УДК 517.95

© *Я. Т. Мегралиев, Б. К. Велиева*

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БЕННИ–ЛЮКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной краевой задачи с неизвестным коэффициентом и правой частью, зависящей от времени, для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями. Задача рассматривается в прямоугольной области. Дается определение классического решения поставленной задачи. Сначала рассматривается вспомогательная обратная краевая задача и доказывается ее эквивалентность (в определенном смысле) исходной задаче. Для исследования вспомогательной обратной краевой задачи сначала используется метод разделения переменных. После применения формальной схемы метода разделения переменных решение прямой краевой задачи (при заданной неизвестной функции) сводится к решению задачи с неизвестными коэффициентами. После этого решение задачи сводится к решению некоторой счетной системы интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. В свою очередь, последняя система относительно неизвестных коэффициентов записывается в виде одного интегро-дифференциального уравнения относительно искомого решения. Затем, используя соответствующие дополнительные условия обратной вспомогательной краевой задачи, для определения неизвестных функций получаем систему двух нелинейных интегральных уравнений. Таким образом, решение вспомогательной обратной краевой задачи сводится к системе из трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций. Строится конкретное банахово пространство. Далее, в шаре из построенного банахова пространства с помощью сжатых отображений доказывается разрешимость системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая также является единственным решением вспомогательной обратной краевой задачи. С использованием эквивалентности задач доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение Бенни–Люка, существование, единственность классического решения.

DOI: 10.20537/vm190203

Многие задачи математической физики, механики сплошных сред являются краевыми задачами, сводящимися к интегрированию дифференциального уравнения или системы уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]. Представляют большой интерес с точки зрения приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например [2, 3]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Бенни–Люка имеют приложения в математической физике (см. [3]).

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах (см.,например [4–10]).

Теория обратных краевых задач для уравнений четвертого порядка все еще остается малоизученной. Обратным краевым задачам для уравнений четвертого порядка посвящены работы [11–14] и другие.

В работе [12] рассматривается однозначная разрешимость нелокальной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Бенни–Люка четвертого порядка с вырожденным ядром.

В отличие от работы [12] в настоящей работе исследуется обратная краевая задача для уравнения Бенни–Люка четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями.

§ 1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Далее, пусть $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $p(t)$, $h_i(t)$ $(i = 1,2)$ — заданные функции, определенные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу. Требуется найти тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$, связанных уравнением [3]:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha u_{xxxx}(x,t) - \beta u_{xxtt}(x,t) = \\ &= a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \end{aligned} \tag{1.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ нелокальных начальных условий

$$u(x,0) = \int_0^T p(t)u(x,t)\,dt + \varphi(x), \quad u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{1.2}$$

несамосопряженных граничных условий

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t), \quad u_{xxx}(0,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.3}$$

и с дополнительными условиями

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = h_1(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.4}$$

$$u_x\left(\frac{1}{2}, t\right) = h_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.5}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta \geqslant 0$ — заданные числа.

Обозначим

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T) = \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{ttx}(x,t), u_{ttxx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение 1. Под *классическим решением* обратной краевой задачи (1.1)–(1.5) понимаем тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$, $b(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2)–(1.5) в обычном смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{5,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$, $b(t) \in C[0,T]$, из соотношений (1.1)–(1.3) и равенства

$$\begin{aligned} &h_1''(t) - u_x(1,t) + \alpha u_{xxx}(1,t) - \beta u_{ttx}(1,t) = \\ &= a(t)h_1(t) + b(t)\int_0^1 g(x,t)\,dx + \int_0^1 f(x,t)\,dx \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$h_2''(t) - u_{xxx}\left(\frac{1}{2}, t\right) + \alpha u_{xxxxx}\left(\frac{1}{2}, t\right) + \beta u_{xxxtt}\left(\frac{1}{2}, t\right) = \\ = a(t)h_2(t) + b(t)g_x\left(\frac{1}{2}, t\right) + f_x\left(\frac{1}{2}, t\right) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.7}$$

где

$$\tilde{C}^{5,2}(D_T) = \left\{u(x,t) : u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T), u_{ttxxx}(x,t), u_{xxxxx}(x,t) \in C(D_T)\right\},$$

$$h(t) \equiv h_1(t)g_x\left(\frac{1}{2}, t\right) - h_2(t)\int_0^1 g(x,t)dx \neq 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Аналогично [14], доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^1[0,1]$, $p(t) \in C[0,T]$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $(i = 1, 2)$, $f(x,t)$, $f_x(x,t), g(x,t), g_x(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \equiv h_1(t)g_x\left(\frac{1}{2}, t\right) - h_2(t)\displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,dx \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = h_1(0) - \int_0^T p(t)h_1(t)\,dt, \quad \int_0^1 \psi(x)\,dx = h_1'(0) + \delta h_1'(T), \tag{1.8}$$

$$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = h_2(0) - \int_0^T p(t)h_2(t)\,dt, \quad \psi'\left(\frac{1}{2}\right) = h_2'(0) + \delta h_2'(T). \tag{1.9}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *каждое классическое решение* $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ *задачи* (1.1)–(1.5) *такое, что* $u(x,t) \in \tilde{C}^{5,2}(D_T)$, *является и решением задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7);

2) *каждое решение* $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ *задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *такое, что*

$$\left(\|p(t)\|_{C[0,T]} + \frac{(2\delta+1)T}{1+\delta}\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)T < 1,$$

является классическим решением (1.1)–(1.5).

