УДК 517.958, 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

МАЙОРАНОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ПРИМЕСИ В P-ВОЛНОВОЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ НАНОПРОВОЛОКЕ

В настоящее время в физической литературе активно изучаются майорановские локализованные состояния (МЛС) и сопутствующие их возникновению явления, такие как изменение кондактанса, что обусловлено весьма вероятным применением МЛС в квантовых вычислениях. Несмотря на актуальность, строгого математического исследования спектральных свойств и рассеяния для одночастичного оператора Боголюбова–де Жена H, обычно используемого для исследования МЛС, почти не проводилось; методы, предложенные в статье, позволяют получить математически и физически интересные результаты. В работе математически строго изучен вопрос существования МЛС (т. е. существования нулевого собственного значения) для гамильтониана Боголюбова–де Жена в случае бесконечной одномерной p-волновой сверхпроводящей структуры при наличии потенциала; получены условия существования МЛС. Также изучена задача рассеяния для оператора Боголюбова–де Жена с потенциалом. При решении данных задач используется функция Грина оператора H, которая также найдена в статье.

Ключевые слова: гамильтониан Боголюбова–де Жена, функция Грина, спектр, собственное значение, задача рассеяния, вероятность прохождения, майорановские локализованные состояния.

DOI: 10.20537/vm180208

В последние полтора десятилетия в физической литературе весьма актуальны исследования майорановских локализованных состояний (МЛС, см., например, обзоры [1–3]). МЛС представляют собой квазичастицы (возбуждения вида «частица плюс дырка») с нулевой энергией в структурах со сверхпроводящим порядком. МЛС совпадают со своими античастицами, что делает их устойчивыми к внешним воздействиям, и, кроме того, подчиняются неабелевой квантовой статистике; при их перемещениях возникает множество новых состояний, что может быть использовано в квантовых компьютерах [2–4]. Однако, несмотря на то, что теоретически существование МЛС доказано неоднократно (см., например, [5–8]), экспериментального доказательства до сих пор не получено [1, 3]. Кроме того, строгого математического исследования спектральных свойств и рассеяния для оператора Боголюбова–де Жена в разных ситуациях почти не проводилось (отчасти за исключением статьи [5]), в то время как предложенные в работе методы позволяют получить физически и математически интересные результаты. При исследовании МЛС используется одночастичный гамильтониан (оператор энергии) Боголюбова–де Жена. МЛС описываются собственными функциями данного гамильтониана, отвечающими нулевому собственному значению (нулевой энергии). При этом важную роль играет вероятность прохождения частицы (электрона) через потенциальный барьер (данная вероятность пропорциональна экспериментально измеряемому кондактансу), зависящая, вообще говоря, от существования МЛС. Таким образом, исследование задачи рассеяния может способствовать экспериментальному доказательству присутствия МЛС.

§ 1. Спектр и функция Грина

Рассмотрим гамильтониан для p-волновой сверхпроводящей нанопроволоки («непрерывный» аналог гамильтониана Китаева [1, 2, 6]) вида

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \mu & -i\Delta(-i\partial_x) \\ i\Delta(-i\partial_x) & \partial_x^2 + \mu \end{pmatrix}$$

(полагаем $\hbar/2m^2 = 1$, где m — масса частицы). Здесь μ — химический потенциал, $\Delta \neq 0$ — вещественный параметр сверхпроводящего спаривания. Область определения H состоит из (достаточно гладких) функций $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))$, где $\psi_1(x)$ описывает электрон, а $\psi_2(x)$ — дырку.

