§ 2. Разложение по собственным функциям спектральной задачи (0.1), (0.2)

Одним из основных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов является вопрос о сходимости разложений произвольной функции из некоторого класса по собственным функциям спектральной задачи. С помощью функции Грина (1.3) можно написать разложение произвольной функции из класса $L_1(-1,1)$ по собственным функциям спектральной задачи (0.1)–(0.2). Полюсами функции Грина (1.3) служат нули функций $e^{\rho}-e^{-\rho}$ и $e^{i\rho}+e^{-i\rho}$:

$$e^{\rho}-e^{-\rho}=0\quad\Longrightarrow\quad\rho_{k1}=k\pi i,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$e^{i\rho}+e^{-i\rho}=0\quad\Longrightarrow\quad\rho_{k2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Случай $\rho=0$ исключается. В комплексной $\rho=\sqrt{\lambda}$ плоскости рассмотрим окружности

$$P_{k1}:=\left\{|\rho|=k\pi+\frac{1}{4},\ k=1,2,3,\ldots\right\},\qquad P_{k2}:=\left\{|\rho|=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{4},\ k=0,1,2,\ldots\right\}$$

с общим центром в начале координат. Эти окружности не пересекаются и не проходят через точки ρ_{k1} и ρ_{k2}. При $\lambda=\rho^2$ окружности P_{k1}, P_{k2} соответственно переходят в окружности $\widetilde{P}_{k1}$, $\widetilde{P}_{k2}$ в λ плоскости:

$$P_{k1}=\left\{|\rho|^2=\left(k\pi+\frac{1}{4}\right)^2\right\};\quad P_{k2}=\left\{|\rho|^2=\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{4}\right)^2\right\}.$$

Для любой функции $f(x) \in L_1(-1,1)$ частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (0.1), (0.2) можно записать в виде (см., например [1,3])

$$\sigma_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{P}_m}\left(\int_{-1}^{1} G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right)d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{P_m}\left(\int_{-1}^{1} G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right)2\rho\,d\rho.$$

Далее меняем порядок интегрирования и для вычисления интеграла по окружности P_m используем теорему о вычетах:

$$\sigma_m\left(f\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{P_m} G(x,t,\lambda)2\rho\,d\rho\right]f(t)\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[2\pi i\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{8\rho_{k1}}\frac{e^{k\pi i}+e^{-k\pi i}}{e^{k\pi i}-e^{-k\pi i}}\left(e^{k\pi i x}-e^{-k\pi i x}\right)\left(e^{k\pi i t}-e^{-k\pi i t}\right)2\rho_{k1} + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{m} -\frac{i2\rho_{k2}}{8\rho_{k2}}\frac{e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}-e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}}{e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}+e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}}\right)\times$$
$$\left.\times\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}+e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}\right)\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t}+e^{-i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t}\right)\right]f(t)\,dt =$$
$$= -\int_{-1}^{1}\left[-\sum_{k=1}^{m}\sin k\pi x\sin k\pi t - \sum_{k=0}^{m}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\right]f(t)\,dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{-1}^{1} f\left(t\right)\sin k\pi t\,dt\sin k\pi x + \sum_{k=0}^{m}\int_{-1}^{1} f\left(t\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\,dt\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} a_k\sin k\pi x + \sum_{k=0}^{m} b_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

Таким образом, частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (0.1), (0.2) произвольной суммируемой функции $f(x)$ имеют вид

$$\sigma_m\left(f\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k\sin k\pi x + \sum_{k=0}^{m} b_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x,$$

где

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(t)\sin k\pi t\,dt, \quad b_k = \int_{-1}^{1} f(t)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\,dt.$$

Заметим, что система $\left\{\sin k\pi x, \quad \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}$, $k=1,2,\ldots$, $n=0,1,2,\ldots$, является полной ортонормированной системой в $L_2(-1,1)$. Поэтому для $\forall f(x) \in L_2\left(-1,1\right)$ частичные суммы $\sigma_m\left(f\right)$ сходятся к функции $f(x)$ в смысле нормы пространства $L_2\left(-1,1\right)$.

