ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 2

УДК 517.518.126

© *В. Я. Дерр*

О РАСШИРЕНИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

Исследуются свойства правильных функций, а также ограниченных функций, имеющих не более чем счетное множество точек разрыва (названных *σ-непрерывными*). Доказана теорема об интегрируемости по Риману–Стилтьесу σ-непрерывных функций по непрерывным функциям ограниченной вариации, а также предельная теорема Хелли для таких интегрируемых и интегрирующих функций. Процесс интегрирования по Риману–Стилтьесу расширяется на случай интегрирования σ-непрерывных функций по произвольным функциям ограниченной вариации: вводится $(*)$-интеграл как сумма классического интеграла Римана–Стилтьеса по непрерывной части функции ограниченной вариации и суммы произведений значений интегрируемой функции на скачки интегрирующей. Таким образом, $(*)$-интеграл позволяет интегрировать разрывные функции по разрывным. Все свойства $(*)$-интеграла выводятся непосредственно из этого определения. Так, для $(*)$-интеграла доказывается формула интегрирования по частям, теорема о перемене порядка интегрирования, а также все необходимые для дальнейшего применения предельные теоремы, в том числе предельная теорема типа теоремы Хелли.

Ключевые слова: функции ограниченной вариации, правильные функции, σ-непрерывные функции, интеграл Римана–Стилтьеса, $(*)$-интеграл.

DOI: 10.20537/vm190201

Определение решения дифференциального уравнения, содержащего в качестве коэффициентов обобщенные функции, приводит к необходимости интегрировать в смысле Стилтьеса разрывные функции по разрывным (см., например, [1–3]). Интеграл Римана–Стилтьеса (RS-интеграл) заведомо не существует в случае, если интегрируемая и интегрирующая функции имеют общую точку разрыва (а в роли таких функций выступают первообразные коэффициентов дифференциального уравнения, точки разрыва которых могут совпадать). С другой стороны, расширения RS-интеграла, предложенные в работах [1, 2, 4–8], а также и другие модификации интеграла Стилтьеса, позволяющие интегрировать разрывные функции по разрывным, не позволяют получить предельные теоремы с нужными для применения в указанной выше области условиями.

Целью расширения, предлагаемого в настоящей работе, является сохранение такого свойства RS-интеграла, как предельная теорема Хелли. Автор отказывается от определения интеграла как предела некоторой интегральной суммы. Интеграл $(*)\int_a^b f(t)\,dg(t)$ определяется в виде суммы RS-интеграла и конечной суммы или суммы ряда (смотря по тому конечно или бесконечно множество точек разрыва интегрирующей функции). Все свойства интеграла $(*)$ (аддитивность как функции отрезка, формула интегрирования по частям, перемена порядка интегрирования, предельные теоремы) выводятся *непосредственно из определения*. Формула интегрирования по частям используется затем для дальнейшего расширения $(*)$-интеграла.

В статье также приводятся новые результаты для RS-интеграла (указывается неизвестная ранее пара классов существования, доказывается предельная теорема Хелли для этой пары).

§ 1. Классы функций

Отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$ будем считать фиксированным. Функция $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ называется *правильной* [7–13], если существуют конечные односторонние пределы $x(a+)$, $x(t+)$, $x(t-)$, $x(b-)$, $t\in[a,b]$. Непрерывные, кусочно непрерывные функции, функции ограниченной вариации являются правильными. Однако этим списком множество правильных функций не исчерпывается (см., например, [12, с. 28]). Правильные функции ограничены; множество точек разрыва правильной функции $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ (обозначаем его $T(x)$) не более чем счетно [12, с. 58, 59]. Через $\mathbf{R}[a,b]=\mathbf{R}$ обозначим векторное пространство правильных функций с нормой

$$\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|. \tag{1.1}$$

Относительно этой нормы $\mathbf{R}$ — банахово пространство [13, с. 70].

Обозначаем также $\mathbf{C}[a,b]=\mathbf{C}$, $\mathbf{BV}[a,b]=\mathbf{BV}$, $\mathbf{CBV}=\mathbf{C}\bigcap\mathbf{BV}$ соответственно банаховы пространства непрерывных функций, функций ограниченной вариации и непрерывных функций ограниченной вариации, с нормами соответственно

$$\|x\|_{\mathbf{C}}=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|,\quad \|x\|_{\mathbf{BV}}=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|+\bigvee_a^b(x),\quad \|x\|_{\mathbf{CBV}}=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|+\bigvee_a^b(x). \tag{1.2}$$

Приведенная выше норма $\|x\|_{\mathbf{BV}}$ эквивалентна стандартной норме пространства функций ограниченной вариации [13, с. 69, 274].

Для правильных функций x рассмотрим скачок $\sigma_t(x)\doteq x(t+)-x(t-)$, правый скачок $\sigma_t^+(x)\doteq x(t+)-x(t)$, левый скачок $\sigma_t^-(x)\doteq x(t)-x(t-)$; очевидно, $\sigma_t(x)=\sigma_t^+(x)+\sigma_t^-(x)$. Если $x\in\mathbf{BV}$, то, как известно (см., например, [12, с. 22]), x имеет представление

$$x(t)=x_{\mathfrak{c}}(t)+x_{\mathfrak{d}}(t), \tag{1.3}$$

где $x_{\mathfrak{d}}$ — функция скачков, $x_{\mathfrak{d}}(a)=0$, при $t>a$ $x_{\mathfrak{d}}(t)=\sigma_a^+(x)+\sum\limits_{t_k<t}\sigma_{t_k}(x)+\sigma_t^-(x)$ (суммирование распространяется на все точки разрыва $t_k\in T(x)$, удовлетворяющие неравенству $t_k<t$), а $x_{\mathfrak{c}}\in\mathbf{CBV}$, $x_{\mathfrak{c}}(t)=x(t)-x_{\mathfrak{d}}(t)$ — непрерывная часть x $\big(x_{\mathfrak{c}}(a)=x(a)\big)$. Заметим, что (см., например, [12, с. 26])

$$\bigvee_a^b(x_{\mathfrak{d}})=|\sigma_a^+(x)|+\sum_{t_k\in T(x)\cap(a,b)}|\sigma_{t_k}(x)|+|\sigma_b^-(x)|,\qquad \bigvee_a^b(x)=\bigvee_a^b(x_{\mathfrak{c}})+\bigvee_a^b(x_{\mathfrak{d}}).$$

Рассмотрим пространство $\mathbf{H}[a,b]=\mathbf{H}$ простых (ступенчатых) функций $x\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, для которых абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{t\in T(x)}\sigma_t(x)$ и $x(a)=0$, с нормой $\|x\|_{\mathbf{H}}\doteq\sum\limits_{t\in T(x)}|\sigma_t(x)|$; $\mathbf{H}$, очевидно, изометрично изоморфно пространству последовательностей ℓ; пусть далее, $\mathbf{HC}[a,b]=\mathbf{HC}=\mathbf{H}\dot{+}\mathbf{C}$; элементы $\mathbf{HC}$, таким образом, однозначно представимы в виде (1.3), где $x_{\mathfrak{d}}\in\mathbf{H}$, а непрерывная функция $x_{\mathfrak{c}}$ теперь может иметь бесконечную полную вариацию; положим также

$$\|x\|_{\mathbf{HC}}\doteq\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|+\sum_{t\in T(x)}|\sigma_t(x)|;$$

$\mathbf{HC}$ — банахово пространство относительно этой нормы.