Введем обозначение

$$(F\psi)(p) = \widehat{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ipx} \psi(x)\, dx;$$

здесь F — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Тогда оператор $\widehat{H} = FHF^{-1}$ унитарно эквивалентен H, и для него справедливо равенство

$$\widehat{H} - E = \begin{pmatrix} p^2 - \mu - E & -i\Delta p \\ i\Delta p & -p^2 + \mu - E \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где E — спектральный параметр (энергия). Выпишем определитель матрицы (1):

$$\begin{aligned} d = &-\big((p^2-\mu)^2 - E^2\big) - \Delta^2 p^2 = \\ = &-\big(p^4 - 2(\mu - \Delta^2/2)p^2 + \mu^2 - E^2\big) = \\ = &-\big((p^2 - \mu + \Delta^2/2)^2 + \mu\Delta^2 - \Delta^4/4 - E^2\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Спектр оператора H состоит из значений E, для каждого из которых найдется такое p, что $d = 0$ или, согласно (2), будет справедливо равенство

$$E^2 = (p^2 - \mu + \Delta^2/2)^2 + \mu\Delta^2 - \Delta^4/4. \tag{3}$$

Если $\mu - \Delta^2/2 \geqslant 0$, то $p^2 - \mu + \Delta^2/2$ обращается в нуль, и E^2 изменяется от

$$\mu\Delta^2 - \Delta^4/4 = \Delta^2(\mu - \Delta^2/4) > 0$$

до ∞, так что спектр равен объединению промежутков

$$(-\infty, -|\Delta|\sqrt{\mu - \Delta^2/4}] \cup [|\Delta|\sqrt{\mu - \Delta^2/4}, \infty);$$

существует щель в спектре длиной $2|\Delta|\sqrt{\mu - \Delta^2/4} = |\Delta|\sqrt{4\mu - \Delta^2}$. Если $\mu - \Delta^2/2 < 0$, то правая часть (3) изменяется от

$$(\mu - \Delta^2/2)^2 + \mu\Delta^2 - \Delta^4/4 = \mu^2$$

до ∞, и спектр равен $(-\infty, -|\mu|] \cup [|\mu|, \infty)$; длина щели равна $2|\mu|$.

Лемма 1. *Функция Грина оператора H определяется следующими равенствами:*

$$\begin{aligned} ((H-E)^{-1}\varphi)_1(x) = &-\frac{a - \Delta^2/2 + E}{4i\alpha_+ a} \int_R e^{i\alpha_+|x-x'|} \varphi_1(x')\, dx' - \\ &- \frac{a + \Delta^2/2 - E}{4i\alpha_- a} \int_R e^{i\alpha_-|x-x'|} \varphi_1(x')\, dx' + \\ &+ \frac{\Delta}{4a} \int_R \left(e^{i\alpha_+|x-x'|} - e^{i\alpha_-|x-x'|}\right) \operatorname{sgn}(x-x') \varphi_2(x')\, dx', \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} ((H-E)^{-1}\varphi)_2(x) = &\frac{a - \Delta^2/2 - E}{4i\alpha_+ a} \int_R e^{i\alpha_+|x-x'|} \varphi_2(x')\, dx' + \\ &+ \frac{a + \Delta^2/2 + E}{4i\alpha_- a} \int_R e^{i\alpha_-|x-x'|} \varphi_2(x')\, dx' - \\ &- \frac{\Delta}{4a} \int_R \left(e^{i\alpha_+|x-x'|} - e^{i\alpha_-|x-x'|}\right) \operatorname{sgn}(x-x') \varphi_1(x')\, dx'. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Найдем вначале $(\widehat{H}-E)^{-1}$, решая уравнение

$$(\widehat{H}-E)\widehat{\psi}=\widehat{\varphi} \tag{6}$$

относительно $\widehat{\psi}$. Имеем

$$\frac{1}{d}=-\frac{1}{(p^2-\mu+\Delta^2/2)^2-a^2}=$$
$$=-\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{p^2-\mu+\Delta^2/2-a}-\frac{1}{p^2-\mu+\Delta^2/2+a}\right), \tag{7}$$

где $a=\sqrt{E^2+\Delta^4/4-\mu\Delta^2}$.

