

УДК 531.36, 531.53

© А. П. Маркеев, Д. А. Сухоручкин

К ДИНАМИКЕ МАЯТНИКА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ¹

Рассматривается движение математического маятника, установленного на подвижной платформе. Платформа вращается вокруг заданной вертикали с постоянной угловой скоростью ω и одновременно совершает гармонические колебания с амплитудой A и частотой Ω вдоль вертикали. Амплитуда колебаний предполагается малой по сравнению с длиной маятника ℓ ($A = \varepsilon\ell$, $0 < \varepsilon \ll 1$). Рассмотрено три типа движений. Для первых двух типов маятник неподвижен относительно платформы и располагается вдоль ее оси вращения (висящий и перевернутый маятники). Для третьего типа движений маятник совершает периодические колебания с периодом, равным периоду вертикальных колебаний платформы. Эти колебания имеют амплитуду порядка ε и при $\varepsilon = 0$ переходят в положение относительного равновесия, в котором маятник составляет постоянный угол с вертикалью. Третий тип движения существует, если угловая скорость вращения платформы достаточно большая ($\omega^2\ell > g$, где g — ускорение свободного падения). В статье решается задача об устойчивости этих трех типов движения маятника для малых значений ε . Рассмотрены как нерезонансные случаи, так и случаи, когда в системе реализуются резонансы второго, третьего и четвертого порядка. В пространстве трех безразмерных параметров задачи $g/(\omega^2\ell)$, Ω/ω и ε выделены области устойчивости по Ляпунову и области неустойчивости. Исследование опирается на классические методы и алгоритмы Ляпунова, Пуанкаре и Биркгофа, а также на современные методы анализа динамических систем при помощи КАМ-теории.

Ключевые слова: маятник, резонанс, система Гамильтона, устойчивость.

DOI: [10.20537/vm180210](https://doi.org/10.20537/vm180210)

Введение

Рассмотрим движение маятника в однородном поле тяжести. Пусть $O_*x_*y_*z_*$ — неподвижная система координат, ось O_*z_* которой направлена вертикально вверх (рис. 1), а $O'x'y'z'$ — система координат, жестко связанная с платформой, на которой установлен маятник (не показанная на рис. 1 ось $O'z'$ направлена вдоль оси O_*z_*). Платформа является подвижной: она вращается вокруг вертикали O_*z_* с постоянной угловой скоростью ω и одновременно совершает вдоль вертикали гармонические колебания с амплитудой A и частотой Ω . Маятник представляет собой материальную точку P массой m , прикрепленную к концу невесомого стержня длиной ℓ . Другой конец стержня жестко соединен с осью цилиндрического шарнира O , которая горизонтальна и находится в плоскости $Ox'z'$. Предполагается, что амплитуда A вертикальных колебаний платформы мала по сравнению с длиной ℓ стержня OP ($A = \varepsilon\ell$, $0 < \varepsilon \ll 1$).

Исследования по динамике твердого тела, одна из точек которого совершает заданное движение, имеют более чем столетнюю историю. Подробную библиографию относящихся сюда классических и недавних публикаций можно найти в работах [1–8]. Излагаемое ниже исследование является продолжением работ [9, 10]. В статье [9] для случая малых значений ε исследовались периодические движения маятника в предположении о том, что частота Ω вертикальных колебаний платформы, на которой установлен маятник, велика по сравнению с частотой $\sqrt{g/\ell}$ малых колебаний маятника при неподвижной платформе. В [10] исследованы периодические

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14–21–00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) и Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

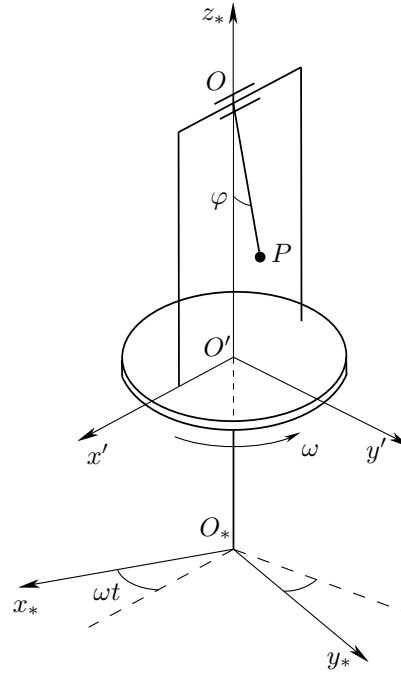


Рис. 1. Схема маятника, установленного на подвижной платформе

движения, переходящие при $\varepsilon = 0$ в нелинейные колебания маятника в окрестности его неvertикального положения равновесия на вращающейся платформе. Такое равновесие отвечает основному режиму работы регулятора Уатта и его модификаций, оно существует, если $\omega > \sqrt{g/l}$.