§ 3. Оценка функции Грина

Для доказательства сходимости разложений по собственным функциям краевой задачи мы воспользуемся оценкой функции Грина. Поэтому в дальнейшем нам потребуется равномерная оценка функции Грина.

Лемма 1. *Для функции Грина краевой задачи* (0.1), (0.2) *справедлива оценка*

$$|G(x,t,\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\rho|}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-||x|-|t||)}\right),$$

для достаточно больших $|\rho|$, *лежащих вне окрестностей точек* ρ_{k1} *и* ρ_{k2} *радиуса* $\frac{1}{16}$, *где*
$\rho=\rho_1+i\rho_2, \quad \rho_0=\begin{cases}|\rho_1|, & |\rho_1|<|\rho_2|,\\ |\rho_2|, & |\rho_2|<|\rho_1|,\end{cases}$ $C-$ *некоторая постоянная.*

Доказательство. При $t\leqslant -x$ функция Грина имеет вид

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{8\rho}\left[\left(\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}+1\right)\left(e^{\rho(x+t)}-e^{-\rho(x-t)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}-1\right)\left(e^{\rho(x-t)}-e^{-\rho(x+t)}\right)\right]+$$

$$+\left[\left(\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{i(e^{i\rho}+e^{-i\rho})}-i\right)\left(e^{i\rho(x+t)}+e^{-i\rho(x-t)}\right)+\left(\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{i(e^{i\rho}+e^{-i\rho})}+i\right)\left(e^{i\rho(x-t)}+e^{-i\rho(x+t)}\right)\right]\Bigg\}.$$

Далее имеем оценку

$$|G(x,t,\lambda)|\leqslant\frac{1}{4|\rho|}\left[\frac{e^{\rho_1}}{e^{\rho_1}-e^{-\rho_1}}(e^{\rho_1(x+t)}+e^{-\rho_1(x-t)})+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\rho_1}}{e^{\rho_1}-e^{-\rho_1}}(e^{\rho_1(x-t)}+e^{-\rho_1(x+t)})\right]+$$

$$+\frac{1}{4|\rho|}\left[\frac{e^{-\rho_2}}{e^{-\rho_2}+e^{\rho_2}}(e^{-\rho_2(x+t)}+e^{\rho_2(x-t)})+\frac{e^{\rho_2}}{e^{-\rho_2}+e^{\rho_2}}(e^{-\rho_2(x-t)}+e^{\rho_2(x+t)})\right].$$

Отсюда следует оценка

$$|G(x,t,\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\rho|}\left(e^{-|\rho_0|\,|x+t|}+e^{-|\rho_0|(2-|x-t|)}\right). \tag{3.1}$$

При $-x<t<x$ из соотношения

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{4\rho}\left\{\frac{e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho(x+t)}+e^{\rho(x-t)}\right)-\frac{e^{\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{-\rho(x-t)}-e^{-\rho(x+t)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-i\rho}}{ie^{i\rho}+ie^{-i\rho}}\left(e^{i\rho(x+t)}+e^{i\rho(x-t)}\right)+\frac{e^{i\rho}}{ie^{i\rho}+ie^{-i\rho}}\left(e^{-i\rho(x-t)}+e^{-i\rho(x+t)}\right)\right\}$$

получаем оценку

$$|G(x,t,\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\rho|}\left(e^{-|\rho_0|\,|x-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|x+|t||)}\right). \tag{3.2}$$

В случае $t\geqslant x$ выполняется соотношение

$$|G(x,t,\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\rho|}\left(e^{-|\rho_0|\,|x-t|}+e^{-|\rho_0|(2-|x+t|)}\right). \tag{3.3}$$

Из соотношений (3.1), (3.2), (3.3) следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 2

§ 4. Теорема о равносходимости

В этом параграфе дадим ответ на вопрос о возможности разложения произвольной функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ в сходящийся ряд по собственным функциям спектральной задачи (0.3) с непрерывным комплекснозначным коэффициентом $q(x)$ на интервале $[-1,1]$.