Из (1), (6), (7) и формул Крамера находим

$$\widehat{\psi}_1(p)=\frac{(p^2-\mu+E)\widehat{\varphi}_1-ip\Delta\widehat{\varphi}_2}{2a(p^2-\alpha_+^2)}-\frac{(p^2-\mu+E)\widehat{\varphi}_1-ip\Delta\widehat{\varphi}_2}{2a(p^2-\alpha_-^2)},$$

где

$$\alpha_\pm=\sqrt{\mu\pm a-\Delta^2/2}.$$

Заметим, что

$$\frac{p^2-\mu+E}{2a(p^2-\alpha_\pm^2)}=\frac{1}{2a}+\frac{\pm a-\Delta^2/2+E}{2a(p^2-\alpha_\pm^2)},$$

тогда

$$\widehat{\psi}_1(p)=\frac{(a-\Delta^2/2+E)\widehat{\varphi}_1-ip\Delta\widehat{\varphi}_2}{2a(p^2-\alpha_+^2)}-\frac{(-a-\Delta^2/2+E)\widehat{\varphi}_1-ip\Delta\widehat{\varphi}_2}{2a(p^2-\alpha_-^2)}. \tag{8}$$

Имеем известное легко доказываемое равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\frac{e^{ipx}\widehat{\varphi}(p)\,dp}{p^2-\alpha^2}=-\frac{1}{2i\alpha}\int_R e^{i\alpha|x-x'|}\varphi(x')\,dx', \tag{9}$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R\frac{pe^{ipx}\widehat{\varphi}(p)\,dp}{p^2-\alpha^2}=-\frac{1}{2i}\int_R e^{i\alpha|x-x'|}\mathrm{sgn}(x-x')\varphi(x')\,dx'. \tag{10}$$

Пользуясь (8)–(10), получаем равенство (4). Аналогично: из

$$\widehat{\psi}_2=\frac{1}{d}\left((p^2-\mu-E)\widehat{\varphi}_2-ip\Delta\widehat{\varphi}_1\right)$$

находим равенство (5). □

§ 2. Майорановские локализованные состояния

Рассмотрим возмущенный гамильтониан $H+V$, где

$$V=V(x)=V_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\delta(x), \tag{11}$$

где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака, V_0 — вещественная константа. Для поиска МЛС решим уравнение

$$\psi=-(H-E)^{-1}V\psi \tag{12}$$

с $E=0$. При вычислениях будем использовать только неотрицательные гладкие четные приближения $\delta_n\to\delta$, $n\to\infty$, такие, что

$$\int_R\delta_n(x)\,dx=1,\quad n=1,2,\ldots,$$

это соответствует симметричному распределению потенциальной энергии $V(x)$ относительно нуля.

Обозначим $a'=|\Delta|\sqrt{\Delta^2/4-\mu}$, $\alpha'_\pm=\sqrt{\mu\pm a'-\Delta^2/2}$.

Теорема 1. *Число $E=0$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда V_0 удовлетворяет равенству*

$$V_0 = 4ia'\left(\frac{a'-\Delta^2/2}{\alpha'_+}+\frac{a'+\Delta^2/2}{\alpha'_-}\right)^{-1}, \tag{13}$$

правая часть (13) *вещественна и* $\alpha'_\pm = i\tau_\pm$, где $\tau_\pm>0$. *При этом собственное подпространство двумерно и порождается функциями*

$$\psi_j(x)=\frac{V_0}{4a'}\left[\frac{(a'-\Delta^2/2)C_j}{i\alpha'_+}\cdot e^{i\alpha'_+|x|}+\frac{(a'+\Delta^2/2)C_j}{i\alpha'_-}\cdot e^{i\alpha'_-|x|}+\right.$$
$$\left.+\Delta C_{j'}\cdot\left(e^{i\alpha'_+|x|}-e^{i\alpha'_-|x|}\right)\operatorname{sgn}(x)\right],\quad j=1,2, \tag{14}$$

где C_1, C_2 — некоторые константы; здесь и далее $j'=j+(-1)^{j-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (12) для $E=0$ с помощью леммы 1 и (11) запишем в виде

$$\psi_j(x)=\frac{(a'-\Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_+a'}\cdot e^{i\alpha'_+|x|}\psi_j(0)+\frac{(a'+\Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_-a'}\cdot e^{i\alpha'_-|x|}\psi_j(0)+$$
$$+\frac{\Delta V_0}{4a'}\cdot\left(e^{i\alpha'_+|x|}-e^{i\alpha'_-|x|}\right)\operatorname{sgn}(x)\psi_{j'}(0),\quad j=1,2, \tag{15}$$