В данной статье решается задача о существовании и устойчивости по Ляпунову периодических (в связанной с подвижной платформой системе координат $O'x'y'z'$) движений маятника с периодом, равным периоду $2\pi/\Omega$ гармонических вертикальных колебаний платформы. При $\varepsilon = 0$ эти движения переходят в положения равновесия маятника относительно платформы. Исследование опирается на методы и алгоритмы классической теории возмущений и КАМ-теорию [11–17].

§ 1. Уравнения движения

Во все время движения маятник остается во вращающейся вместе с платформой вертикальной плоскости $O'y'z'$. В системе $O_*x_*y_*z_*$ положение точки P задается координатами

$$x_* = -l \sin \varphi \sin \omega t, \quad y_* = l \sin \varphi \cos \omega t, \quad z_* = -A \cos \Omega t - l \cos \varphi + O'O \quad (O'O = \text{const}),$$

где φ — угол, который стержень OP составляет с вертикалью (рис. 1). Функция Лагранжа вычисляется по формуле $L = mv_*^2/2 - mgz_*$, где v_* — скорость точки P . Если за независимую переменную принять безразмерное время $\tau = \Omega t$, то дифференциальное уравнение движения маятника запишется в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{\beta^2}(\alpha - \cos \varphi) \sin \varphi + \varepsilon \cos \tau \sin \varphi = 0, \quad (1.1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ , а α и β — безразмерные параметры, определяемые равенствами

$$\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \beta = \frac{\Omega}{\omega}.$$

Если ввести обозначение $\dot{\varphi} = p_\varphi$, то уравнение (1.1) можно записать в виде канонических уравнений

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (1.2)$$

с функцией Гамильтона

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (1.3)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}p_\varphi^2 - \frac{1}{\beta^2} \left(\alpha \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right), \quad H_1 = -\varepsilon \cos \tau \cos \varphi.$$

§ 2. Периодические движения маятника

При отсутствии вертикальных колебаний платформы ($\varepsilon = 0$) маятник может находиться в положениях равновесия относительно вращающейся платформы. В этих положениях $p_\varphi = 0$, а угол φ определяется уравнением $\sin \varphi (\alpha - \cos \varphi) = 0$. Возможны три типа равновесия:

$$\varphi = \varphi_1 = 0, \quad \varphi = \varphi_2 = \pi \quad (2.1)$$

и

$$\varphi = \arccos \alpha. \quad (2.2)$$

Для равновесий (2.1) маятник расположен на вертикали O_*z_* . Эти равновесия существуют при любом значении параметра α . Для равновесия же (2.2) требуется выполнение условия $\alpha \leq 1$.

Вопрос об устойчивости равновесий (2.1) и (2.2) решается при помощи теорем Лагранжа и Ляпунова об устойчивости консервативных систем [16]. Известно (см., например, [18]), что равновесие $\varphi = 0$ (висящий маятник) неустойчиво при $\alpha < 1$ и устойчиво при $\alpha \geq 1$, равновесие $\varphi = \pi$ (опрокинутый маятник) всегда неустойчиво, а равновесие (2.2) устойчиво в области его существования $\alpha \leq 1$. В плоскости α, φ точка $\alpha = 1, \varphi = 0$ является бифуркационной, в ней характеристическое уравнение линеаризованных в окрестности равновесия уравнений движения имеет двойной нулевой корень. Бифуркационная точка далее не рассматривается.

Из уравнения (1.1) (или из системы (1.2)) видно, что равновесия (2.1), отвечающие висящему и опрокинутому маятникам, существуют и при наличии вертикальных колебаний платформы (когда $\varepsilon \neq 0$). Равновесие же (2.2) при $\varepsilon \neq 0$ отсутствует. Из него при $0 < \varepsilon \ll 1$ могут рождаться периодические движения маятника с периодом 2π по τ . Пусть δ — частота малых (линейных) колебаний маятника в окрестности его равновесия (2.2), существующего при $\varepsilon = 0$:

$$\delta = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\beta}. \quad (2.3)$$

Если величина δ не близка к целому числу (то есть имеет место нерезонансный случай теории периодических решений Пуанкаре для квазилинейных систем [15]), то при малых ε из равновесия (2.2) рождается единственное аналитическое по ε , 2π -периодическое по τ движение маятника. Вычисления показывают, что оно может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_3 = \arccos \alpha - \varepsilon \cdot \frac{\beta \delta \cos \tau}{\delta^2 - 1} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\alpha \beta (\delta^2 + 2)(2 - \delta^2 \cos^2 \tau)}{2\delta(\delta^2 - 1)^2(\delta^2 - 4)} + \dots, \quad p_\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (2.4)$$

где многоточием обозначены члены ряда, порядок которых по ε выше второго.