§ 2. Вспомогательные факты

Известно [15], что последовательности функций

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k-1}(x) = \cos\lambda_k x, \quad X_{2k}(x) = x\sin\lambda_k x \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

$$Y_0(x) = 2(1-x), \quad Y_{2k-1}(x) = 4(1-x)\cos\lambda_k x, \quad Y_{2k}(x) = 4\sin\lambda_k x \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

где $\lambda_k = 2k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, образуют биортогональную систему, и система (2.1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Тогда произвольная функция $\vartheta(x) \in L_2(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{2k-1}X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{2k}X_{2k}(x),$$

где коэффициенты ϑ_0, ϑ_{2k}, ϑ_{2k-1} вычисляются по формулам

$$\vartheta_0 = \int_0^1 \vartheta(x)Y_0(x)\,dx, \ \ \vartheta_{2k} = \int_0^1 \vartheta(x)Y_{2k}(x)\,dx, \ \ \vartheta_{2k-1} = \int_0^1 \vartheta(x)Y_{2k-1}(x)\,dx \ \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Известно [16], что если

$$\vartheta(x) \in C^{2i-1}[0,1], \quad \vartheta^{(2i)}(x) \in L_2(0,1), \quad \vartheta^{(2s)}(0) = \vartheta^{(2s)}(1), \quad \vartheta^{(2s+1)}(0) = 0 \ \ (s = \overline{0, i-1}),$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{2i} \vartheta_{2k}\right)^2 \leqslant 8 \left\|\vartheta^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{2i} \vartheta_{2k-1}\right)^2 \leqslant 8 \left\|\vartheta^{(2i)}(x)(1-x) - 2i\vartheta^{(2i-1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{2.3}$$

При предположениях

$$\vartheta(x) \in C^{2i}[0,1], \ \ \vartheta^{(2i+1)}(x) \in L_2(0,1), \ \ \vartheta^{(2s-1)}(0) = 0, \ \ \vartheta^{(2s)}(0) = \vartheta^{(2s)}(1) \ \ (i \geqslant 1, s = \overline{0,i})$$

устанавливается справедливость оценок [16]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{2i+1} \vartheta_{2k}\right)^2 \leqslant 8 \left\|\vartheta^{(2i+1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{2i+1} \vartheta_{2k-1}\right)^2 \leqslant 8 \left\|\vartheta^{(2i+1)}(x)(1-x) - (2i+1)\vartheta^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{2.4}$$

Теперь обозначим через $B^6_{2,T}$ [16] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u\,(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,(t)\, X_k\,(x),$$

рассматриваемых на D_T, для которых все функции $u_k\,(t) \in C[0,T]$ $(k = 0, 1, \ldots)$, и

$$J_T(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^6 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^6 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Норму в этом множестве определим так: $\|u(x,t)\|_{B^6_{2,T}} = J_T(u)$. Через E^6_T обозначим пространство вектор-функций $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ таких, что $u(x,t) \in \tilde{C}^{5,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$, $b(t) \in C[0,T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{E^6_T} = \|u(x,t)\|_{B^6_{2,T}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B^6_{2,T}$ и E^6_T являются банаховыми пространствами.

§ 3. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

Q_1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \leqslant \delta < 1$, $p(t) \in C[0,T]$;

Q_2. $\varphi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi^{(6)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi'''(0) = \varphi^{(5)}(0) = 0$,
$\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$;

Q$_3$. $\psi(x)\in C^4[0,1],\ \ \psi^{(5)}(x)\in L_2(0,1),\ \ \psi'(0)=\psi'''(0)=0,\ \psi(0)=\psi(1),$
$\psi''(0)=\psi''(1),\ \ \psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(1);$

Q$_4$. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T),$
$f_x(0,t)=0,\ f(0,t)=f(1,t),\ f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)\quad (0\leqslant t\leqslant T);$

Q$_5$. $g(x,t),\ g_x(x,t),\ g_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ g_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T),$
$g_x(0,t)=0,\ g(0,t)=g(1,t),\ g_{xx}(0,t)=g_{xx}(1,t)\quad (0\leqslant t\leqslant T);$

Q_6. $h_i(t)\in C^2[0,T]\ (i=1,2),\ h(t)\equiv h_1(t)g_x\left(\frac{1}{2},t\right)-h_2(t)\int_0^1 g(x,t)\,dx\neq 0\ \ (0\leqslant t\leqslant T).$