где $\psi_j(0)=\frac{1}{2}\left(\psi_j(+0)+\psi_j(-0)\right)$. Умножим (15) на $\delta_n(x)$, проинтегрируем и перейдем к пределу при $n\to\infty$; получим равенства

$$\psi_j(0)\left(-1+\frac{(a'-\Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_+a'}+\frac{(a'+\Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_-a'}\right)=0,\quad j=1,2,$$

из которых, очевидно, следует справедливость теоремы. □

Для сверхпроводников известно понятие топологической и нетопологической (тривиальной) фаз [1–3], которые определяются соотношениями между параметрами системы. В случае рассматриваемого гамильтониана H топологическая (нетопологическая) фаза описывается условием $\mu>0$ (соответственно $\mu<0$)(см. [2]). Под МЛС в статье будем понимать частицы с нулевой энергией, описываемые такими собственными функциями $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ оператора H, что

$$\psi_1^*=\psi_2, \tag{16}$$

где $*$ — комплексное сопряжение. Выполнение (16) означает, что частица совпадает со своей античастицей [1]. Обычно МЛС возникают на границе между топологической и нетопологической фазами, в частности на концах сверхпроводящей нанопроволоки [1,2], причем в топологической фазе проводника.

Теорема 2. *Предположим, что μ мало и $|\mu|\ll\Delta^2/4$. Число $E=0$ является собственным значением H тогда и только тогда, когда $\mu<0$ (т. е. топологическая фаза тривиальна) и выполнено равенство $V_0=-|\Delta|+O(\mu)$. Соответствующие собственные функции имеют вид*

$$\psi_j(x)=\left[-(\operatorname{sgn}(\mu)C_j+\operatorname{sgn}(\Delta)\operatorname{sgn}(x)C_{j'})e^{-\left|\frac{\mu}{\Delta}\right||x|}+\right.$$
$$\left.+\,(C_j+\operatorname{sgn}(\Delta)\operatorname{sgn}(x)C_{j'})e^{-|\Delta||x|}\right]+O(\mu),\quad j=1,2. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположений теоремы щель в спектре равна $(-|\mu|,|\mu|)$ (см. § 1), и справедливы асимптотические равенства

$$a'=(\Delta^2/2)\sqrt{1-\frac{4\mu}{\Delta^2}}=\frac{\Delta^2}{2}-\mu-\frac{\mu^2}{\Delta^2}+O(\mu^3), \tag{18}$$
$$\alpha'_+=i\left|\frac{\mu}{\Delta}\right|+O(\mu^2),\quad \alpha'_-=i|\Delta|+O(\mu).$$

Условие существования локализованных состояний (13) примет вид

$$V_0 = 2|\Delta|\,(\operatorname{sgn}(\mu) - 1)^{-1} + O(\mu). \tag{19}$$

Это равенство справедливо лишь для тривиальной фазы ($\mu < 0$), при этом $V_0 = -|\Delta| + O(\mu)$. В силу (18), (19) для коэффициентов полученных волновых функций, удовлетворяющих (14), справедливы асимптотические формулы:

$$\frac{(a' - \Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_+ a'} = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\mu) + O(\mu),$$
$$\frac{(a' + \Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_- a'} = \frac{1}{2} + O(\mu), \quad \frac{\Delta V_0}{4a'} = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Delta) + O(\mu).$$

Отсюда следует справедливость теоремы. □

Следствие 1. *Для того чтобы локализованные состояния были майорановскими, должно выполняться равенство* (16). *Тогда при* $C_1 = C_2 = C$ *получим волновые функции МЛС:*

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) = C\Big[-(\operatorname{sgn}(\mu) + \operatorname{sgn}(\Delta)\operatorname{sgn}(x))e^{-\left|\frac{\mu}{\Delta}\right||x|} + \\ + (1 + \operatorname{sgn}(\Delta)\operatorname{sgn}(x))e^{-|\Delta||x|}\Big] + O(\mu),$$

образующие одномерное подпространство в двумерном пространстве функций (17).