Далее рассмотрим задачу об устойчивости по Ляпунову трех типов (2.1) и (2.4) движений маятника при малых значениях параметра ε .

§ 3. Об устойчивости движения $\varphi = \varphi_2 = \pi$

Наиболее просто решается задача об устойчивости решения второго типа $\varphi = \varphi_2 = \pi$, $p_\varphi = 0$, отвечающего перевернутому маятнику.

Если в (1.1) положить $\varphi = \pi + q$, $\tau = \pi + \zeta$, то линеаризованное уравнение возмущенного движения запишется в виде уравнения Матье:

$$\frac{d^2 q}{d\zeta^2} + (-\varkappa^2 + \varepsilon \cos \zeta) q = 0, \quad \varkappa = \frac{\sqrt{\alpha + 1}}{\beta}. \quad (3.1)$$

При $\varepsilon = 0$ характеристический многочлен этого уравнения имеет положительный корень \varkappa . Учитывая непрерывность характеристических показателей уравнения (3.1) по параметру ε [15], получаем отсюда, что при достаточно малых значениях ε перевернутый маятник неустойчив [16]. Причем не только в первом (линейном) приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи об устойчивости.

С точностью до членов порядка ε^2 включительно область неустойчивости в пространстве параметров α , β , ε задается (см., например, [17]) неравенством

$$\varepsilon^2 < 2\varkappa^2. \quad (3.2)$$

В размерных величинах неравенство (3.2) записывается в виде

$$A^2 \Omega^2 < 2\omega^2 \ell^2 + 2g\ell.$$

То есть при достаточно больших Ω мы выходим из области неустойчивости. Этот факт согласуется с выводами об устойчивости перевернутого маятника на вращающейся и вибрирующей платформе, полученными ранее [9].

§ 4. Исследование устойчивости висящего маятника

Висящему маятнику отвечает решение первого типа $\varphi = \varphi_1 = 0$, $p_\varphi = 0$. Положим в функции Гамильтона (1.3) $\varphi = q$, $p_\varphi = p$ и разложим ее в ряд по степеням q , p . Если отбросить слагаемое, не зависящее от q и p , то функция Гамильтона возмущенного движения запишется в виде

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} H_{2k}, \quad (4.1)$$

где H_{2k} — форма четной степени $2k$ относительно q , p с 2π -периодическими по независимой переменной τ коэффициентами. Первые две формы ряда (4.1) будут такими:

$$H_2 = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{\alpha - 1}{\beta^2} q^2 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \cos \tau q^2,$$

$$H_4 = \frac{4 - \alpha}{24\beta^2} q^4 - \frac{1}{24} \varepsilon \cos \tau q^4.$$

Задаваемые формой H_2 линеаризованные уравнения возмущенного движения можно записать в виде уравнения Матье:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \left(\frac{\alpha - 1}{\beta^2} + \varepsilon \cos \tau \right) q = 0. \quad (4.2)$$

При анализе устойчивости рассмотрим два существенно отличающихся один от другого случая: $0 < \alpha < 1$ и $\alpha > 1$.

4.1. О неустойчивости в случае $0 < \alpha < 1$

Если $0 < \alpha < 1$, то при достаточно малых значениях ε имеет место неустойчивость (в строгой нелинейной постановке задачи). Как и в случае перевернутого маятника, это следует из того, что при $\varepsilon = 0$ характеристический многочлен линеаризованных уравнений имеет положительный корень (в случае висящего маятника равный $\sqrt{1 - \alpha}/\beta$). При малых ε область неустойчивости задается неравенством

$$\varepsilon^2 < 2 \frac{1 - \alpha}{\beta^2}.$$

В размерных величинах это неравенство имеет вид

$$A^2 \Omega^2 < 2 \omega^2 \ell^2 - 2gl.$$

4.2. Анализ устойчивости в случае $\alpha > 1$

1. Сначала рассмотрим устойчивость в первом приближении. Ему отвечает линейное уравнение возмущенного движения (4.2).