Наконец, пусть $\mathbf{M}[a,b]=\mathbf{M}$ $\big(\mathbf{N}[a,b]=\mathbf{N}$, $\mathcal{R}[a,b]=\mathcal{R}\big)$ — векторное пространство ограниченных функций $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ $\big($ограниченных функций, для которых множество $T(x)$ не более чем счетно, соответственно, интегрируемых по Риману на $[a,b]\big)$ с нормой (1.1). Согласно теореме Лебега об интегрируемости по Риману для $x\in\mathcal{R}$ множество $T(x)$ имеет лебегову меру нуль. Для сокращения речи будем называть функции $x\in\mathbf{N}$ *σ-непрерывными*.

Для удобства ссылок приведем несколько простых утверждений.

Предложение 1 (см. [12, с. 59]). *Пусть $x\in\mathbf{R}[a,b]$, $c\in(a,b]$ $\big(c\in[a,b)\big)$. Тогда*

$$\lim_{t\to c+0}x(t\pm)=x(c+)\qquad\Big(\lim_{t\to c-0}x(t\pm)=x(c-)\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, что $\lim\limits_{t\to c-}x(t+)=x(c-)$. Функция $\tilde{x}(t)=x(t+)$ непрерывна справа и отличается от $x(\cdot)$ лишь в точках разрыва. Если c — точка непрерывности $x(\cdot)$ (а значит, и $\tilde{x}(\cdot)$), то $\tilde{x}(c-)=\tilde{x}(c)=x(c)=x(c-)$, то есть утверждение верно. Пусть c — точка разрыва $x(\cdot)$ и $\tilde{x}(\cdot)$. Найдется последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек непрерывности $x(\cdot)$ такая, что $t_k\to c-0$ и $\Big(\forall\varepsilon>0\ \exists N\ (\forall k>N)\implies(|\tilde{x}(c-)-\tilde{x}(t_k)|<\varepsilon)\Big)$. Но $\tilde{x}(t_k)=x(t_k)$, поэтому $|\tilde{x}(c-)-x(t_k)|<\varepsilon$, и значит, $\tilde{x}(c-)=\lim\limits_{k\to\infty}x(t_k)=x(c-)$.

Остальные утверждения доказываются аналогично. $\square$

Пусть $h\colon[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ — функция двух переменных; назовем функции $h(\cdot,s)$ $(s\in[c,d])$ и $h(t,\cdot)$ $(t\in[a,b])$ сечениями функции $h(\cdot,\cdot)$.

Предложение 2. *Пусть сечения $h(\cdot,s)$ $(s\in[c,d])$ и $h(t,\cdot)$ $(t\in[a,b])$ — правильные функции. Тогда найдется такая не зависящая от t и s константа M, что $|h(t,s)|\leqslant M$ для всех $(t,s)\in[a,b]\times[c,d]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: для любого натурального n найдутся такие t_n и s_n, что $|h(t_n,s_n)|\geqslant n$; не ограничивая общности, можно считать, что

а) $t_n\to t_*$, $s_n\to s_*$ $\big(n\to\infty$, $(t_*,s_*)\in[a,b]\times[c,d]\big)$;

б) последовательность $\{|h(t_n,s_n)|\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, и значит,

$$|h(t_n,s_n)|\to+\infty\quad(n\to\infty);$$

в) $t_n\to t_*-$ или $t_n\to t_*+$, $s_n\to s_*-$ или $s_n\to s_*+$ $(n\to\infty)$;

ибо в противном случае можно в каждом пункте перейти к соответствующей подпоследовательности. Пусть, например, $t_n\to t_*-$, $s_n\to s_*-$; так как в любой окрестности точки (t_*,s_*) величина $|h(t_n,s_n)|$ принимает сколь угодно большие значения, то не существует конечных пределов $|h(t-,s_*)|$ и $|h(t_*,s-)|$, что противоречит правильности сечений $h(\cdot,s)$, $h(t,\cdot)$. $\square$

Замечание 1. В отсутствие правильности ограниченность обоих сечений, вообще говоря, не означает ограниченности $h(\cdot,\cdot)$.

Предложение 3. *Пусть сечения $h(\cdot,s)$ $(s\in[c,d])$ и $h(t,\cdot)$ $(t\in[a,b])$ — функции ограниченной вариации. Тогда функции $v(s)\doteq\bigvee\limits_a^b\big(h(\cdot,s)\big)$ и $w(t)\doteq\bigvee\limits_a^b\big(h(t,\cdot)\big)$ также имеют конечную полную вариацию.*

Следующее утверждение вытекает непосредственно (см. [12, с. 23]) из свойств функции

$$x_\pi(t) \doteq \bigvee_a^t(x), \qquad x \in \mathbf{BV} \qquad \Bigl(V \doteq \bigvee_a^b(x) = x_\pi(b)\Bigr). \tag{1.4}$$

Предложение 4. *Пусть* $x \in \mathbf{CBV}$, $\Delta \doteq \{(t,s)\colon a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$, $v\colon \Delta \to [0,V]$; $v(s,s) = 0$, *а при* $t > s$ $v(t,s) = \bigvee_s^t(x)$. *Тогда*

а) *v непрерывна на Δ (а значит, и равномерно непрерывна на Δ);*

б) *при фиксированном s, $0\leqslant s\leqslant V$, функция v возрастает по t; при фиксированном t, $0\leqslant t\leqslant V$, функция v убывает по s;*

в) *для любого $\varepsilon > 0$ и $c \in (a,b)$ $\bigl(c = a,\ c = b\bigr)$ существует интервал $(\alpha,\beta) \ni c$ $\bigl($полуинтервал $[a,\beta)$, $(\alpha,b]\bigr)$ такой, что $v(\beta,\alpha) < \varepsilon$ $\bigl(v(\beta,a) < \varepsilon$, $v(b,\alpha) < \varepsilon\bigr)$.*

Предложение 5. *Имеют место строгие* (*теоретико-множественные*) *включения*

$$\underline{\mathbf{AC} \subset \mathbf{CBV} \subset \mathbf{BV}}, \qquad \underline{\mathbf{H} \subset \mathbf{BV} \subset \mathbf{HC}} \subset \underline{\mathbf{R} \subset \mathbf{N} \subset \mathcal{R} \subset \mathbf{M}}, \tag{1.5}$$

причем подчеркнутые включения являются также вложениями банаховых пространств (**AC** — пространство абсолютно непрерывных функций с обычной нормой, которая эквивалентна норме **BV** (1.2)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все теоретико-множественные включения очевидны. В доказательстве нуждается только полнота пространств $\mathcal{R}$ и $\mathbf{N}$ (полнота $\mathbf{R}$ доказана в книге [12, с. 71, 278]; см. также [11]).

Покажем, что $\mathcal{R}$ $\bigl(\mathbf{N}\bigr)$ замкнуто в $\mathbf{M}$ $\bigl(\mathcal{R}\bigr)$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{M}$, $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ $(n \to \infty)$; в силу полноты $\mathbf{M}$, $x \in \mathbf{M}$, а в силу равномерной сходимости имеет место включение

$$T(x) \subset \bigcup_{n=1}^\infty T(x_n). \tag{1.6}$$

В самом деле, пусть $C \doteq [a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^\infty T(x_n)$; точки этого множества — точки непрерывности всех членов последовательности; в силу равномерной сходимости последовательности, это и точки непрерывности функции x; значит, точки множества C не содержат точек из $T(x)$; этим включение (1.6) доказано.