Обозначим через $G_q(x,t,\lambda)$ функцию Грина задачи (0.3), а через $G(x,t,\lambda)$ — функцию Грина задачи (0.1), (0.2). Так как почти всюду на интервале $(-1,1)$ выполняются равенства

$$-\frac{\partial^2 G(-x,t,\lambda)}{\partial x^2} = \lambda G(x,t,\lambda),$$

$$-\frac{\partial^2 G_q(-x,t,\lambda)}{\partial x^2} + q(x) G_q(x,t,\lambda) = \lambda G_q(x,t,\lambda),$$

то

$$-\left(G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right)''\Big|_{x=-x} = \lambda\left(G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right) - q(x) G(x,t,\lambda).$$

Функция $G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)$ удовлетворяет краевым условиям (0.2). Поэтому вне полюсов функций $G(x,t,\lambda)$ и $G_q(x,t,\lambda)$ имеет место представление

$$G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda) = -\int_{-1}^{1} G(x,s,\lambda)\, q(s)\, G_q(s,t,\lambda)\, ds. \tag{4.1}$$

Решение $G_q(x,t,\lambda)$ этого интегрального уравнения является функцией Грина краевой задачи (0.3). Существование решения интегрального уравнения (4.1) влечет существование функции Грина. Поэтому сформулируем следующую теорему о существовании функции Грина краевой задачи (0.3).

Теорема 2. *Для всех достаточно больших $|\rho|$, удовлетворяющих условию леммы 1, решение интегрального уравнения (4.1) существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_{q0}(x,t,\lambda) = 0$ и

$$G_{qp+1}(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda) - \int_{-1}^{1} G(x,s,\lambda)\, q(s)\, G_{qp}(s,t,\lambda)\, ds \tag{4.2}$$

для всех достаточно больших $|\rho|$. По доказанной лемме для функции Грина $G(x,t,\lambda)$ задачи (0.1), (0.2) имеет место оценка

$$|G(x,t,\lambda)| \leqslant \frac{c}{|\rho|} r(x,t),$$

где

$$r(x,t) = \left(e^{-|\rho_0|||x|-|t||} + e^{-|\rho_0|(2-||x|-|t||)}\right), \quad \rho_0 = \begin{cases} |\rho_1|, & |\rho_1| < |\rho_2|, \\ |\rho_2|, & |\rho_2| < |\rho_1|. \end{cases}$$

Из соотношения (4.2) при $p = 0$ вытекает оценка

$$|G_{q1}(x,t,\lambda)| = |G(x,t,\lambda)| \leqslant \frac{c}{|\rho|} r(x,t).$$

Для краткости обозначим

$$\begin{gathered} C_0 := \max |G_{q1}(x,t,\lambda)|\, |\rho|\, r^{-1}(x,t), \\ C_p := \max |G_{qp+1}(x,t,\lambda) - G_{qp}(x,t,\lambda)|\, |\rho|\, r^{-1}(x,t), \end{gathered} \tag{4.3}$$

где максимум берется по $x \in [-1,1]$, для фиксированного t и достаточно больших $|\rho|$, отличных от полюсов функции $G(x,t,\lambda)$.