Так как система (2.1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ и система (2.1) и (2.2) образует биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций, то первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$u\left(x,t\right)=u_0\left(t\right)X_0\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}\left(t\right)X_{2k-1}\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}\left(t\right)X_{2k}\left(x\right), \tag{3.1}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_k(x)\,dx, \qquad (k=0,1,\ldots). \tag{3.2}$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1.1) и (1.2) находим:

$$u_0''\left(t\right)=F_0\left(t;u,a,b\right)\quad (0\leqslant t\leqslant T), \tag{3.3}$$

$$u_{2k}''(t)+\beta_k^2u_{2k}(t)=\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k}\left(t;u,a,b\right)\quad (k=1,2,\ldots;\quad 0\leqslant t\leqslant T), \tag{3.4}$$

$$u_{2k-1}''(t)+\beta_k^2u_{2k-1}(t)=\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k-1}\left(t;u,a,b\right)+$$
$$+\frac{2\lambda_k(1+2\alpha\lambda_k^2)}{1+\beta\lambda_k^2}u_{2k}\left(t\right)+\frac{2\beta\lambda_k}{1+\beta\lambda_k^2}u_{2k}''\left(t\right)\quad (k=1,2,\ldots;\quad 0\leqslant t\leqslant T), \tag{3.5}$$

$$u_k(0)-\int_0^T p(t)u_k(t)\,dt=\varphi_k,\ \ u_k'(0)+\delta u_k'(T)=\psi_k\quad (k=0,1,\ldots), \tag{3.6}$$

где

$$\beta_k^2=\frac{\lambda_k^2(1+\alpha\lambda_k^2)}{1+\beta\lambda_k^2}\quad (k=1,2,\ldots),\quad F_k\left(t;u,a\right)=a\left(t\right)u_k\left(t\right)+b\left(t\right)g_k\left(t\right)+f_k\left(t\right),$$

$$g_k\left(t\right)=\int_0^1 g\left(x,t\right)Y_k\left(x\right)dx,\ \ f_k\left(t\right)=\int_0^1 f\left(x,t\right)Y_k\left(x\right)dx,$$

$$\varphi_k=\int_0^1\varphi\left(x\right)Y_k\left(x\right)dx,\ \ \psi_k=\int_0^1\psi\left(x\right)Y_k\left(x\right)dx\quad (k=0,1,\ldots),$$

Решая задачу (3.3)–(3.6), находим:

$$u_0(t)=\varphi_0+\int_0^T p(t)u_0(t)\,dt+\frac{t}{1+\delta}\psi_0+\int_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a,b)\,d\tau, \tag{3.7}$$

$$u_{2k}(t)=\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p(t)u_{2k}(t)dt\right)(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a,b)\,d\tau\quad (k=1,2,\ldots),\tag{3.8}$$

$$u_{2k-1}(t)=\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k-1}+\int_0^T p(t)u_{2k-1}(t)\,dt\right)(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_{2k-1}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a,b)\,d\tau+$$

$$+\frac{2\lambda_k\left(1+2\alpha\lambda_k^2+\alpha\beta\lambda_k^4\right)}{(1+\beta\lambda_k^2)^3}\left\{\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p(t)u_{2k}(t)\,dt\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(-\frac{\delta\sin\beta_k t}{\beta_k(1+\delta\cos\beta_k T)}\left(\frac{1}{2\beta_k}\sin\beta_k T+\frac{T}{2}\cos\beta_k T+\delta\left(\frac{T}{2}+\frac{1}{4\beta_k}\sin 2\beta_k T\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\frac{t}{2}\sin\beta_k t+\delta\left(-\frac{t}{2}\sin\beta_k(T-t)-\frac{1}{2\beta_k}\sin\beta_k T\sin\beta_k t\right)\right)\right)+$$

$$\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\left(-\frac{\delta T\sin\beta_k T\sin\beta_k t}{2\beta_k(1+\delta\cos\beta_k T)}+\frac{1}{\beta_k}\left(\frac{1}{2\beta_k}\sin\beta_k t-\frac{t}{2}\cos\beta_k t\right)\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)\left(\int_0^T G_k(\tau,\xi)F_{2k}(\xi;u,a,b)\,d\xi\right)d\tau\right\}+$$

$$+\frac{2\beta\lambda_k}{(1+\beta\lambda_k^2)^3}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a,b)\,d\tau\quad (k=1,2,\ldots;\ \ 0\leqslant t\leqslant T),\tag{3.9}$$

$$G_0(t,\tau)=\begin{cases}-\dfrac{\delta t}{1+\delta}, & t\in[0,\tau],\\ \dfrac{t}{1+\delta}-\tau, & t\in[\tau,T],\end{cases}$$