При $\varepsilon = 0$ первое приближение описывает малые колебания с частотой δ , вычисляемой по формуле

$$\delta = \frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\beta}. \quad (4.3)$$

При малых значениях ε в пространстве трех параметров $\alpha, \beta, \varepsilon$ возникают области неустойчивости (области параметрического резонанса). Эти области при $\varepsilon = 0$ вырождаются в кривые в плоскости α, β , задаваемые уравнениями

$$2\delta = n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

В плоскости δ^2, ε области параметрического резонанса исходят из точек $\delta^2 = n^2/4, \varepsilon = 0$, а при $\varepsilon \neq 0$ задаются неравенствами

$$f_n^-(\varepsilon) + \frac{n^2}{4} < \delta^2 < \frac{n^2}{4} + f_n^+(\varepsilon). \quad (4.5)$$

Функции f_n^+ и f_n^- , задающие соответственно правую (γ_n^+) и левую (γ_n^-) границы области (4.5), аналитичны по ε . При $n = 1, 2, 3, 4$, например, для этих функций справедливы следующие представления [17]:

$$f_1^\pm = \pm \frac{1}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad f_2^+ = \frac{5}{12} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad f_2^- = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$

$$f_3^\pm = \frac{1}{16} \varepsilon^2 \pm \frac{1}{32} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad f_4^+ = \frac{1}{30} \varepsilon^2 + \frac{433}{216000} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6), \quad f_4^- = \frac{1}{30} \varepsilon^2 - \frac{317}{216000} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6).$$

Если параметры $\alpha, \beta, \varepsilon$ лежат внутри какой-либо из областей (4.5), то исследуемое равновесие маятника неустойчиво (в строгой нелинейной постановке задачи). Для значений же параметров, лежащих вне областей (4.5) или на их границах γ_n^+, γ_n^- , требуется исследование нелинейных уравнений возмущенного движения.

2. При анализе нелинейной задачи сначала рассмотрим случай, когда параметры $\alpha, \beta, \varepsilon$ лежат вне областей параметрического резонанса (4.5). В этом случае при помощи линейной 2π -периодической по τ канонической замены переменных $q, p \rightarrow Q, P$ функция Гамильтона возмущенного движения (4.1) может быть [17] приведена к такой форме $F(Q, P, \tau) = F_2 + F_4 + \dots$, в которой квадратичная форма F_2 имеет вид

$$F_2 = \frac{1}{2} \lambda (Q^2 + P^2),$$

где λ — постоянная величина, причем $\lambda = \delta + O(\varepsilon^2)$, где δ задается формулой (4.3).

Разложение функции F в ряд, как и исходное разложение (4.1), не содержит форм нечетных степеней. Поэтому [13] при помощи нелинейного, близкого к тождественному, 2π -периодического по τ преобразования Биркгофа $Q, P \rightarrow \xi, \eta$ функцию F можно привести к следующей (нормальной) форме Γ :

$$\Gamma = \lambda r + [c_2 + b_2 \cos(4\theta - 4\lambda\tau - \theta_*)] r^2 + O(r^3), \quad (4.6)$$

где c_2, b_2, θ_* — постоянные величины, а

$$\xi = \sqrt{2r} \sin \theta, \quad \eta = \sqrt{2r} \cos \theta.$$

Коэффициент b_2 в (4.6) равен нулю, если в системе нет резонанса четвертого порядка (то есть число 4λ не является целым); если же такой резонанс есть, то величина b_2 не обязательно равна нулю, но она сколь угодно мала при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для коэффициента c_2 можно (по формулам из [13]) получить следующее выражение:

$$c_2 = \frac{4 - \alpha}{16(\alpha - 1)} + O(\varepsilon^2). \quad (4.7)$$

Если $\alpha \neq 4$, то (независимо от наличия или отсутствия резонанса четвертого порядка) при достаточно малых ε имеет место неравенство $|c_2| > |b_2|$. Отсюда следует [13], что если параметры $\alpha, \beta, \varepsilon$ лежат вне областей параметрического резонанса, причем $\alpha \neq 4$, то для достаточно малых значений ε положение равновесия, отвечающее висящему маятнику, устойчиво по Ляпунову.

Теперь, следуя [19], рассмотрим случай, когда параметры $\alpha, \beta, \varepsilon$ лежат на какой-либо из границ γ_n^+, γ_n^- областей параметрического резонанса. Здесь важно поведение (возрастание или убывание) частоты $\delta + 2c_2r$ малых нелинейных колебаний (в предельном случае $\varepsilon = 0$) с ростом их амплитуды; при положительном c_2 частота возрастает, а при отрицательном — убывает.

Из (4.7) видно, что при $\varepsilon = 0$ коэффициент c_2 положителен, если $1 < \alpha < 4$, и отрицателен, если $\alpha > 4$. Поэтому [19] если $1 < \alpha < 4$, то при достаточно малых ε на границах γ_n^+ имеет место устойчивость, а на границах γ_n^- — неустойчивость; если же $\alpha > 4$, то, наоборот, на границах γ_n^+ будет неустойчивость, а на границах γ_n^- — устойчивость.