Мы хотим показать, что

$$C_j \leqslant \frac{C}{2^j}, \quad j = 0,1,2,\ldots,p. \tag{4.4}$$

Для $j=0$ оценка (4.4) вытекает из первой оценки (4.3). По индукции предположим справедливость оценки (4.4) при $j=1,2,\ldots,p$ и докажем (4.4) для $j=p+1$. Тогда (4.4) будет верна для любого p. Используя (4.3), выпишем цепочку соотношений

$$C_{p+1} = \max\left|G_{qp+2}(x,t,\lambda) - G_{qp+1}(x,t,\lambda)\right| |\rho|\, r^{-1}(x,t) \leqslant$$
$$\leqslant \max|\rho|\, r^{-1}(x,t)\int_{-1}^{1}|G(x,s,\lambda)|\,|q(s)|\,|G_{qp+1}(s,t,\lambda) - G_{qp}(s,t,\lambda)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \max C\frac{C_p}{|\rho|} r^{-1}(x,t)\int_{-1}^{1} r(x,s)\,|q(s)|\, r(s,t)\, ds =$$
$$= \max C\cdot C_p|\rho|^{-1}\int_{-1}^{1} r(x,s)\, r(s,t)\cdot r^{-1}(x,t)\,|q(s)|\, ds,$$

то есть

$$C_{p+1} \leqslant \max C\cdot C_p|\rho|^{-1}\int_{-1}^{1} r(x,s)\, r(s,t)\, r^{-1}(x,t)\,|q(s)|\, ds. \tag{4.5}$$

Но

$$r(x,s)\, r(s,t) = e^{-|\rho_2|(||x|-|s||+||s|-|t||)} + e^{-|\rho_2|(2-||s|-|t||+||x|-|s||)} +$$
$$+ e^{-|\rho_2|(2-||x|-|s||+||s|-|t||)} + e^{-|\rho_2|(4-||x|-|s||-||s|-|t||)}.$$

Используя соотношения

$$||x|-|t|| \leqslant ||x|-|s|| + ||s|-|t||, \quad 2-||x|-|t|| \leqslant 2-||x|-|s|| + ||s|-|t||,$$
$$2-||x|-|t|| \leqslant 2-||s|-|t|| + ||x|-|s||, \quad 4-||x|-|s||-||s|-|t|| \geqslant ||x|-|t||,$$

получаем, что $r(x,s)r(s,t) < 2r(x,t)$. Теперь (4.5) можем записать в виде

$$C_{p+1} \leqslant 2CC_p|\rho|^{-1}\int_{-1}^{1}|q(s)|\, ds.$$

Для достаточно больших $|\rho|$

$$2C|\rho|^{-1}\int_{-1}^{1}|q(s)|\, ds < \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$C_{p+1} \leqslant \frac{C_p}{2}$$

для любого p. Отсюда следует (4.4). Из (4.4) вытекает, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty}\left(G_{qp+1}(x,t,\lambda) - G_{qp}(x,t,\lambda)\right)$$

равномерно сходится и его частичная сумма есть

$$S_p(x) = G_{qp+1}(x,t,\lambda) - G_{q1}(x,t,\lambda).$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $G_{qp}(x,t,\lambda)$ к своему пределу $G_q(x,t,\lambda)$. Функция $G_q(x,t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (4.1). Теорема доказана. □

Пусть

$$\sigma_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{P_m} G(x,t,\lambda)2\rho\,d\rho\right]f(t)\,dt$$

— частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (0.1), (0.2), где $\forall f(x) \in L_1(-1,1)$. Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (0.3) обозначим через

$$S_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{P_m} G_q(x,t,\lambda)2\rho\,d\rho\right]f(t)\,dt$$

Такое представление разложения по собственным функциям возможно только в случае, когда спектральная задача (0.3) имеет не более конечного числа кратных собственных значений. Поэтому в дальнейшим мы предполагаем, что собственные значения спектральной задачи (0.3) являются простыми, начиная с некоторого номера. Последовательность $S_m(f)$ называют равносходящейся с последовательностью $\sigma_m(f)$ на промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, если $S_m - \sigma_m \to 0$ равномерно на этом промежутке при $m \to \infty$.