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}-\dfrac{\delta\cos\beta_k(T-\tau)\sin\beta_k t}{\beta_k(1+\delta\cos\beta_k T)}, & t\in[0,\tau],\\ -\dfrac{\delta\cos\beta_k(T-\tau)\sin\beta_k t}{\beta_k(1+\delta\cos\beta_k T)}+\dfrac{1}{\beta_k}\sin\beta_k(t-\tau), & t\in[\tau,T].\end{cases}$$

После подстановки выражения $u_0(t)$ из (3.7), $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ из (3.8), $u_{2k-1}(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ из (3.9) в (3.1), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) получаем:

$$u(x,t)=\left\{\varphi_0+\int_0^T p(t)u_0(t)\,dt+\frac{t}{1+\delta}\psi_0+\int_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a,b)\,d\tau\right\}X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\delta\cos\lambda_k T}\left[\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p(\tau)u_{2k}(\tau)\,d\tau\right)(\cos\lambda_k t+\delta\cos\lambda_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi_{2k}}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\right]+\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a,b)\,d\tau\right\}X_{2k}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k-1}+\int_0^T p(t)u_{2k-1}(t)\,dt\right)(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_{2k-1}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a,b)\,d\tau+$$

$$+\frac{2\lambda_k\left(1+2\alpha\lambda_k^2+\alpha\beta\lambda_k^4\right)}{(1+\beta\lambda_k^2)^3}\left\{\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p(t)u_{2k}(t)\,dt\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(-\frac{\delta\sin\beta_k t}{\beta_k(1+\delta\cos\beta_k T)}\left(\frac{1}{2\beta_k}\sin\beta_k T+\frac{T}{2}\cos\beta_k T+\delta\left(\frac{T}{2}+\frac{1}{4\beta_k}\sin 2\beta_k T\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\left(\frac{t}{2}\sin\beta_k t+\delta\left(-\frac{t}{2}\sin\beta_k(T-t)-\frac{1}{2\beta_k}\sin\beta_k T\sin\beta_k t\right)\right)\right)+$$

$$\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\left(-\frac{\delta T\sin\beta_k T\sin\beta_k t}{2\beta_k(1+\delta\cos\beta_k T)}+\frac{1}{\beta_k}\left(\frac{1}{2\beta_k}\sin\beta_k t-\frac{t}{2}\cos\beta_k t\right)\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)\left(\int_0^T G_k(\tau,\xi)F_{2k}(\xi;u,a,b)d\xi\right)d\tau\right\}+$$

$$\left.+\frac{2\beta\lambda_k}{(1+\beta\lambda_k^2)^3}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}\left(\tau;u,a,b\right)d\tau\right\}X_{2k-1}\left(x\right). \tag{3.10}$$

Теперь, из (1.6) и (1.7), с учетом (3.1), (3.4) и (3.8) получаем:

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\left\{\left(h_1''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx\right)g_x\left(\frac{1}{2},t\right)-\left(h_2''(t)-f_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right)\int_0^1 g(x,t)\,dx-\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(1+\alpha\lambda_k^2)}{1+\beta\lambda_k^2}\left(g_x\left(\frac{1}{2},t\right)+\frac{1}{2}(-1)^k\lambda_k^2\int_0^1 g(x,t)\,dx\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p(t)u_{2k}(t)\,dt\right)(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a,b)\,d\tau\right]-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left(g_x\left(\frac{1}{2},t\right)+\frac{1}{2}(-1)^k\lambda_k^2\int_0^1 g(x,t)\,dx\right)\frac{\beta\lambda_k}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k}\left(t;u,a,b\right)\right\}, \tag{3.11}$$

$$b(t)=[h(t)]^{-1}\left\{h_1(t)\left(h_2''(t)-f_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right)-h_2(t)\left(h_1''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx\right)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(1+\alpha\lambda_k^2)}{1+\beta\lambda_k^2}\left(\frac{1}{2}(-1)^k\lambda_k^2 h_1(t)+h_2(t)\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{1+\delta\cos\beta_k T}\left[\left(\varphi_{2k}+\int_0^T p(t)u_{2k}(t)\,dt\right)(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\frac{1}{1+\beta\lambda_k^2}\int_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a,b)\,d\tau\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\lambda_k^2 h_1(t)+h_2(t)\right)\frac{\beta\lambda_k}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k}\left(t;u,a,b\right)\Bigg\}. \tag{3.12}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) сведено к решению системы (3.10), (3.11), (3.12) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *— любое решение задачи* (1.1)–(1.3)*,* (1.6)*,* (1.7)*, то функции* $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$*, определенные соотношением* (3.2)*, удовлетворяют на* $[0,T]$ *системе* (3.7)*,* (3.8)*,* (3.9)

Замечание 1. Пусть система (3.10), (3.11), (3.12) имеет единственное решение. Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет решение, то оно единственно.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^6 оператор

$$\Phi(u,a,b)=\{\Phi_1(u,a,b),\quad \Phi_2(u,a,b),\quad \Phi_3(u,a,b)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a,b)=\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)X_k(x),\quad \Phi_2(u,a,b)=\tilde{a}(t),\quad \Phi_3(u,a,b)=\tilde{b}(t),$$

а $u_0\left(t\right)$, $u_{2k}\left(t\right)$ $(k=1,2,\ldots)$, $u_{2k-1}\left(t\right)$ $(k=1,2,\ldots)$, $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равны соответственно правым частям (3.7), (3.8), (3.9), (3.11) и (3.12).