§ 5. Исследование устойчивости периодического движения (2.4)

Введем возмущения q и p , положив

$$\varphi = \varphi_3 + q, \quad p_\varphi = \frac{d\varphi_3}{d\tau} + p, \quad (5.1)$$

где φ_3 задается первым из равенств (2.4). Функция Гамильтона возмущенного движения $G(q, p, \tau)$ вычисляется по формуле

$$G = H + \frac{d^2\varphi_3}{d\tau^2} q - \frac{d\varphi_3}{d\tau} p,$$

где H — функция (4.1), в которой сделана замена (5.1).

В разложении функции G в ряд члены первой степени относительно q и p отсутствуют, и если еще отбросить член, не зависящий от q и p , то это разложение запишется в виде

$$G = G_2 + G_3 + G_4 + \dots + G_k + \dots, \quad (5.2)$$

где G_k — форма степени k относительно q, p с 2π -периодическими по τ коэффициентами. Для первых трех форм разложения (5.2) можно получить следующие выражения:

$$G_2 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \left\{ \delta^2 - \varepsilon \cdot \frac{\alpha(2\delta^2 + 1)}{\delta^2 - 1} \cos \tau - \frac{\varepsilon^2}{2(\delta^2 - 1)^2} \left[\beta^2 \delta^4 - 2\beta^2 \delta^2 + 3 + \frac{\delta^2(\beta^2 \delta^4 - 12\beta^2 \delta^2 - 4\beta^2 + 9)}{\delta^2 - 4} \cos 2\tau \right] + O(\varepsilon^3) \right\} q^2, \quad (5.3)$$

$$G_3 = \frac{1}{2\beta} \left\{ \alpha\delta + \varepsilon \cdot \frac{\delta(6\beta^2\delta^2 + \beta^2 - 3)}{3(\delta^2 - 1)} \cos \tau - \varepsilon^2 \frac{\alpha}{12\delta(\delta^2 - 1)^2} \left[3(2\beta^2\delta^4 + \delta^2 - 4\beta^2\delta^2 + 2) + \frac{\delta^2(3\delta^2 + 6\beta^2\delta^4 - 64\beta^2\delta^2 + 6 - 8\beta^2)}{\delta^2 - 4} \cos 2\tau \right] + O(\varepsilon^3) \right\} q^3,$$

$$G_4 = \left[\frac{3 - 7\beta^2\delta^2}{24\beta^2} + O(\varepsilon) \right] q^4.$$

5.1. Анализ линейной задачи

1. Линейным уравнениям возмущенного движения соответствует функция Гамильтона (5.3). В пространстве параметров $\alpha, \beta, \varepsilon$ существует счетное множество областей параметрического резонанса. При $\varepsilon = 0$ эти области вырождаются в кривые, лежащие в плоскости α, β . Эти кривые отвечают полуцелым значениям величины δ :

$$2\delta = n \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

В отличие от (4.4), здесь натуральное число n принимает только нечетные значения, так как исследуемое движение (2.4) получено в предположении о том, что величина δ отлична от целого числа.

Рассмотрим область параметрического резонанса, для которой при $\varepsilon = 0$ величина δ равна $1/2$. Вычисления по известным алгоритмам [17] показывают, что эта область задается неравенством

$$\frac{1}{2} - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2) < \delta < \frac{1}{2} + \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2). \quad (5.4)$$

Области параметрического резонанса, отвечающие $n = 3, 5, \dots$, обнаруживаются в 3-м, 5-м и более высоких приближениях по ε и здесь не анализируются.

Если параметры $\alpha, \beta, \varepsilon$ лежат в какой-либо из областей параметрического резонанса, то периодическое движение (2.4) неустойчиво по Ляпунову.

2. Вне областей параметрического резонанса имеет место устойчивость в линейном приближении. Здесь при помощи линейного 2π -периодического по τ канонического преобразования $q, p \rightarrow x, y$ изучаемая система приводится к гармоническому осциллятору. Вычисления по алгоритму из [17] показывают, что для частоты μ этого осциллятора справедливо следующее выражение:

$$\mu = \delta - \varepsilon^2 \cdot \frac{2(2\delta^4 + 8\delta^2 - 1) - \beta^2\delta^2(13\delta^2 - 1)}{4\delta(\delta^2 - 1)^2(4\delta^2 - 1)} + O(\varepsilon^3). \quad (5.5)$$

В новых переменных x, y функция Гамильтона возмущенного движения (5.2) записывается в виде ряда

$$h = \frac{1}{2} \mu (x^2 + y^2) + h_3 + h_4 + \dots + h_k + \dots \quad \left(h_k = \sum_{r+s=k} h_{rs}(\tau) x^r y^s \right). \quad (5.6)$$