Из этого включения и теоремы Лебега (критерия интегрируемости по Риману) следует, что если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}$ $\bigl(\subset \mathbf{N}\bigr)$, то и $x \in \mathcal{R}$ $\bigl(\in \mathbf{N}\bigr)$; следовательно, $\mathcal{R}$ $\bigl(\mathbf{N}\bigr)$ замкнуто в $\mathbf{M}$ $\bigl(\mathcal{R}\bigr)$. А это означает, что $\mathcal{R}$ $\bigl(\mathbf{N}\bigr)$ — банахово пространство (внимание: речь идет о норме (1.1)). $\square$

Предложение 6. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{R}$, $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$; *тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{s\to t\pm} x_n(s) = x(t\pm)$ *и, следовательно,* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_t(x_n) = \sigma_t(x)$ $\bigl(t \in (a,b)\bigr)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_a^+(x_n) = \sigma_a^+(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_b^-(x_n) = \sigma_b^-(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 5 следует, что $x \in \mathbf{R}$, а равномерная сходимость означает, что $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ в $\mathbf{R}$. В силу леммы Шатуновского–Мура [14, с. 40] порядок предельных переходов можно поменять: $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{s\to t\pm} x_n(s) = \lim\limits_{s\to t\pm} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(s) = x(t\pm)$. $\square$

§ 2. Об интеграле Римана–Стилтьеса

Напомним: интеграл Римана–Стилтьеса (RS-интеграл) определяется как предел при неограниченном измельчении дробления интегральных сумм Стилтьеса

$$\mathfrak{S}_\tau(f,g) \doteq \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta g_k, \text{ где } \tau = \{t_k\}_{k=0}^{m}, \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b,$$

— разбиение $[a,b]$, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\Delta g_k = g(t_k) - g(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Пусть X и Y — два класса функций (например из цепочек (1.5)); скажем, что (X, Y) — *пара классов существования RS-интеграла*, если любая функция $f \in X$ интегрируема по любой функции $g \in Y$; назовем эту пару *точной,* если ни один из этих классов нельзя расширить без сужения другого. Как известно (см. например, [12]), $(\mathbf{C}, \mathbf{BV})$ — точная пара классов существования RS-интеграла; другая точная пара — $(\mathcal{R}, \mathbf{AC})$ (если ограничиваться расширениями в рамках цепочек (1.5), [12, с. 208]).

Для удобства читателя приведем известные утверждения из [12].

1. *Существование одного из интегралов* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *или* $\int_a^b g(t)\,df(t)$ *влечет существование другого и равенство*

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) + \int_a^b g(t)\,df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) \doteq f(t)g(t)\Big|_a^b$$

(формула интегрирования по частям).

Доказательство см. [12, с. 34]. □

Из этого утверждения следует, что пары $(\mathbf{BV}, \mathbf{C})$ и $(\mathbf{AC}, \mathcal{R})$ также точные.

2. *Пусть g — строго возрастающая функция, μ_g — порожденная ею мера Лебега–Стилтьеса, $f \in \mathbf{M}$; для того чтобы существовал интеграл Римана–Стилтьеса* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mu_g\big(T(f)\big) = 0$ (аналог теоремы Лебега о критерии интегрируемости функции по Риману).

Доказательство см. [12, с. 375]. □

3. Пусть $f \in \mathbf{R}$, $g \in \mathbf{BV}$ и интеграл $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ существует. Тогда

$$\int_t^{t+h} f(s)\,dg(s) = f(\pm t)\big(g(\pm t) - g(t)\big) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to \pm 0.$$

Доказательство см. [12, с. 62]. □

Теорема 1. *Пусть $g \in \mathbf{CBV}$, $f \in \mathbf{N}$. Тогда интеграл Римана–Стилтьеса* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *существует* $\big((\mathbf{N}, \mathbf{CBV})$ *и* $(\mathbf{CBV}, \mathbf{N})$ *— пары классов существования RS-интеграла*$\big)$.

Доказательство. Непрерывную функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности возрастающих непрерывных функций:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t), \tag{2.1}$$

причем можно добиться строгого возрастания этих функций. Так как множество $T(f)$ не более чем счетно, то $\mu_{g_1}\big(T(f)\big) = \mu_{g_2}\big(T(f)\big) = 0$, и остается сослаться на утверждение **2.** □

Теорема 2. *Пусть* $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ $(n \to \infty)$, $g \in \mathbf{CBV}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует доказательству теоремы 4.3 из [12, с. 51]. □

Теорема 3. *Пусть* $g \in \mathbf{CBV}$, $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \to f(t)$, $t \in [a,b]$ $(n \to \infty)$, $f \in \mathbf{N}$, $\|f_n\| \leqslant M$ $(n \in \mathbb{N})$ *при некотором* M. *Тогда выполняется соотношение* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае возрастающей g см. [12, с. 129]. В общем случае воспользуемся представлением (2.1) и сведем утверждение к уже доказанному случаю. □

Теорема 4. *Пусть* $g_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ $(n \to \infty)$, $f \in \mathbf{CBV}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\,dg_n(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем утверждение **1** и теорему 2:

$$\int_a^b f(t)\,dg_n(t) = f(t)g_n(t)\Big|_a^b - \int_a^b g_n(t)\,df(t) \to f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b g(t)\,df(t) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dg(t) \quad (n \to \infty).$$

Теорема 5 (теорема Хелли для пары классов $(\mathbf{N},\mathbf{CBV})$). *Пусть* $f \in \mathbf{N}$, $g_n \in \mathbf{CBV}$ $(n \in \mathbb{N})$, $g_n(t) \to g(t)$ $(t \in [a,b], n \to \infty)$, $g \in \mathbf{C}$, $\bigvee\limits_a^b(g_n) \leqslant V$ $(V > 0)$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\,dg_n(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точно так же, как при доказательстве теоремы Хелли (см. [12, с. 52]) показывается, что $g \in \mathbf{BV}$, и значит, $g \in \mathbf{CBV}$, причем $\bigvee\limits_a^b(g_n) \leqslant V$.

Пусть $g_\pi(t) \doteq \bigvee\limits_a^t(g)$ (см. (1.4)), μ_{g_π} — мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией g_π. Рассмотрим функцию $\widehat{g}\colon \Delta \to [0,V]$, $\Delta \doteq \{(t,s)\colon 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant V\}$,

$$\widehat{g}(s,\, s) = 0, \quad \text{а для } s < t \quad \widehat{g}(t,\, s) \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \bigvee_s^t(g), \bigvee_s^t(g_n) \right\}.$$

Очевидно (см. предложение 4), $\widehat{g}$ непрерывна на Δ, следовательно, $\widehat{g}$ равномерно непрерывна на Δ; для $\widehat{g}$ выполняется утверждение *в*) предложения 4.

Пусть $\Omega(f)$ — колебание f на всем $[a,\, b]$, $\gamma > 0$ — произвольно, и $T(f) = \{c_1, c_2, \ldots\}$. В силу предложения 4 и равенства $\lim\limits_{(t',s')\to(s,s)} \widehat{g}(t',s') = \widehat{g}(s,s) = 0$ найдется интервал $(a_k, b_k) \ni c_k$ такой, что $\widehat{g}(b_k, a_k) < \dfrac{\gamma}{2^k \cdot \Omega(f)}$, $k = 1, 2, \ldots$; таким образом, $T(f)$ покрыто открытым множеством $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ так, что

$$\mu_{g_\pi}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigvee_{a_k}^{b_k}(g) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}(b_k,\, a_k) < \frac{\gamma}{\Omega(f)}, \tag{2.3}$$

а также

$$\mu_{g_{n,\pi}}(G)=\sum_{k=1}^{\infty}\bigvee_{a_k}^{b_k}(g_n)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{g}(b_k,\,a_k)<\frac{\gamma}{\Omega(f)}. \tag{2.4}$$

$\Big($Если $c_{k_0}=a$ $\big(c_{k_1}=b\big)$, то речь идет о полуинтервале $[a,\,b_{k_0})$ $\big((a_{k_1},b]\big)$; G в этом случае относительно открыто.$\Big)$ Множество $F=[a,b]\setminus G$ замкнуто и f непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на F. Поэтому найдется такое $\delta>0$, что для любого $t_0\in F$ колебание $\omega(f)$ функции f на множестве $\big[t_0-\frac{\delta}{2},t_0+\frac{\delta}{2}\big]\bigcap F$ удовлетворяет неравенству $\omega(f)<\gamma$.