Теорема 3. *Для любой функции $f(x) \in L_1(-1,1)$ последовательность $S_m(f)$ равносходится с последовательностью $\sigma_m(f)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$S_m(f) - \sigma_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{P_m}\left\{\int_{-1}^{1}\left[G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right]f(t)\,dt\right\}2\rho\,d\rho. \tag{4.6}$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что

$$|G_q(x,t,\lambda)| \leqslant \frac{2C}{|\rho|}r(x,t).$$

Учитывая эту оценку, из уравнения (4.1) получаем

$$|G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)| \leqslant 4C^2|\rho|^{-2}r(x,t)\int_{-1}^{1}|q(s)|\,ds.$$

Тогда из равенства (4.6) можем вывести

$$|S_m(f) - \sigma_m(f)| \leqslant \frac{2C^2}{\pi}\int_{P_m}\left[\int_{-1}^{1} r(x,t)\,|f(t)|\,dt\right]\frac{2\,|\rho|}{|\rho|^2}\,d\rho\cdot\int_{-1}^{1}|q(s)|\,ds =$$

$$= \frac{4C^2}{\pi}\int_{-1}^{1}|q(s)|\,ds\int_{P_m}\left[\int_{-1}^{1} r(x,t)\,|f(t)|\,dt\right]\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|.$$

Обозначим

$$C_1 = \frac{4C^2}{\pi}\int_{-1}^{1}|q(s)|\,ds.$$

Тогда
$$|S_m(f)-\sigma_m(f)|\leqslant C_1\int_{P_m}\left[\int_{-1}^{1}r(x,t)\,|f(t)|\,dt\right]\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|,$$
$$C_1=\frac{4c^2}{\pi}\int_{-1}^{1}|q(s)|\,ds.$$
Пусть
$$(0,1)=\Delta_1+\Delta_2,\quad \Delta_1=(-1+\delta,-x-\delta)\cup(-x+\delta,x-\delta)\cup(x+\delta,1-\delta),$$
$$\Delta_2=(-1,-1+\delta)\cup(-x-\delta,-x+\delta)\cup(x-\delta,x+\delta)\cup(1-\delta,1),\quad \delta>0.$$
Тогда
$$|S_m(f)-\sigma_m(f)|\leqslant$$
$$\leqslant C_1\int_{P_m}\int_{\Delta_1}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|\,|x|-|t||)}\right)|f(t)|\;dt\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|+2C_1\pi\int_{\Delta_2}|f(t)|\,dt.\quad(4.7)$$
Так как
$$\int_{\Delta_2}|f(t)|\,dt=\int_{-1}^{-1+\delta}|f(t)|\,dt+\int_{-x-\delta}^{-x+\delta}|f(t)|\,dt+\int_{x-\delta}^{x+\delta}|f(t)|\,dt+\int_{1-\delta}^{1}|f(t)|\,dt,$$
то выбором δ второе слагаемое в (4.7) можно сделать меньшим чем $\frac{\varepsilon}{2}$.
Так как
$$\int_{P_m}\int_{\Delta_1}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|\,|x|-|t||)}\right)|f(t)|\,dt\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|=$$
$$=\int_{P_m}\left[\int_{-1+\delta}^{-x-\delta}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|\,|x|-|t||)}\right)|f(t)|\,dt+\right.$$
$$+\int_{-x+\delta}^{x-\delta}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|\,|x|-|t||)}\right)|f(t)|\,dt+$$
$$\left.+\int_{x+\delta}^{1-\delta}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|\,|x|-|t||)}\right)|f(t)|\,dt\right]\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|,$$
то для первого слагаемого в правой части (4.7) имеет место оценка
$$\int_{P_m}\int_{\Delta_1}\left(e^{-|\rho_0|\,||x|-|t||}+e^{-|\rho_0|(2-|\,|x|-|t||)}\right)|f(t)|\,dt\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|\leqslant c\int_{\Delta_1}|f(t)|\,dt\int_{P_m}e^{-|\rho_0|\delta}\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|.$$
Если ρ_m есть радиус окружности P_m, то
$$\int_{P_m}e^{-|\rho_0|\delta}\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\delta\rho_m|\sin t|}\,dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}e^{-\delta\rho_m|\cos t|}\,dt+$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}e^{-\delta\rho_m|\sin t|}\,dt+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}e^{-\delta\rho_m|\cos t|}\,dt+\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}e^{-\delta\rho_m|\sin t|}\,dt.$$
Поэтому справедлива оценка
$$\int_{P_m}e^{-|\rho_0|\,\delta}\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|<\frac{C_2}{|\rho_m|}.$$

Выбирая m достаточно большим, первое слагаемое в (4.7) можно сделать меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы легко следует базисность собственных функций спектральной задачи (0.3).