Теперь, с помощью нетрудных преобразований, находим:

$$\|\tilde{u}_0\left(t\right)\|_{C[0,T]}\leqslant|\varphi_0|+T\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\frac{T}{1+\delta}\left|\psi_0\right|+\frac{(1+2\delta)T}{1+\delta}\times$$

$$\times\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\left|f_0\left(\tau\right)\right|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}\sqrt{T}\left(\int_0^T\left|g_0\left(\tau\right)\right|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|\tilde{u}_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\sqrt{6}(1+\delta)}{1-\delta}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+T\left\|p\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|u_{2k}\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{\sqrt{6}}{1-\delta}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\psi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1+\delta}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{6(1+\beta)}{\alpha}}\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{2k}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{T}\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{2k}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|\tilde{u}_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}(1+\delta)}{1-\delta}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left|\varphi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+T\left\|p\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|u_{2k-1}\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]+\frac{2\sqrt{3}}{1-\delta}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\psi_{2k-1}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{3(1+\beta)}{\alpha}}\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|f_{2k-1}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{T}\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|g_{2k-1}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+\frac{4(1+2\alpha+\alpha\beta)}{\beta^3(1-\delta)}\sqrt{\frac{3(1+\beta)}{\alpha}}\left(\frac{T}{2}+\frac{\delta}{1-\delta}\left(T+\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\right)\right)\times$$

$$\times\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\left|\varphi_{2k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|p\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+\frac{2\sqrt{3}(1+\beta)(1+2\alpha+\alpha\beta)}{\alpha\beta^3(1-\delta)}\left(\frac{T}{1-\delta}+\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{4\sqrt{3}(1+\delta)}{\beta^2(1-\delta)}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left(\frac{(1+2\alpha+\alpha\beta)(\delta+1)T}{\beta^2(1-\delta)}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}+1\right)\times$$

$$\times\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_{2k}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{T}\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|g_{2k}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\leqslant\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|\left(h_1''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx\right)g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|\left(h_2''(t)-f_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right)\int_0^1 g(x,t)\,dx\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left|g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 g(x,t)\,dx\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1+\alpha}{\beta}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{1+\delta}{1-\delta}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\left|\varphi_{2k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|p\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|u_{2k}\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{1-\delta}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left|\psi_{2k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1+\delta}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\times$$

$$\times\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_{2k}\left(\tau\right)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\times\right.$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{T}\,\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|g_{2k}\,(\tau)\,|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\Bigg]+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,\|f_{2k}\,(t)\|_{C[0,T]}\,|\right)^{\frac{1}{2}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,\|g_{2k}\,(t)\|_{C[0,T]}\,|\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}\Bigg\},$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]}\leqslant\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h_1(t)\left(h_2''(t)-f_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|h_2(t)\left(h_1''(t)-\int_0^1f(x,t)\,dx\right)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left(\frac{1}{2}\,|h_1(t)|+|h_2(t)|\right)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1+\alpha}{\beta}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{1+\delta}{1-\delta}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\,|\varphi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+T\,\|p\,(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\,\|u_{2k}\,(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{1-\delta}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\psi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1+\delta}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\times$$

$$\times\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_{2k}\,(\tau)\,|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\times\right.$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{T}\,\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|g_{2k}\,(\tau)\,|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\Bigg]+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,\|f_{2k}\,(t)\|_{C[0,T]}\,|\right)^{\frac{1}{2}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,\|g_{2k}\,(t)\|_{C[0,T]}\,|\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}\Bigg\}.$$

Теперь, с учетом (2.3), (2.4), получаем:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]}\leqslant A_1(T)+$$

$$+B_1(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+C_1(T)\,\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+D_1(T)\,\|b(t)\|_{C[0,T]}\,,\tag{3.13}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\,\|\tilde{u}_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant A_2(T)+$$

$$+B_2(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+C_2(T)\,\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+D_2(T)\,\|b(t)\|_{C[0,T]}\,,\tag{3.14}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left\|\tilde{u}_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant A_3(T)+$$

$$+B_3(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+C_3(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+D_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{3.15}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant A_4(T)+$$

$$+B_4(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+C_4(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+D_4(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{3.16}$$

$$\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant A_5(T)+$$

$$+B_5(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+C_5(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^6}+D_5(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{3.17}$$