Зафиксируем произвольное разбиение $\tau=\{t_k\}_{k=0}^{m}$ отрезка $[a,b]$, диаметр которого $d(\tau)<\delta$. Пусть $\mathcal{J}_1',\dots,\mathcal{J}_p'$ — промежутки $[t_{k-1},t_k]$ этого разбиения, которые содержат хотя бы одну точку множества F, а $\mathcal{J}_1'',\dots,\mathcal{J}_q''$ $(p+q=m)$ — остальные промежутки разбиения τ; промежутки второго типа содержатся в G.

Тогда

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{S}_\tau(f,g)-\int_a^b f(t)\,dg(t)\right|&=\left|\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)\Delta g_k-\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}f(t)\,dg(t)\right|=\\&=\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(\xi_k)-f(t))\,dg(t)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|f(\xi_k)-f(t)|\,dg_\pi(t)\leqslant\\&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\omega_{\tau k}(f)\int_{t_{k-1}}^{t_k}dg_\pi(t)=\sum_{k=1}^{m}\omega_{\tau k}(f)\Delta g_{\pi k}\doteq S\end{aligned}$$

Сумму S разобьем на две:

$$S=\sum_{i=1}^{p}\omega_i'(f)\mu_{g_{\pi i}}(\mathcal{J}_i')+\sum_{j=1}^{q}\omega_j''(f)\mu_{g_{\pi j}}(\mathcal{J}_j'').$$

$(\omega_i'(f)$ $\big(\omega_j''(f)\big)$ — колебания функции f на промежутках первого (второго) типа). По построению с учетом (2.3)

$$S<\gamma\sum_{i=1}^{p}\mu_{g_\pi}(\mathcal{J}_i')+\Omega(f)\sum_{j=1}^{q}\mu_{g_\pi}(\mathcal{J}_j'')<\left(\gamma\bigvee_a^b(g)+\gamma\right)=\gamma\left(\bigvee_a^b(g)+1\right)=\gamma(V+1).$$

Таким образом, для разбиения τ имеет место оценка

$$\left|\mathfrak{S}_\tau(f,g)-\int_a^b f(t)\,dg(t)\right|<\gamma\cdot(V+1). \tag{2.5}$$

Точно так же, учитывая (2.4), получим, что

$$\left|\mathfrak{S}_\tau(f,\,g_n)-\int_a^b f(t)\,dg_n(t)\right|<\gamma\cdot(V+1)\quad(n\in\mathbb{N}).$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Положим во всех предыдущих рассуждениях $\gamma=\dfrac{\varepsilon}{3(V+1)}$. Так как в силу поточечной сходимости $g_n(t)\to g(t)$ $\mathfrak{S}_\tau(f,g_n)\to\mathfrak{S}_\tau(f,g)$ $(n\to\infty)$, то найдется такое натуральное N, что при $n>N$ выполняется неравенство

$$|\mathfrak{S}_\tau(f,\,g_n)-\mathfrak{S}_\tau(f,\,g)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.6}$$

Согласно оценкам (2.5)–(2.6) при таких n

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg_n(t)-\int_a^b f(t)\,dg(t)\right|\leqslant\left|\int_a^b f(t)\,dg_n(t)-\mathfrak{S}_\tau(f,\,g_n)\right|+|\mathfrak{S}_\tau(f,g_n)-\mathfrak{S}_\tau(f,g)|+$$
$$+\left|\mathfrak{S}_\tau(f,\,g)-\int_a^b f(t)\,dg(t)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

□

§ 3. Определение $(*)$-интеграла

1. Пусть $f\in\mathbf{N}$, $g\in\mathbf{BV}$, $a<b$ (см. (1.5)). Положим

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg(t)\doteq\int_a^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)+\Big(f(a)\sigma_a^+(g)+\sum_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}f(t)\sigma_t(g)+f(b)\sigma_b^-(g)\Big),\quad(3.1)$$

Первое слагаемое в правой части (3.1) представляет собой интеграл Римана–Стилтьеса по отрезку $[a,b]$ (ср. [7]). Существование этого интеграла обеспечивается теоремой 1. В силу конечности полной вариации функции g абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}\sigma_t(g)$, а из ограниченности функции f (и, следовательно, ограниченности последовательности $\{f(t)\}_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}$) следует и абсолютная сходимость ряда в (3.1).

2. Непосредственно из определения (3.1) следует, что

а) $(*)$-интеграл линеен относительно интегрируемой (f) и интегрирующей (g) функций;

б) имеет место оценка (см. [7]) $\left|(*)\displaystyle\int_a^b f(t)\,dg(t)\right|\leqslant\|f\|_{\mathbf{N}}\bigvee_a^b(g)$;

в) пусть $[c,d]\subset[a,b]$ $(c<d)$; интеграл $(*)\displaystyle\int_c^d f(t)\,dg(t)$ отвечает отрезку $[c,d]$ и определяется по формуле (3.1), где в роли a (b) выступает c (d); разумеется, непрерывная часть функции g на отрезке $[c,d]$ отличается от непрерывной части этой функции на отрезке $[a,b]$ на константу (эта константа равна $m\doteq\sum\limits_{s<c,\,s\in T(g)}\sigma_s(g)+\sigma_c^-(g)$), однако это не влияет на величину интеграла Римана–Стилтьеса $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)$;

г) $(*)$-интеграл аддитивен в естественном смысле: если $a<c<b$, то

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg(t)=(*)\int_a^c f(t)\,dg(t)+(*)\int_c^b f(t)\,dg(t)\qquad(3.2)$$

(аддитивность интеграла как функции отрезка); этот факт нуждается в более подробном обосновании. Как уже отмечалось в п. в), можно считать, что в интегралах Римана–Стилтьеса

$$\int_a^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t),\qquad\int_a^c f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t),\qquad\int_c^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)$$

одна и та же интегрирующая функция (на самом деле в последнем интеграле интегрирующая функция отличается на константу m, но это на величину интеграла не влияет); поэтому

$$\int_a^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)=\int_a^c f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)+\int_c^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t);$$

а так как $\sigma_c(g) = \sigma_c^+(g) + \sigma_c^-(g)$, то

$$\sum_{t \in T(g)} f(t)\sigma_t(g) = \sum_{t \in T(g),\, t \leqslant c} f(t)\sigma_t(g) + \sum_{t \in T(g),\, t \geqslant c} f(t)\sigma_t(g);$$

два выделенных равенства и означают справедливость утверждения (3.2).