Коэффициенты формы третьей степени h_3 вычисляются по следующим формулам:

$$h_{30} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\delta}\beta} + \varepsilon \cdot \frac{6(\delta^2 + 2) + \beta^2(6\delta^4 - 11\delta^2 - 1)}{6\sqrt{\delta}\beta(\delta^2 - 1)(4\delta^2 - 1)} \cos \tau + \frac{\varepsilon^2\alpha}{48(\delta^2 - 1)^2(4\delta^2 - 1)^2\delta^{5/2}\beta} (a + b \cos 2\tau) + O(\varepsilon^3), \quad (5.7)$$

$$a = 3 \cdot [2 + 204\delta^4 - 96\delta^8 - 56\delta^6 + \beta^2\delta^2(96\delta^8 + 104\delta^6 - 63\delta^2 + 1 - 12\delta^4)],$$

$$b = -\frac{\delta^2}{(\delta^2 - 1)(\delta^2 - 4)} \cdot [1032\delta^8 + 1728\delta^4 - 708\delta^6 - 336 + 30\delta^2 - 288\delta^{10} + (332\delta^2 + 64 - 1176\delta^{10} + 1013\delta^6 - 1689\delta^4 + 288\delta^{12} + 196\delta^8)\beta^2];$$

$$h_{21} = -\varepsilon \cdot \frac{3\alpha^2 \sqrt{\delta} (2\delta^2 + 1)}{\beta(\delta^2 - 1)(4\delta^2 - 1)} \sin \tau - \varepsilon^2 \cdot \frac{\alpha \sqrt{\delta} c \sin 2\tau}{16\beta(\delta^2 - 4)(4\delta^2 - 1)^2(\delta^2 - 1)^3} + O(\varepsilon^3), \quad (5.8)$$

$$c = 144\delta^8 + 108\delta^6 - 1296\delta^4 + 234\delta^2 + 324 + (96\delta^{10} - 1124\delta^8 + 1379\delta^6 + 333\delta^4 - 328\delta^2 - 32)\beta^2;$$

$$h_{12} = \varepsilon^2 \cdot \frac{3\alpha^3 \delta^{3/2} (2\delta^2 + 1)^2 (1 - \cos 2\tau)}{\beta(\delta^2 - 1)^2 (4\delta^2 - 1)^2} + O(\varepsilon^3); \quad h_{03} = O(\varepsilon^3). \quad (5.9)$$

Коэффициент h_{40} формы четвертой степени h_4 задается равенством

$$h_{40} = \frac{3 - 7\beta^2 \delta^2}{24\delta^2 \beta^2} + O(\varepsilon),$$

остальные четыре коэффициента этой формы бесконечно малы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.2. Результаты нелинейного анализа устойчивости

Приведем результаты исследования ряда случаев, когда анализа только линейной задачи недостаточно, чтобы получить строгие выводы об устойчивости рассматриваемого периодического движения маятника (2.4).

1. Пусть параметры α , β , ε лежат вне областей параметрического резонанса и не попадают на поверхности резонансов третьего порядка

$$3\mu = n, \quad (5.10)$$

где n — натуральное число (не кратное трем, поскольку при $\varepsilon = 0$ величина $\mu = \delta$, а δ предполагается отличным от целого числа). Также считаем, что отсутствуют и резонансы четвертого порядка

$$4\mu = n, \quad (5.11)$$

где n не кратно двум или четырем.

Для таких значений параметров функция Гамильтона (5.6) при помощи близкого к тождественному 2π -периодического по τ преобразования Биркгофа $x, y \rightarrow \xi, \eta$ может быть [13] приведена к виду

$$h = \mu r + c_2 r^2 + O(r^{5/2}), \quad (5.12)$$

где $2r = \xi^2 + \eta^2$, а c_2 — постоянный коэффициент, который, как показывают вычисления, задается равенством

$$c_2 = -\frac{1 + 2\alpha^2}{4(1 - \alpha^2)} + O(\varepsilon^2). \quad (5.13)$$

При малых значениях ε коэффициент c_2 отличен от нуля, и, следовательно [13], периодическое движение (2.4) устойчиво по Ляпунову.

Этот вывод об устойчивости справедлив и при наличии резонансов четвертого порядка (5.11), так как тогда, вместо функции Гамильтона (5.12), получим после преобразования Биркгофа функцию h вида

$$h = \mu r + [c_2 + b_2 \cos(4\theta - n\tau - \theta_*)] r^2 + O(r^{5/2}),$$

где θ_* , b_2 — постоянные, причем $b_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому при малых ε выполнено условие $|c_2| > |b_2|$, достаточное для устойчивости.

2. Рассмотрим теперь резонансы третьего порядка. Из счетного их множества (5.10) исследуем только два резонанса, когда $n = 1$ или $n = 2$. Рассмотрение остальных резонансов, для которых $n \geq 4$, требует учета в разложениях (2.4) и (5.7)–(5.9) членов выше второй степени относительно ε .