Пусть теперь мало Δ и $\Delta^2 \ll |\mu|$. Спектр оператора H в этом случае также равен $(-\infty, -|\mu|] \cup [|\mu|, \infty)$, и справедливы равенства $a' = |\Delta|\sqrt{-\mu} + O(\Delta^2), \alpha'_\pm = \sqrt{\mu} + O(\Delta)$. Для убывания волновых функций должно выполняться условие $\mu = -|\mu| < 0$ (нетопологическая фаза), тогда

$$\alpha'_\pm = i\sqrt{|\mu|} + O(\Delta), \quad a' = |\Delta|\sqrt{|\mu|} + O(\Delta^2)$$

и условие существования локализованных состояний (13) можно переписать в виде

$$V_0 = -2\sqrt{|\mu|} + O(\Delta).$$

Справедливы асимптотические равенства:

$$\frac{(a' - \Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_+ a'} = \frac{(a' + \Delta^2/2)V_0}{4i\alpha'_- a'} = \frac{1}{2} + O(\Delta),$$
$$\frac{\Delta V_0}{4a'} = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Delta) + O(\Delta).$$

Теорема 3. *Предположим, что* $\Delta^2 \ll |\mu|$. *Число* $E = 0$ *является собственным значением* H *тогда и только тогда, когда* $\mu < 0$ *(т. е. топологическая фаза тривиальна) и выполнено равенство* $V_0 = -2\sqrt{|\mu|} + O(\Delta)$. *Соответствующие собственные функции имеют вид*

$$\psi_j(x) = C_j e^{-\sqrt{|\mu|}|x|} + O(\Delta), \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

Замечание 1. При $C_1 = C_2 = C$ волновые функции (20)

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) = Ce^{-\sqrt{|\mu|}|x|} + O(\Delta)$$

отвечают МЛС. При уменьшении $|\mu|$, т. е. щели, локализация МЛС убывает, так как множитель в показателе экспоненты стремится к нулю.

Таким образом, в рамках двух рассмотренных предположений (малого μ и малого Δ) МЛС существуют лишь в тривиальной фазе и образуют одномерное подпространство в двумерном собственном пространстве гамильтониана H, отвечающем $E = 0$. Описанные МЛС отличаются от обычных [1, 3] тем, что возникают в нетопологической фазе, а их существование сильно зависит от параметров системы; небольшое изменение, например, параметра V_0 приводит к их исчезновению.

§ 3. Рассеяние вблизи сверхпроводящей щели

Найдем рассеивающие состояния при $V = 0$. Ищем решения ψ_0 уравнения $(H - E)\psi_0 = 0$ в виде $\psi_0 = (D, B)^T e^{ikx}$, тогда имеем $d(k) = 0$ и $k = \pm\alpha_\pm = \pm\sqrt{\mu \pm a - \Delta^2/2}$; далее выбираем знак «+» перед корнем (частица движется слева направо).

Рассмотрим случай $|\mu| \ll \Delta^2/4$. Предполагаем, что $E = |\mu| + A\varepsilon^m$, где $m > 1$, $|\mu| = \varepsilon$, $A > 0$. Имеем

$$a = \sqrt{\mu^2 + 2A|\mu|\varepsilon^m + \Delta^4/4 - \mu\Delta^2 + o(\varepsilon^m)} = \sqrt{(\Delta^2/2 - \mu)^2 + 2A|\mu|\varepsilon^m + o(\varepsilon^m)} =$$
$$= (\Delta^2/2 - \mu)\left(1 + \frac{A|\mu|\varepsilon^m}{(\Delta^2/2 - \mu)^2}\right) + o\left(\varepsilon^{m+1}\right) = \Delta^2/2 - \mu + \frac{2A\varepsilon^{m+1}}{\Delta^2} + o\left(\varepsilon^{m+1}\right).$$

Отсюда

$$\alpha_+ = \frac{\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}}{|\Delta|} + o\left(\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}\right), \quad \alpha_- = i|\Delta| + O(\varepsilon).$$

Выбираем для ψ_0 значение $k = \alpha_+$. Тогда

$$B = \frac{\alpha_+^2 - \mu - E}{i\Delta p}D = -\frac{\mu + |\mu| + A\varepsilon^m + o(\varepsilon^m)}{i\sqrt{2A}\operatorname{sgn}(\Delta)\varepsilon^{\frac{m+1}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}\right)}D. \tag{21}$$