Теорема 4. *Система корневых функций спектральной задачи* (0.3) *с непрерывным комплекснозначным коэффициентом* $q(x)$ *образует базис пространства* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы и базисности собственных функций спектральной задачи (0.1), (0.2) для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ выполняется неравенство
$$\|S_m(f) - f\| \leqslant \|S_m(f) - \sigma_m(f)\| + \|\sigma_m(f) - f\| < \varepsilon.$$
Отсюда следует базисность собственных функций спектральной задачи (0.3). Теорема доказана. □

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, грант AP05131225.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальным уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: Иностранная литература, 1960. 278 с.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
3. Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. Malabar, Florida: Krieger publishing company, 1984. 429 p.
4. Il'in V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to nonself-adjoint differential operators // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 116. Issue 5. P. 3489–3550. https://doi.org/10.1023/A:1024180807502
5. Abbasova Yu.G., Kurbanov V.M. Convergence of the spectral decomposition of a function from the class $W^1_{p,m}(G)$, $p > 1$, in the vector eigenfunctions of a differential operator of the third order // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 69. Issue 6. C. 839–856. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1400-0
6. Ломов И.С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. Вып. 4. С. 405–418. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418
7. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 2013. No. 270. P. 1–16. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2013/270/aleroev.pdf
8. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form // AIP Conference Proceedings. 2012. Vol. 1470. Issue 1. P. 225–227. https://doi.org/10.1063/1.4747681
9. Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution // Abstract and Applied Analysis. 2012. Vol. 2012. Article ID 590781. 5 p. https://doi.org/10.1155/2012/590781
10. Burlutskaya M.Sh. Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. Issue 1. P. 1–10. https://doi.org/10.1134/S0965542514010059

11. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differential Equations. 2012. Vol. 48. No. 8. P. 1112–1118. https://doi.org/10.1134/S001226611208006X

12. Kopzhassarova A., Sarsenbi A. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution // Abstract and Applied Analysis. 2012. Vol. 2012. Article ID 576843. 6 p. https://doi.org/10.1155/2012/576843

13. Sarsenbi A.M., Tengaeva A.A. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems // Differential Equations. 2012. Vol. 48. No. 2. P. 306–308. https://doi.org/10.1134/S0012266112020152

14. Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differential Equations. 2010. Vol. 46. No. 4. P. 509–514. https://doi.org/10.1134/S0012266110040051

15. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution // Differential Equations. 2015. Vol. 51. No. 8. P. 984–990. https://doi.org/10.1134/S0012266115080029

16. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015. No. 278. P. 1–9. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/278/kristkov.pdf

17. Przeworska-Rolewicz D. Equations with transformed argument. Algebraic approach. Amsterdam–Warsawa: PWN Elsevier, 1973.

18. Wiener J. Generalized solutions of functional differential equations. World Scientific, 1993. https://doi.org/10.1142/1860

19. Cabada A., Tojo F.A.F. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applcations. 2014. Vol. 412. No. 1. P. 529–546. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.067

Поступила в редакцию 09.02.2019

Сарсенби Абдисалам Абдижаханулы, PhD докторант, кафедра математики, Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, 160012, Казахстан, г. Шымкент, пр. Тауке-хана, 5.
E-mail: abdisalam@mail.ru

Турметов Батирхан Худайбергенович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математики, Международный Казахско-Турецкий университет имени Ходжи Ахмет Ясави, 161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, 29.
E-mail: turmetovbh@mail.ru

A. A. Sarsenbi, B. Kh. Turmetov

Basis property of a system of eigenfunctions of a second-order differential operator with involution

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 183–196 (in Russian).