Теорема 6. *Пусть* $f \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{BV}$. *Тогда* $\Phi(t) \doteq (*)\int_a^t f(s)\,dg(s)$ — *функция ограниченной вариации;* $\Phi(t+) = f(t)\sigma_t^+(g)$, $\Phi(t-) = f(t)\sigma_t^-(g)$, $\sigma_t(\Phi) = f(t)\sigma_t(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного разбиения $\{t_k\}_{k=0}^n$ в силу утверждения **2** б)

$$\sum_{k=1}^n \bigl|\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})\bigr| = \sum_{k=1}^n \left|(*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dg(t)\right| \leqslant \|f\|_{\mathbf{N}} \sum_{k=1}^n \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k}(g) = \|f\|_{\mathbf{N}} \bigvee_a^b(g).$$

Пусть $h > 0$; в силу (3.2) и (3.1)

$$\Phi(t+h) - \Phi(t) = (*)\int_t^{t+h} f(t)\,dg(t) = \int_t^{t+h} f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) +$$
$$+ f(t)\bigl(g(t+) - g(t)\bigr) + \sum_{s \in T(g) \bigcap (t, t+h)} f(s)\bigl(g(s+) - g(s-)\bigr) + f(t+h)\bigl(g(t+h) - g(t+h-)\bigr);$$

первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $h \to 0$ в силу утверждения **3** § 2; слагаемое $\sum$ во второй строке при $h \to 0+$ стремится к 0; это очевидно, если t — изолированная точка множества $T(g)$; в случае, если t — предельная точка этого множества, то в силу предложения 1 $\sum$ стремится к $f(t)\bigl(g(t+) - g(t+)\bigr) = 0$ (первый сомножитель хотя и не имеет предела, но является ограниченным); по этой же причине стремится к нулю и последнее слагаемое во второй строке; таким образом, получаем: $\Phi(t+) = f(t)\bigl(g(t+) - g(t)\bigr)$; рассмотрев разность $\Phi(t) - \Phi(t-h)$, убедимся, что $\Phi(t-) = f(t)\bigl(g(t) - g(t-)\bigr)$. $\square$

§ 4. Формула интегрирования по частям

Пусть $f \in \mathbf{HC}$, $g \in \mathbf{BV}$; тогда существует интеграл

$$(*)\int_a^b g(t)\,df(t) \doteq \int_a^b g(t)\,df_{\mathfrak{c}}(t) + \Bigl(g(a)\sigma_a^+(f) + \sum_{t \in T(f) \bigcap (a,b)} g(t)\sigma_t(f) + g(b)\sigma_b^-(f)\Bigr). \tag{4.1}$$

Теорема 7. *Пусть* $f \in \mathbf{HC}$, $g \in \mathbf{BV}$; *тогда имеет место равенство* (*формула интегрирования по частям*)

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg(t) + (*)\int_a^b g(t)\,df(t) = f(t)g(t)\Big|_a^b.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже (на протяжении всего доказательства) доопределим все функции для $t < a$ их значениями в точке a, а для $t > b$ — значениями в точке b; тогда

$$\sigma_a^+(x) = \sigma_a(x), \quad \sigma_b^-(x) = \sigma_b(x);$$

с учетом этого внеинтегральные слагаемые в (3.1) и (4.1) могут быть записаны соответственно в виде

$$\sum_{t \in T} f(t)\sigma_t(g), \qquad \sum_{t \in T} g(t)\sigma_t(f), \tag{4.2}$$

где положено $T \doteq T(f) \bigcup T(g)$ (причиной, по которой эти упрощения в записи не были сделаны сразу при определениях (3.1), (4.1), является необходимость рассматривать интегралы с переменными пределами, см., например, теорему 6).

Из определений (3.1), (4.1) $\big($с учетом записи (4.2)$\big)$ и представлений (1.3) имеем

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg(t) + (*)\int_a^b g(t)\,df(t) = F + G + H,$$

где обозначено (см. утверждение **1** § 2):

$$F \doteq \int_a^b f_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) + \int_a^b g_{\mathfrak{c}}(t)\,df_{\mathfrak{c}}(t) \ \Big(= g_{\mathfrak{c}}(t)f_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b\Big), \qquad G \doteq \int_a^b f_{\mathfrak{d}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) + \int_a^b g_{\mathfrak{d}}(t)\,df_{\mathfrak{c}}(t),$$

$$H \doteq \sum_{t\in T} f(t)\sigma_t(g) + \sum_{t\in T} g(t)\sigma_t(f);$$

В силу утверждения **1** § 2 и формулы для вычисления интеграла Римана–Стилтьеса [12, с. 53]

$$\int_a^b f_{\mathfrak{d}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) = f_{\mathfrak{d}}(t)g_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b - \int_a^b g_{\mathfrak{c}}(t)\,df_{\mathfrak{d}}(t) = f_{\mathfrak{d}}(b)g_{\mathfrak{c}}(b) - \sum_{t\in T} g_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_t(f);$$

аналогично

$$\int_a^b g_{\mathfrak{d}}(t)\,df_{\mathfrak{c}}(t) = g_{\mathfrak{d}}(t)f_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b - \int_a^b f_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{d}}(t) = g_{\mathfrak{d}}(b)f_{\mathfrak{c}}(b) - \sum_{t\in T} f_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_t(g).$$

Складывая два последних равенства, получаем

$$\begin{aligned} F + G &= g_{\mathfrak{c}}(t)f_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b + f_{\mathfrak{d}}(t)g_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b + g_{\mathfrak{d}}(t)f_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b - \int_a^b g_{\mathfrak{c}}(t)\,df_{\mathfrak{d}}(t) - \int_a^b f_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{d}}(t) = \\ &= g(t)f(t)\Big|_a^b - g_{\mathfrak{d}}(b)f_{\mathfrak{d}}(b) - \sum_{t\in T} g_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_(f) - \sum_{t\in T} f_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_t(g) = g(t)f(t)\Big|_a^b - H + S, \end{aligned}$$

где

$$S \doteq \sum_{t\in T}\big(g_{\mathfrak{d}}(t)\sigma_t(f) + f_{\mathfrak{d}}(t)\sigma_t(g)\big) - g_{\mathfrak{d}}(b)f_{\mathfrak{d}}(b) = 0$$

в силу того же утверждения **1** § 2, примененного к функциям $g_{\mathfrak{d}}$ и $f_{\mathfrak{d}}$. Таким образом, окончательно

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg(t) + (*)\int_a^b g(t)\,df(t) = F + G + H = f(t)g(t)\Big|_a^b.$$

□

Теорема 6 позволяет распространить определение $(*)$-интеграла на случай, когда интегрируемая функция $f \in \mathbf{BV}$, а интегрирующая $g \in \mathbf{N}$. А именно, в этом случае полагаем

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg(t) \doteq f(t)g(t)\Big|_a^b - (*)\int_a^b g(t)\,df(t). \tag{4.3}$$

§ 5. Перемена порядка интегрирования

Теорема 8. *Пусть выполнено одно из условий:*

$$I)\quad f\in \mathbf{BV}[a,b],\quad g\in \mathbf{BV}[c,d],\quad h(\cdot,s)\in \mathbf{R}[a,b],\quad h(t,\cdot)\in \mathbf{R}[c,d];$$

или

$$II)\quad f\in \mathbf{R}[a,b],\quad g\in \mathbf{R}[c,d],\quad h(\cdot,s)\in \mathbf{BV}[a,b],\quad h(t,\cdot)\in \mathbf{BV}[c,d]\quad (t\in[a,b],\ s\in[c,d]).$$

Тогда

$$(*)\int_a^b\left((*)\int_c^d h(t,s)\,dg(s)\right)df(t)=(*)\int_c^d\left((*)\int_a^b h(t,s)\,df(t)\right)dg(s). \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия I. Если f и g — непрерывные функции ограниченной вариации, то согласно [12, с. 64] имеет место равенство

$$\int_a^b\left(\int_c^d h(t,s)\,dg(s)\right)df(t)=\int_c^d\left(\int_a^b h(t,s)\,df(t)\right)dg(s) \tag{5.2}$$

(в этом случае оба интеграла трактуются в смысле Римана–Стилтьеса).