где

$$A_1(T)=2\|\varphi(x)(1-x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{2T}{1+\delta}\|\psi(x)(1-x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{2(1+2\delta)T\sqrt{T}}{1+\delta}\|f(x,t)(1-x)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=\frac{(1+2\delta)T^2}{1+\delta}, \quad C_1(T)=T\|p(t)\|_{C[0,T]},$$

$$D_1(T)=\frac{2(1+2\delta)T\sqrt{T}}{1+\delta}\|g(x,t)(1-x)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T)=\frac{4\sqrt{3}(1+\delta)}{1-\delta}\left\|\varphi^{(6)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{4\sqrt{3}}{1-\delta}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left\|\psi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{4(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{3T(1+\beta)}{\alpha}}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_2(T)=\frac{(1+\delta)T}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{6(1+\beta)}{\alpha}}, \quad C_2(T)=\frac{\sqrt{6}(1+\delta)T}{1-\delta}\|p\,(t)\|_{C[0,T]},$$

$$D_2(T)=\frac{4(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{3T(1+\beta)}{\alpha}}\|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_3(T)=\frac{4\sqrt{6}(1+\delta)}{1-\delta}\left\|\varphi^{(6)}(x)(1-x)-6\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{4\sqrt{6}}{1-\delta}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left\|\psi^{(5)}(x)(1-x)-5\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{4(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{6T(1+\beta)}{\alpha}}\|f_{xxx}(x,t)(1-x)-3f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+\frac{8(1+2\alpha+\alpha\beta)}{\beta^3(1-\delta)}\sqrt{\frac{6(1+\beta)}{\alpha}}\left(\frac{T}{2}+\frac{\delta}{1-\delta}\left(T+\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\right)\right)\left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{2\sqrt{3}(1+\beta)(1+2\alpha+\alpha\beta)}{\alpha\beta^3(1-\delta)}\left(\frac{T}{1-\delta}+\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\right)\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{4\sqrt{3T}(1+\delta)}{\beta^2(1-\delta)}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left(\frac{(1+2\alpha+\alpha\beta)(\delta+1)T}{\beta^2(1-\delta)}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}+1\right)\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_3(T)=\frac{4\sqrt{3}(1+\delta)}{\beta^2(1-\delta)}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\left(\frac{(1+2\alpha+\alpha\beta)(\delta+1)T}{\beta^2(1-\delta)}\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}+1\right)T,$$

$$C_3(T)=\left[\frac{2\sqrt{3}(1+\delta)}{1-\delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{4(1+2\alpha+\alpha\beta)}{\beta^3(1-\delta)}\sqrt{\frac{3(1+\beta)}{\alpha}}\left(\frac{T}{2}+\frac{\delta}{1-\delta}\left(T+\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\right)\right)\right]T\left\|p\left(t\right)\right\|_{C[0,T]},$$

$$D_3(T)=\frac{12}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{T(1+\beta)}{\alpha}}\left\|g_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\left[1+\delta+\right.$$

$$\left.+\frac{2(1+2\alpha+\alpha\beta)}{\beta^2}\left(\frac{T}{2}+\frac{\delta}{1-\delta}\left(T+\sqrt{\frac{1+\beta}{\alpha}}\right)\right)\right],$$

$$A_4(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|\left(h_1''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx\right)g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|\left(h_2''(t)-f_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right)\int_0^1 g(x,t)\,dx\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\left|g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 g(x,t)\,dx\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1+\delta}{\beta}\left[\frac{2\sqrt{2}(1+\delta)}{1-\delta}\left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2\sqrt{2}}{1-\delta}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{2\sqrt{2T}(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left\|f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]+$$

$$\left.\left.+2\sqrt{2}\left\|\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}\right\}\right\},$$

$$B_4(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left|g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 g(x,t)\,dx\right|\right\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\delta}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}T+1\right),$$

$$C_4(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left\|\left|g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 g(x,t)\,dx\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{T(1+\alpha)(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\left\|p\left(t\right)\right\|_{C[0,T]},$$

$$D_4(T)=2\sqrt{2}\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\left|g_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\int_0^1 g(x,t)\,dx\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{T}(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left\|g_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+\left\|\left\|g_{xx}(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}\right),$$

$$A_5(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h_1(t)\left(h_2''(t)-f_x\left(\frac{1}{2},t\right)\right)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left\|h_2(t)\left(h_1''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx\right)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left\|\frac{1}{2}\left|h_1(t)\right|+\left|h_2(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1+\delta}{\beta}\left[\frac{2\sqrt{2}(1-\delta)}{1-\delta}\left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2\sqrt{2}}{1-\delta}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{2\sqrt{2T}(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left\|f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]+$$

$$\left.\left.+\,2\sqrt{2}\left\|\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}\right\}\right\},$$

$$B_5(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\frac{1}{2}\left|h_1(t)\right|+\left|h_2(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\delta}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}T+1\right),$$

$$C_5(T)=\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\frac{1}{2}\left|h_1(t)\right|+\left|h_2(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{T(1+\alpha)(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\left\|p\,(t)\right\|_{C[0,T]},$$

$$D_5(T)=2\sqrt{2}\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\frac{1}{2}\left|h_1(t)\right|+\left|h_2(t)\right|\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{T}(1+\delta)}{\beta(1-\delta)}\sqrt{\frac{\beta+1}{\alpha}}\left\|g_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+\left\|\left\|g_{xx}(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Из неравенств (3.13)–(3.17) заключаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^6}+\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\tilde{b}(t)\right\|_{C[0,T]}\leqslant A(T)+$$

$$+B(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^6}+C(T)\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^6}+D(T)\left\|b(t)\right\|_{C[0,T]}, \tag{3.18}$$