Keywords: differential equation with involution, Green's function, eigenfunction expansions, basis.

MSC2010: 35K20, 34L10

DOI: 10.20537/vm190204

МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 2

In the present paper we study the spectral problem for the second-order differential operators with involution and boundary conditions of Dirichlet type. The Green's function of this boundary problem is constructed. Uniform estimates of the Green's functions for the boundary value problems considered are obtained. The equiconvergence of eigenfunction expansions of two second-order differential operators with involution and boundary conditions of Dirichlet type for any function in $L_2(-1,1)$ is established. We use an integral method based on the application of the Green's function of a differential operator with involution and spectral parameter. As a corollary from the equiconvergence theorem, it is proved that the eigenfunctions of the spectral problem form the basis in $L_2(-1,1)$ for any continuous complex-valued coefficient $q(x)$.

Funding. This work supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Kazakhstan Republic, project AP05131225.

REFERENCES

1. Titchmarsh E.Ch. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Oxford: Clarendon Press, 1946.
2. Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Nauka, 1969.
3. Coddington E.A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*, Malabar, Florida: Krieger publishing company, 1984.
4. Il'in V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to nonself-adjoint differential operators, *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 116, issue 5, pp. 3489–3550. https://doi.org/10.1023/A:1024180807502
5. Abbasova Yu.G., Kurbanov V.M. Convergence of the spectral decomposition of a function from the class $W^1_{p,m}(G)$, $p>1$, in the vector eigenfunctions of a differential operator of the third order, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2017, vol. 69, issue 6, pp. 839–856. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1400-0
6. Lomov I.S. Estimates of speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators, *Izv. Sarat. Univ. (N.S.) Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2015, vol. 15, issue 4, pp. 405–418 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418
7. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, vol. 2013, pp. 1–16. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2013/270/aleroev.pdf
8. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form, *AIP Conference Proceedings*, 2012, vol. 1470, issue 1, pp. 225–227. https://doi.org/10.1063/1.4747681
9. Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution, *Abstract and Applied Analysis*, 2012, vol. 2012, article ID 590781, 5 p. https://doi.org/10.1155/2012/590781
10. Burlutskaya M.Sh. Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, issue 1, pp. 1–10. https://doi.org/10.1134/S0965542514010059
11. Sadybekov M.A. Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1112–1118. https://doi.org/10.1134/S001226611208006X
12. Kopzhassarova A., Sarsenbi A. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution, *Abstract and Applied Analysis*, 2012, vol. 2012, article ID 576843, 6 p. https://doi.org/10.1155/2012/576843

13. Sarsenbi A.M., Tengaeva A.A. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 306–308. https://doi.org/10.1134/S0012266112020152
14. Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 4, pp. 509–514. https://doi.org/10.1134/S0012266110040051
15. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 984–990. https://doi.org/10.1134/S0012266115080029
16. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 2015, no. 278, pp. 1–9. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/278/kristkov.pdf
17. Przeworska-Rolewicz D. *Equations with transformed argument. Algebraic approach*, Amsterdam, Warsawa: PWN Elsevier, 1973.
18. Wiener J. *Generalized solutions of functional differential equations*, World Scientific, 1993. https://doi.org/10.1142/1860
19. Cabada A., Tojo F.A.F. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol. 412, no. 1, pp. 529–546. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.067

Received 09.02.2019

Sarsenbi Abdisalam Abdizhakhanuly, PhD student, Department of Mathematics, M. Auezov South Kazakhstan State University, pr. Tauke-Khana, 5, Shymkent, 160012, Kazakhstan.
E-mail: abdisalam@mail.ru

Turmetov Batirkhan Khudaibergenovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, pr. B. Sattarkhanova, 29, Turkistan, 160200, Kazakhstan.
E-mail: turmetovbh@mail.ru