Из условий теоремы в силу предложения 2 следует существование $M>0$ такого, что $|h(t,s)|\leqslant M$ $(t\in[a,b],\ s\in[c,d])$. Пусть выполнены условия I. Тогда

а) абсолютно сходится двойной ряд

$$S\doteq\sum_{s\in T(g),\,t\in T(f)}h(t,s)\sigma_s(g)\sigma_t(f)\quad\text{и}\quad |S|\leqslant M\bigvee_a^b(f)\bigvee_c^d(g),$$

так как частичные суммы двойного ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{s\in T(g),\,t\in T(f)}|h(t,s)|\cdot|\sigma_s(g)|\cdot|\sigma_t(f)|$$

ограничены числом $M\bigvee_a^b(f)\bigvee_c^d(g)$;

б) по теореме Прингсгейма (см., например [15, с. 43]), абсолютно сходятся соответствующие повторные ряды, причем

$$\sum_{t\in T(f)}\sum_{s\in T(g)}h(t,s)\sigma_t(f)\sigma_s(g)=\sum_{s\in T(g)}\sum_{t\in T(f)}h(t,s)\sigma_s(g)\sigma_t(f).$$

в) абсолютно и равномерно относительно t (s) сходится ряд $\sum\limits_{s\in T(g)}h(t,s)\sigma_s(g)$ (соответственно $\sum\limits_{t\in T(f)}h(t,s)\sigma_t(f)$) (ряды мажорируются сходящимися числовыми рядами), поэтому его можно почленно проинтегрировать по непрерывной функции ограниченной вариации $f_{\mathfrak{c}}(t)$ $(g_{\mathfrak{c}}(s))$.

Обозначим

$$H_g(t)\doteq\int_c^d h(t,s)\,dg_{\mathfrak{c}}(s),\quad H_f(s)\doteq\int_a^b h(t,s)\,df_{\mathfrak{c}}(t),$$

$$\mathcal{H}_g(t)\doteq(*)\int_c^d h(t,s)\,dg(s)=H_g(t)+\sum_{s\in T}h(t,s)\sigma_s(g),$$

$$\mathcal{H}_f(s) \doteq (*)\int_a^b h(t,s)\,df(t) = H_f(s) + \sum_{t\in T} h(t,s)\sigma_t(f).$$

В этих обозначениях утверждение теоремы выглядит так:

$$(*)\int_a^b \mathcal{H}_g(t)\,df(t) = (*)\int_c^d \mathcal{H}_f(s)\,dg(s). \tag{5.3}$$

Докажем равенство (5.3).

$$(*)\int_a^b \mathcal{H}_g(t)\,df(t) = \int_a^b \mathcal{H}_g(t)\,df_{\mathfrak{c}}(t) + \sum_{t\in T(f)} \mathcal{H}_g(t)\sigma_t(f) =$$
$$= \int_a^b \left(H_g(t) + \sum_{s\in T(g)} h(t,s)\sigma_s(g)\right) df_{\mathfrak{c}}(t) + \sum_{t\in T(f)} \left(H_g(t) + \sum_{s\in T(g)} h(t,s)\sigma_s(g)\right)\sigma_t(f) =$$
$$= \int_a^b \int_c^d h(t,s)\,dg_{\mathfrak{c}}(s)\,df_{\mathfrak{c}}(t) + \int_a^b \left(\sum_{s\in T(g)} h(t,s)\sigma_s(g)\right) df_{\mathfrak{c}}(t) +$$
$$+ \sum_{t\in T(f)} \left(\int_c^d h(t,s)\,dg_{\mathfrak{c}}(s)\right)\sigma_t(f) + \sum_{t\in T(f)}\sum_{s\in T(g)} \sigma_s(g)\sigma_t(f)$$

Согласно (5.2) первое слагаемое в правой части может быть записано в виде

$$\int_c^d \int_a^b h(t,s)\,df_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(s);$$

в силу утверждения в) второе (третье) слагаемое запишется в виде

$$\sum_{s\in T(g)} \left(\int_a^b h(t,s)\,df_{\mathfrak{c}}(t)\right)\sigma_s(g) \qquad \left(\int_c^d \left(\sum_{t\in T(f)} h(t,s)\sigma_t(f)\right) dg_{\mathfrak{c}}(s)\right);$$

наконец, последнее слагаемое в силу утверждения б) запишется так: $\sum\limits_{s\in T(g)}\sum\limits_{t\in T(f)} \sigma_t(f)\sigma_s(g)$. Таким образом,

$$(*)\int_a^b \mathcal{H}_g(t)\,df(t) = \int_c^d \int_a^b h(t,s)\,df_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(s) + \int_c^d \left(\sum_{t\in T(f)} h(t,s)\sigma_t(f)\right) dg_{\mathfrak{c}}(s) +$$
$$+ \sum_{s\in T(g)} \left(\int_a^b h(t,s)\,df_{\mathfrak{c}}(t)\right)\sigma_s(g) + \sum_{s\in T(g)}\sum_{t\in T(f)} \sigma_t(f)\sigma_s(g) = (*)\int_c^d \mathcal{H}_f(s)\,dg(s).$$

Пусть теперь выполнены условия II. Покажем, что и в этом случае равенство (5.1) верно. Пусть

$$\mathcal{G}_g(t) \doteq (*)\int_c^d h(t,s)\,dg(s), \qquad \mathcal{G}_f(s) \doteq (*)\int_a^b h(t,s)\,df(t);$$

Согласно определению (4.3)

$$(*)\int_a^b \left((*)\int_c^d h(t,s)\,dg(s)\right)\,df(t) = (*)\int_a^b \mathcal{G}_g(t)\,df(t) = \mathcal{G}_g(t)f(t)\Big|_a^b - (*)\int_a^b f(t)\,d\mathcal{G}_g(t) =$$
$$= f(b)\left(h(b,d)g(d) - h(b,c)g(c) - (*)\int_c^d g(s)\,d_s h(b,s)\right) -$$
$$- f(a)\left(h(a,d)g(d) - h(a,c)g(c) - (*)\int_c^d g(s)\,d_s h(a,s)\right) -$$
$$- (*)\int_a^b f(t)\,d_t\left(h(t,d)g(d) - h(t,c)g(c) - (*)\int_c^d g(s)\,d_s h(t,s)\right),$$

и

$$(*)\int_c^d \left((*)\int_a^b h(t,s)\,df(t)\right)\,dg(s) = (*)\int_c^d \mathcal{G}_f(s)\,dg(s) = \mathcal{G}_f(s)g(s)\Big|_c^d - (*)\int_c^d g(s)\,d\mathcal{G}_f(s) =$$
$$= g(d)\left(h(b,d)f(b) - h(a,d)f(a) - (*)\int_a^b f(t)\,d_t h(t,d)\right) -$$
$$- g(c)\left(h(b,c)f(b) - h(a,c)f(a) - (*)\int_a^b f(t)\,d_t h(t,c)\right) -$$
$$- (*)\int_c^d g(s)\,d_s\left(h(b,s)f(b) - h(a,s)f(a) - (*)\int_a^b f(t)\,d_t h(t,s)\right).$$

Сравнивая два последних равенства, видим, что доказательство равенства (5.1) сводится к доказательству равенства

$$(*)\int_a^b f(t)\,d_t\left((*)\int_c^d g(s)\,d_s h(t,s)\right) = (*)\int_c^d g(s)\,d_s\left((*)\int_a^b f(t)\,d_t h(t,s)\right),$$

а если рассмотреть функции ограниченной вариации (см. предложение 3)

$$\widehat{H}_g(t) \doteq (*)\int_c^d g(s)\,d_s h(t,s), \qquad \widehat{H}_f(s) \doteq (*)\int_a^b f(t)\,d_t h(t,s),$$

то, к равенству

$$(*)\int_a^b f(t)\,d\widehat{H}_g(t) = (*)\int_c^d g(s)\,d\widehat{H}_f(s),$$

которое вполне идентично равенству (5.3) для первого случая. Таким образом, равенство (5.1) доказано и в рассматриваемом случае. □

Замечание 2. В условиях I и II теоремы пространства правильных функций $(\mathbf{R})$ могут быть заменены пространствами σ-непрерывных функций $(\mathbf{N})$, если предварительно потребовать существование такого $M > 0$, что $|h(t,s)| \leqslant M \ \ (t \in [a,b],\ s \in [c,d])$.