где

$$A(T)=\sum_{i=1}^{5}A_i(T),\ \ B(T)=\sum_{i=1}^{5}B_i(T),\ \ C(T)=\sum_{i=1}^{5}C_i(T),\ \ D(T)=\sum_{i=1}^{5}D_i(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия Q_1–Q_6 и*

$$(B(T)(A(T)+2)+C(T)+D(T))(A(T)+2)<1. \tag{3.19}$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^6}\leqslant R=A(T)+2)$ пространства E_T^6 единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве E^6_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{3.20}$$

где $z = \{u, a, b\}$, компоненты $\Phi_i(u, a, b)$ $(i = 1, 2, 3)$ оператора $\Phi(u, a, b)$ определены правыми частями уравнений (3.10), (3.11) и (3.12).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a, b)$ в шаре $K = K_R$ из E^6_T. Аналогично (3.18) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered} \|\Phi z\|_{E^6_T} \leqslant A(T) + B(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^6_{2,T}} + \\ + C(T)\,\|u(x,t)\|_{B^6_{2,T}} + D(T)\,\|b(t)\|_{C[0,T]}\,, \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E^6_T} \leqslant B(T)R(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^6_{2,T}}) + \\ + C(T)\,\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^6_{2,T}} + D(T)\,\|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}\,. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Тогда из оценок (3.21) и (3.22), с учетом (3.19), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a, b\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (3.20), то есть является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (3.10), (3.11) и (3.12).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^6_{2,T}$, имеет непрерывные производные $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t)$,$u_{xxxx}(x,t)$ и $u_{xxxxx}(x,t)$ в D_T.

Аналогично [14], можно показать, что $u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttx}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$, $u_{ttxxxx}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), причем в силу леммы 1 оно единственное. Теорема доказана. □

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2,*

$$\left(\|p(t)\|_{C[0,T]} + \frac{(2\delta+1)T\,(A(T)+2)}{1+\delta}\right)T < 1,$$

и выполнены условия согласования (1.8), (1.9). *Тогда задача* (1.1)–(1.5) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^6_{T,T}} \leqslant A(T) + 2)$ *из* E^6_T *единственное классическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006, 248 с.
2. Шабров С.А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 2. С. 168–179. https://elibrary.ru/item.asp?id=23478452
3. Benney D.J., Luke J.C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 43. P. 309–313. https://doi.org/10.1002/sapm1964431309
4. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504. http://mi.mathnet.ru/dan28329
5. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

6. Eskin G., Inverse problems for general second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients // Bulletin of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 7. Issue 2. P. 247–307. https://doi.org/10.1007/s13373-017-0100-2
7. Jiang D.J., Liu Y.K., Yamamoto M. Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part // Journal of Differential Equations. 2017. Vol. 262. Issue 1. P. 653–681. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.09.036
8. Nakamura G., Watanabe M., Kaltenbacher B. On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave // Inverse Problems. 2009. Vol. 25. Issue 3. 035007. https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/3/035007
9. Shcheglov A.Y. Inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation with final overdetermination // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2006. Vol. 46. Issue 4. P. 616–635. https://doi.org/10.1134/S0965542506040099
10. Janno J., Seletski A. Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equations by measuring solitary waves // Wave Motion. 2015. Vol. 52. P. 15–25. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.08.005
11. Кожанов А.И., Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для одного класса уравнений соболевского типа // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3. Вып. 2. С. 153–171. https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13203
12. Юлдашев Т.К. Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Benney–Luke с вырожденным ядром // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. Вып. 3. С. 19–41. https://doi.org/10.26456/vtpmk500
13. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска–Лява с дополнительным интегральным условием // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 1. С. 75–83. http://mi.mathnet.ru/sjim768
14. Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 503–514. https://doi.org/10.20537/vm160405
15. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85. http://mi.mathnet.ru/ivm7235
16. Мегралиев Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральными условиями // Владикавк. матем. журн. 2013. Т. 15. № 4. С. 30–43. http://mi.mathnet.ru/vmj482

Поступила в редакцию 24.05.2019

Мегралиев Яшар Топуш оглы, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский государственный университет, AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.
E-mail: yashar_aze@mail.ru

Велиева Бахар Камал кызы, аспирант, Гянджинский государственный университет, AZ2000, Азербайджан, г. Гянджа, ул. Хатаи, 187.
E-mail: bahar.veliyeva.91@inbox.ru

МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 2

Ya. T. Megraliev, B. K. Velieva

Inverse boundary value problem for the linearized Benney–Luke equation with nonlocal conditions

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 166–182 (in Russian).