Пусть $n = 1$. Из (2.3) и (5.5) следует, что в пространстве $\alpha, \beta, \varepsilon$ уравнение резонансной поверхности $3\mu = 1$ может быть записано в виде

$$\beta = 3\sqrt{1-\alpha^2} \left[1 + \varepsilon^2 \frac{81}{640}(18\alpha^2 - 25) \right] + O(\varepsilon^3). \quad (5.14)$$

Преобразование Биркгофа $x, y \rightarrow \xi, \eta$ позволяет привести функцию Гамильтона (5.6) к такой форме:

$$h = \mu r + dr^{3/2}(\cos 3\theta - 3\mu\tau - \theta_*) + O(r^2), \quad (5.15)$$

где θ_* и d — постоянные величины, причем, как показывают вычисления по формулам главы 3 работы [13], величина d задается равенством

$$d = \varepsilon \cdot \frac{12\sqrt{6}(4\alpha^2 - 1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} + O(\varepsilon^3). \quad (5.16)$$

Из (5.14) и (5.16) видно, что на резонансной поверхности $3\mu = 1$ при достаточно малых ε существует кривая, на которой величина d обращается в нуль; при $\varepsilon = 0$ кривая исходит из точки плоскости α, β , в которой $\alpha = 1/2$, $\beta = 3\sqrt{3}/2$. Для значений параметров $\alpha, \beta, \varepsilon$, лежащих на поверхности $3\mu = 1$ и не попадающих на эту кривую, периодическое движение (2.4) неустойчиво [13]. На самой же кривой имеет место устойчивость, так как на ней функция Гамильтона (5.6) приводится к форме (5.12), в которой $\mu = 1/3$, а величина $c_2 = -1/2 + O(\varepsilon^2)$ и при малых ε отлична от нуля.

Пусть теперь $n = 2$. На резонансной поверхности $3\mu = 2$ функция Гамильтона (5.6) приводится к виду (5.15), причем

$$d = \varepsilon^2 \cdot \frac{27\sqrt{3}\alpha(56\alpha^2 + 37)}{320\sqrt{1-\alpha^2}} + O(\varepsilon^3).$$

При достаточно малых ε выполняется неравенство $d \neq 0$. Поэтому [13] при малых ε на всей резонансной поверхности $3\mu = 2$ периодическое движение (2.4) неустойчиво.

3. Отметим еще, что при малых ε на правой границе $\delta = 1/2 + \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2)$ области параметрического резонанса (5.4) периодическое движение (2.4) неустойчиво, а на левой границе $\delta = 1/2 - \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2)$ — устойчиво по Ляпунову. Это следует из того [19], что величина c_2 из (5.13) отрицательна, если ε — достаточно малая величина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
2. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
3. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. 308 с.
4. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
5. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 193–203.
6. Беличенко М.В., Холостова О.В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104. DOI: [10.20537/nd1701006](https://doi.org/10.20537/nd1701006)

7. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 98–120. DOI: [10.20537/vm170109](https://doi.org/10.20537/vm170109)
8. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. Исследование перманентных вращений тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 590–607. DOI: [10.20537/vm170409](https://doi.org/10.20537/vm170409)
9. Маркеев А.П. О маятнике на вращающемся и вибрирующем основании // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 5. С. 542–546. DOI: [10.7868/S0869565217350079](https://doi.org/10.7868/S0869565217350079)
10. Маркеев А.П. К динамике регулятора Уатта // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 4. С. 415–420.
11. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
12. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
13. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
14. Джакаль Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
16. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
17. Маркеев А.П. Лине́йные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.
18. Андро́нов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
19. Маркеев А.П. О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.

Поступила в редакцию 17.05.2018

Маркеев Анатолий Павлович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, лаборатория механики систем, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101/1;

ведущий научный сотрудник, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4;

профессор, кафедра теоретической механики, Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

E-mail: anat-markeev@mail.ru

Сухоручкин Дмитрий Андреевич, ведущий инженер, лаборатория механики систем, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101/1.

E-mail: sukhor@ipmnet.ru

A. P. Markeev, D. A. Sukhoruchkin

On the dynamics of a pendulum mounted on a movable platform

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 240–251 (in Russian).

Keywords: pendulum, resonance, Hamiltonian system, stability.