§ 6. Предельные теоремы

Для $(*)$-интеграла справедлива «первая» предельная теорема (ср. [12, с. 51]).

Теорема 9. *Пусть* $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \rightrightarrows f(t)\ (n \to \infty)$, $g \in \mathbf{BV}$; *тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (*)\int_a^b f_n(t)\,dg(t) = (*)\int_a^b f(t)\,dg(t). \tag{6.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим: в силу предложения 5 условия теоремы означают, что $f \in \mathbf{N}$, $f_n \to f$ в пространстве $\mathbf{N}$ и $\|f_n\| \leqslant M$ $(n \in \mathbb{N})$ при некотором $M \geqslant 0$. Поэтому интегралы справа и слева в (6.1) существуют. Сходимость

$$\int_a^b f_n(t)\, dg_{\mathfrak{c}}(t) \to \int_a^b f(t)\, dg_{\mathfrak{c}}(t) \qquad (n \to \infty) \tag{6.2}$$

следует из теоремы 2. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ряд $\sum\limits_{t \in T(g) \bigcap (a,b)} f_n(t)\sigma_t(g)$ сходится равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$, поэтому под его знаком можно совершить предельный переход при $n \to \infty$, и следовательно,

$$\sum_{t \in T(g) \bigcap (a,b)} f_n(t)\sigma_t(g) \to \sum_{t \in T(g) \bigcap (a,b)} f(t)\sigma_t(g) \qquad (n \to \infty). \tag{6.3}$$

□

Следствие 1. *Пусть* $g_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ $(n \to \infty)$, $f \in \mathbf{BV}$; *тогда*

$$\lim_{n \to \infty} (*) \int_a^b f(t)\, dg_n(t) = (*) \int_a^b f(t)\, dg(t). \tag{6.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно применяем (5.1), (6.1) и снова (5.1).

Аналог предельной теоремы Лебега также имеет место.

Теорема 10. *Пусть* f_n, $f \in \mathbf{N}$, $\|f_n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \to f(t)$, $t \in [a,b]$ $(n \to \infty)$, $g \in \mathbf{BV}$. *Тогда имеет место предельное соотношение* (6.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы Лебега (см., например [12, с. 129]) следует сходимость (6.2). Так как равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ теперь постулируется, то имеет место и сходимость (6.3). □

Следствие 2. *Пусть*

$$g_n \in \mathbf{N},\ n \in \mathbb{N},\ g_n(t) \to g(t),\ t \in [a,b]\ (n \to \infty),\ g \in \mathbf{N},\ \|g_n\| \leqslant M,\ f \in \mathbf{BV}.$$

Тогда имеет место предельное соотношение (6.4).

Наконец, справедлив аналог теоремы Хелли для $(*)$-интеграла.

Теорема 11. *Пусть* $f \in \mathbf{N}$, $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ $(n \to \infty)$ *и существует константа* $V > 0$ *такая, что* $\bigvee\limits_a^b (g_n) \leqslant V$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} (*) \int_a^b f(t)\, dg_n(t) = (*) \int_a^b f(t)\, dg(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точно так же, как при доказательстве теоремы Хелли (см. доказательство теоремы 5) доказывается, что $g \in \mathbf{BV}$. Полагаем $T \doteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(g_n)$; в силу (1.6) $T(g) \subset T$. Далее, так же, как при доказательстве теоремы 7, запишем определение $(*)$-интеграла в виде (4.2). Так как частичные суммы ряда $\sum\limits_{t \in T} |f(t)\sigma_t(g_n)|$ ограничены сверху числом $\|f\|_{\mathbf{N}} \cdot V$, то ряд $\sum\limits_{t \in T} f(t)\sigma_t(g_n)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что под его знаком можно совершить предельный переход при $n \to \infty$. Согласно сказанному и предложению 6 $g_{n,\mathfrak{d}}(t) \to g_{\mathfrak{d}}(t)$, а значит, и $g_{n,\mathfrak{c}}(t) \to g_{\mathfrak{c}}(t)$ $(n \to \infty)$. Таким образом, учитывая теорему 5 и предложение 6, получаем

$$(*)\int_a^b f(t)\,dg_n(t) = \int_a^b f(t)\,dg_{n,\mathfrak{c}}(t) + \sum_{t\in T} f(t)\sigma_t(g_n) \to$$
$$\to \int_a^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) + \sum_{t\in T} f(t)\sigma_t(g) = (*)\int_a^b f(t)\,dg(t) \quad (n\to\infty).$$

$\square$

Замечание 3. Теорема 11 хотя и распространяется на более широкие классы функций, по сравнению с теоремой 5, однако несколько проигрывает последней, в связи с требованием равномерной сходимости $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ $(n \to \infty)$. Ограничиться поточечной сходимостью, как это сделано в теореме 5, нельзя. И дело не только в доказательстве, которое опирается на предложение 6, требующее равномерную сходимость. Суть в том, что поточечная сходимость, вообще говоря, не обеспечивает в представлении (1.3) «сохранение сходимости»:

$$g_n(t) \to g(t) \Longrightarrow g_{n\mathfrak{c}}(t) \to g_{\mathfrak{c}}(t),\quad g_{n\mathfrak{d}}(t) \to g_{\mathfrak{d}}(t).$$

В самом деле, пусть $p_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ — непрерывные функции ограниченной вариации, $p_n(a) = 0$, $p \in \mathbf{H}$, $p(a) = 0$, $p_n(t) \to p(t)$ $(n \to \infty)$; $q_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ — «ступенчатые» функции; $q_n(a) = 0$, $q_n(t) \to q(t)$ $(n \to \infty)$; q — непрерывная функция ограниченной вариации, $q(a) = 0$. Пусть далее, $g_n(t) \doteq p_n(t) + q_n(t)$, $g(t) \doteq p(t) + q(t)$. Тогда $g_n(t) \to g(t)$, однако

$$g_{n,\mathfrak{c}} = p_n(t) \to p(t) = g_{\mathfrak{d}}(t), \qquad g_{n,\mathfrak{d}}(t) = q_n(t) \to q(t) = g_{\mathfrak{c}}(t) \quad (n\to\infty).$$

Укажем конкретный пример из этого «семейства».