Keywords: inverse boundary value problem, Benney–Luke equation, existence, uniqueness of classical solution.

MSC2010: 35-XX

DOI: 10.20537/vm190203

The paper investigates the solvability of an inverse boundary-value problem with an unknown coefficient and the right-hand side, depending on the time variable, for the linearized Benney–Luke equation with non-self-adjoint boundary and additional integral conditions. The problem is considered in a rectangular domain. A definition of the classical solution of the problem is given. First, we consider an auxiliary inverse boundary-value problem and prove its equivalence (in a certain sense) to the original problem. To investigate the auxiliary inverse boundary-value problem, the method of separation of variables is used. By applying the formal scheme of the variable separation method, the solution of the direct boundary problem (for a given unknown function) is reduced to solving the problem with unknown coefficients. Then, the solution of the problem is reduced to solving a certain countable system of integro-differential equations for the unknown coefficients. In turn, the latter system of relatively unknown coefficients is written as a single integro-differential equation for the desired solution. Next, using the corresponding additional conditions of the inverse auxiliary boundary-value problem, to determine the unknown functions, we obtain a system of two nonlinear integral equations. Thus, the solution of an auxiliary inverse boundary-value problem is reduced to a system of three nonlinear integro-differential equations with respect to unknown functions. A special type of Banach space is constructed. Further, in a ball from a constructed Banach space, with the help of contracted mappings, we prove the solvability of a system of nonlinear integro-differential equations, which is also the unique solution to the auxiliary inverse boundary-value problem. Finally, using the equivalence of these problems the existence and uniqueness of the classical solution of the original problem are proved.

REFERENCES

1. Algazin S.D., Kiiko I.A. *Flatter plastin i obolochek* (Flutter of plates and shells), Moscow: Nauka, 2006.
2. Shabrov S.A. About the estimates of the function influence of a mathematical model of fourth order, *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 168–179 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=23478452
3. Benney D.J., Luke J.C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude, *Journal of Mathematical Physics*, 1964, vol. 43, pp. 309–313. https://doi.org/10.1002/sapm1964431309
4. Tikhonov A.N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501–504 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan28329
5. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.T. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* (Ill-posed problems of mathematical physics and analysis), Moscow: Nauka, 1980.
6. Eskin G. Inverse problems for general second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients, *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 7, issue 2, pp. 247–307. https://doi.org/10.1007/s13373-017-0100-2
7. Jiang D.J., Liu Y.K., Yamamoto M. Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part, *Journal of Differential Equations*, 2017, vol. 262, issue 1, pp. 653–681. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.09.036

8. Nakamura G., Watanabe M., Kaltenbacher B. On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave, *Inverse Problems*, 2009, vol. 25, issue 3, 035007. https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/3/035007
9. Shcheglov A.Y. Inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation with final overdetermination, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, issue 4, pp. 616–635. https://doi.org/10.1134/S0965542506040099
10. Janno J., Seletski A. Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equations by measuring solitary waves, *Wave Motion*, 2015, vol. 52, pp. 15–25. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.08.005
11. Kozhanov A.I., Namsaraeva G.V. Linear inverse problems for a class of equations of Sobolev type, *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2018, vol. 3, issue 2, pp. 153–171 (in Russian). https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13203
12. Yuldashev T.K. On a nonlocal inverse problem for a Benney–Luke type integro-differential equation with degenerate kernel, *Vestnik TVGU. Seriya: Prikladnaya Matematika*, 2018, issue 3, pp. 19–41 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk500
13. Mehraliev Ya.T. Inverse problem of the Boussinesq–Love equation with an extra integral condition, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 75–83 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/sjim768
14. Megraliev Ya.T., Alizade F.Kh. Inverse boundary value problem for a Boussinesq type equation of fourth order with nonlocal time integral conditions of the second kind, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 503–514 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160405
15. Sabitov K.B., Martem'yanova N.V. A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, issue 2, pp. 61–74. https://doi.org/10.3103/S1066369X11020083
16. Mehraliev Ya.T. On an inverse boundary value problem for the second order elliptic equation with additional integral condition, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2013, vol. 15, no. 4, pp. 30–43 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj482

Received 24.05.2019

Megraliev Yashar Topush, Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential and Integral Equations, Baku State University, ul. Z. Khalilova, 23, Baku, AZ1148, Azerbaijan.
E-mail: yashar_aze@mail.ru

Velieva Bakhar Kamal, Post-Graduate Student, Ganja State University, ul. Khatai, 187, Ganja, AZ2000, Azerbaijan.
E-mail: bahar.veliyeva.91@inbox.ru