MSC2010: 70E20, 70H14, 70K28

DOI: [10.20537/vm180210](https://doi.org/10.20537/vm180210)

The motion of a mathematical pendulum mounted on a movable platform is considered. The platform rotates around a given vertical with a constant angular velocity ω and simultaneously executes harmonic oscillations with amplitude A and frequency Ω along the vertical. The amplitude of oscillations is assumed to be small in

comparison with the length ℓ of the pendulum ($A = \varepsilon\ell$, $0 < \varepsilon \ll 1$). Three types of motions are considered. For the first two types, the pendulum is stationary relative to the platform and is located along its axis of rotation (hanging and inverted pendulum). For the third type of motions, the pendulum performs periodic oscillations with a period equal to the period of vertical oscillations of the platform. These oscillations have an amplitude of order ε and at $\varepsilon = 0$ become relative equilibrium positions, in which the pendulum is a constant angle from the vertical. The motion of the third type exists if the angular velocity of rotation of the platform is large enough ($\omega^2\ell > g$, g is acceleration of gravity). In this paper, the problem of stability of these three types of pendulum motions for small values of ε is solved. Both nonresonant cases and cases where resonances of the second, third and fourth orders occur in the system are considered. In the space of three dimensionless parameters of the problem, Lyapunov's stability and instability regions are singled out. The study is based on classical methods and algorithms due to Lyapunov, Poincaré and Birkhoff, as well as on modern methods of dynamical system analysis using Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) theory.

REFERENCES

1. Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa "mayatnik"* (Methods of research of dynamic systems of the type "pendulum"), Almaty: Nauka, 1981, 253 p.
2. Blekhman I.I. *Vibratsionnaya mekhanika* (Vibration mechanics), Moscow: Fizmatlit, 1994, 400 p.
3. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* (Problems of dynamics of solids with vibrating suspension), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2016, 308 p.
4. Yudovich V.I. Vibrodynamics and vibrogeometry of mechanical systems with constraints, *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, vol. 4, no. 3, pp. 26–158 (in Russian).
5. Markeev A.P. The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, issue 2, pp. 132–139. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002)
6. Belichenko M.V., Kholostova O.V. On the stability of stationary rotations in the approximate problem of motion of Lagrange's top with a vibrating suspension point, *Nelineinaya Dinamika*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81–104 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1701006](https://doi.org/10.20537/nd1701006)
7. Vishenkova E.A., Kholostova O.V. On the influence of vertical vibrations on the stability of permanent rotations of a rigid body about axes lying in the main plane of inertia, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 98–120 (in Russian). DOI: [10.20537/vm170109](https://doi.org/10.20537/vm170109)
8. Vishenkova E.A., Kholostova O.V. A study of permanent rotations of a heavy dynamically symmetric rigid body with a vibrating suspension point, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 590–607 (in Russian). DOI: [10.20537/vm170409](https://doi.org/10.20537/vm170409)
9. Markeev A.P. A pendulum on a rotating and vibrating foundation, *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 12, pp. 555–559. DOI: [10.1134/s1028335817120060](https://doi.org/10.1134/s1028335817120060)
10. Markeev A.P. Watt regulator dynamics, *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 12, pp. 538–542. DOI: [10.1134/s1028335817120023](https://doi.org/10.1134/s1028335817120023)
11. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, XIII, 518 p. DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9)
Original Russian text published in Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki*, Moscow: URSS, 2000, 416 p.
12. Mozer J.K. *Lectures on Hamiltonian systems*, Memoirs of the American Mathematical Society, New York: Courant Inst. Math. Sc., 1968, no. 81, pp. 1–60. Translated under the title *Lektsii o gamiltonovykh sistemakh*, Moscow: Mir, 1973, 167 p.
13. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
14. Giacaglia G.E.O. *Perturbation methods in non-linear systems*, New York: Springer-Verlag New York, 1972, IX, 369 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-6400-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6400-2)
Translated under the title *Metody teorii vozmushchenii dlya nelineinykh sistem*, Moscow: Nauka, 1979, 320 p.
15. Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebaniy* (Certain problems of the theory of nonlinear oscillations), Moscow: Gostekhizdat, 1956, 491 p.
16. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* (Theory of stability of motion), Moscow: Nauka, 1966, 530 p.
17. Markeev A.P. *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otноситel'no tsentra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems on the stability of the motion of the satellite relative to the center of mass), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2009, 396 p.

18. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. *Teoriya kolebaniy* (Theory of vibrations), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 915 p.
19. Markeyev A.P. The behaviour of a non-linear Hamiltonian system with one degree of freedom at the boundary of a parametric resonance domain, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, vol. 59, issue 4, pp. 541–551. DOI: [10.1016/0021-8928\(95\)00063-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00063-1)

Received 17.05.2018

Markeev Anatolii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Laboratory of Mechanics of Systems, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Science, pr. Vernadskogo, 101/1, Moscow, 119526, Russia;

Leading Researcher, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125080, Russia;

Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per., 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.

E-mail: anat-markeev@mail.ru

Sukhoruchkin Dmitrii Andreevich, Leading Engineer, Laboratory of Mechanics of Systems, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Science, pr. Vernadskogo, 101/1, Moscow, 119526, Russia.

E-mail: sukhor@ipmnet.ru