Пусть $[a,b] = [0,1]$, и последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что $c_0 = 0$, $c_{k+1} > c_k$, $c_k \to 1$ $(k \to \infty)$ полагаем

$$p_n(t) = \begin{cases} c_1\left(\dfrac{t}{c_1}\right)^n & \text{для } t \in [0, c_1],\\ c_{k-1} + (c_k - c_{k-1})\left(\dfrac{t-c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}}\right)^n & \text{для } t \in (c_{k-1},\, c_k], \quad k = 2,\ldots,n,\\ c_n + (1-c_n)\left(\dfrac{t-c_n}{1-c_n}\right)^n & \text{для } t \in (c_n,\, 1], \end{cases}$$

(p_n — непрерывные строго возрастающие функции); тогда

$$p(t) = \begin{cases} c_{k-1} & \text{для } t \in [c_{k-1},\, c_k), \quad k = 1,2,\ldots,\\ 1 & \text{для } t = 1; \end{cases}$$

p — возрастающая (в нестрогом смысле) функция из $\mathbf{H}$, $T(p) = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Пусть далее $q(t) = t(1-t)$, $q_n(t) = q\left(\dfrac{k}{n}\right)$, $t \in \left[\dfrac{k-1}{n},\, \dfrac{k}{n}\right)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $q_n(1) = 0$, $n = 1,2\ldots$. Тогда даже $q_n(t) \rightrightarrows q(t)$ $(n \to \infty)$.

Приведенные примеры обосновывают требование равномерной сходимости в теореме 11.

Теоремы 9 и 11 позволяют легко доказать следующее предельное соотношение, находящее непосредственное применение в теории уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах (см., например, [3, 7]).

Теорема 12. *Пусть* $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$, $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ $(n \to \infty)$, $\bigvee_a^b (g_n) \leqslant V$, $V > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (*)\int_a^b f_n(t)\, dg_n(t) = (*)\int_a^b f(t)\, dg(t).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется такое натуральное N_1, что для $n > N_1$ $\|f_n - f\|_{\mathbf{N}} < \dfrac{\varepsilon}{2V}$, а значит, в силу утверждения **2** б) из § 3 и

$$\left|(*)\int_a^b f_n(t)\, dg_n(t) - (*)\int_a^b f(t)\, dg_n(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

в силу теоремы 11 найдется такое натуральное N_2, что для $n > N_2$

$$\left|(*)\int_a^b f(t)\, dg_n(t) - (*)\int_a^b f(t)\, dg(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

таким образом, для $n > \max\{N_1,\ N_2\}$

$$\left|(*)\int_a^b f_n(t)\, dg_n(t) - (*)\int_a^b f(t)\, dg(t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|(*)\int_a^b f_n(t)\, dg_n(t) - (*)\int_a^b f(t)\, dg_n(t)\right| + \left|(*)\int_a^b f(t)\, dg_n(t) - (*)\int_a^b f(t)\, dg(t)\right| < \varepsilon.$$

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzweil J. Linear differential equations with distributions as coefficients // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1959. Vol. 7. No. 9. P. 557–560.
2. Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II // Вестник Ярославского университета. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
3. Дерр В.Я. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах: обзор // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Пермь: ПНИПУ, 2018. С. 60–86.
4. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 749 с.
5. Schwabik S., Tvrdý M., Vejvoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. Praha: Academia, 1979.
6. Derr V.Ya. A generalization of Riemann–Stieltjes integral // Functional Differential Equations. 2002. Vol. 9. No. 3–4. P. 325–341.
7. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Альфа-интеграл типа Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. Вып. 1. С. 41–62. http://mi.mathnet.ru/vuu245
8. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса // Изв. вузов. Матем. 2007. № 2. С. 79–82. http://mi.mathnet.ru/ivm1365
9. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
10. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
11. Толстоногов А.А. О некоторых свойствах пространства правильных функций // Матем. заметки. 1984. Т. 35. Вып. 6. С. 803–812. http://mi.mathnet.ru/mz5823

12. Дерр В.Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008.
13. Дерр В.Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2013.
14. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть первая. Основные операции анализа. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 18.03.2019

Дерр Василий Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: derr@uni.udm.ru

V. Ya. Derr

On the extension of a Rieman–Stieltjes integral

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 135–152 (in Russian).

Keywords: functions of bounded variation, regulated functions, σ-continuous functions, Rieman–Stieltjes integral, $(*)$-integral.

MSC2010: 26B30, 26A42

DOI: 10.20537/vm190201

In this paper, the properties of the regular functions and the so-called σ-continuous functions (i.e., the bounded functions for which the set of discontinuity points is at most countable) are studied. It is shown that the σ-continuous functions are Riemann–Stieltjes integrable with respect to continuous functions of bounded variation. Helly's limit theorem for such functions is also proved. Moreover, Riemann–Stieltjes integration of σ-continuous functions with respect to arbitrary functions of bounded variation is considered. To this end, a $(*)$-integral is introduced. This integral consists of two terms: (i) the classical Riemann–Stieltjes integral with respect to the continuous part of a function of bounded variation, and (ii) the sum of the products of an integrand by the jumps of an integrator. In other words, the $(*)$-integral makes it possible to consider a Riemann–Stieltjes integral with a discontinuous function as an integrand or an integrator. The properties of the (*)-integral are studied. In particular, a formula for integration by parts, an inversion of the order of the integration theorem, and all limit theorems necessary in applications, including a limit theorem of Helly's type, are proved.

REFERENCES

1. Kurzweil J. Linear differential equations with distributions as coefficients, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1959, vol. 7, no. 9, pp. 557–560.
2. Levin A.Yu. Questions on the theory of ordinary linear differential equations. II, *Vestn. Yaroslav. Univ.*, 1974, issue 8, pp. 122–144 (in Russian).
3. Derr V.Ya. Ordinary linear differential equations with generalized functions in coefficients: survey, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya* (Functional differential equations: theory and applications), Perm: Perm National Research Polytechnic University, 2018, pp. 60–86 (in Russian).

4. Atkinson F.V. *Discrete and continuous boundary problems*, New York: Academic Press, 1964.
Translated under the title *Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi*, Moscow: Mir, 1968.
5. Schwabik S., Tvrdý M., Vejvoda O. *Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints*, Praha: Academia, 1979.
6. Derr V.Ya. A generalization of Riemann–Stieltjes integral, *Functional Differential Equations*, 2002, vol. 9, no. 3–4, pp. 325–341.
7. Derr V.Ya., Kinzebulatov D.M. Alpha-integral of Stieltjes type, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat.*, 2006, issue 1, pp. 41–62 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vuu245
8. Rodionov V.I. The adjoint Riemann–Stieltjes integral, *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, issue 2, pp. 75–79. https://doi.org/10.3103/S1066369X07020107
9. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York–London: Academic Press, 1960.
Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964.
10. Schwartz L. *Analyse Mathématique. Vol. I*, Paris: Hermann, 1967.
Translated under the title *Analiz. Tom I*, Moscow: Mir, 1972.
11. Tolstonogov A.A. Properties of the space of proper functions, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1984, vol. 35, issue 6, pp. 422–427.
https://doi.org/10.1007/BF01139944
12. Derr V.Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of real argument. Lectures and exercises), Moscow: Vysshaya Shkola, 2008.
13. Derr V.Ya. *Funktsional'nyi analiz. Lektsii i uprazhneniya* (Functional analysis. Lectures and exercises), Moscow: Knorus, 2013.
14. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: General theory*, New York–London: Interscience Publishers, 1958.
Translated under the title *Lineinye operatory. Tom 1. Obshchaya teoriya*, Moscow: Inostrannaya Literatura, 1962.
15. Whittaker E.T., Watson G.N. *A course of modern analysis*, Cambridge, 1927.
Translated under the title *Kurs sovremennogo analisa*, Moscow: Fizmatgiz, 1963.

Received 18.03.2019

Derr Vasilii Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: derr@uni.udm.ru