Рассмотрим случай нетривиальной фазы, т. е. $\mu > 0$, тогда из (21) получаем $B = O\left(\varepsilon^{\frac{1-m}{2}}\right) D$. Поскольку $m > 1$, то после нормировки

$$\psi_0(x) = (0, 1)^T e^{i\alpha_+ x}.$$

Найдем асимптотические формулы для коэффициентов функции Грина:

$$\frac{a - \Delta^2/2 + E}{4i\alpha_+ a} = \frac{\sqrt{A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{2\sqrt{2}i|\Delta|} + o\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\right), \quad \frac{a + \Delta^2/2 - E}{4i\alpha_- a} = -\frac{1}{2|\Delta|} + O(\varepsilon), \quad \frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{2\Delta} + O(\varepsilon),$$
$$\frac{a - \Delta^2/2 - E}{4i\alpha_+ a} = -\frac{1}{i\sqrt{2A}|\Delta|\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}} + O\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\right), \quad \frac{a + \Delta^2/2 + E}{4i\alpha_- a} = -\frac{1}{2|\Delta|} + O(\varepsilon).$$

В этом случае уравнение Липпмана–Швингера

$$\psi = \psi_0 - (H - E)^{-1} V\psi$$

имеет вид

$$\psi_1(x) = -\frac{V_0}{2|\Delta|}\psi_1(0)e^{i\alpha_-|x|} + \frac{V_0}{2\Delta}\operatorname{sgn}(x)\psi_2(0)\left(e^{i\alpha_+|x|} - e^{i\alpha_-|x|}\right) + O\left(\varepsilon^l\right),$$
$$\psi_2(x) = e^{i\alpha_+ x} - \frac{V_0}{i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}|\Delta|}\psi_2(0)e^{i\alpha_+|x|} - \frac{V_0}{2|\Delta|}\psi_2(0)e^{i\alpha_-|x|} +$$
$$+ \frac{V_0}{2\Delta}\operatorname{sgn}(x)\psi_1(0)\left(e^{i\alpha_+|x|} - e^{i\alpha_-|x|}\right) + O\left(\varepsilon^l\right),$$

где $l=\min\{1,\frac{m-1}{2}\}$. Отсюда

$$\psi_1(0)\left(1+\frac{V_0}{2|\Delta|}+O\left(\varepsilon^l\right)\right)=0,$$

и при $V_0\neq -2|\Delta|+O(\varepsilon^l)$ имеем $\psi_1(0)=O\left(\varepsilon^l\right)$. Далее,

$$\left(1+\frac{V_0}{i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}|\Delta|}+\frac{V_0}{2|\Delta|}\right)\psi_2(0)=1+O\left(\varepsilon^l\right).$$

Значит, $\psi_2(0)=O\left(\varepsilon^l\right)$ (при $V_0\neq 0$) и $\psi_1(x)=O\left(\varepsilon^l\right)$, т. е. рассеяние в основном происходит по второй компоненте. Имеем

$$\psi_2(x)=e^{i\alpha_+x}-\frac{2V_0e^{i\alpha_+|x|}}{2V_0+2i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}|\Delta|+V_0i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}}+O\left(\varepsilon^l\right)=$$
$$=e^{i\alpha_+x}-e^{i\alpha_+|x|}+O\left(\varepsilon^l\right).$$

Тогда для амплитуды отражения a_- справедливо равенство

$$a_-=-1+O(\varepsilon^l),$$

и имеет место практически полное отражение по второй компоненте.

В случае тривиальной фазы, т. е. при $\mu<0$, из (21) имеем $B=O\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\right)D$ и

$$\psi_0(x)=(1,0)^Te^{i\alpha_+x}.$$

С помощью асимптотических формул для коэффициентов функции Грина

$$\frac{a-\Delta^2/2+E}{4i\alpha_+a}=\frac{1}{i\sqrt{2A}|\Delta|\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}+O\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\right),\quad \frac{a+\Delta^2/2-E}{4i\alpha_-a}=-\frac{1}{2|\Delta|}+O(\varepsilon),$$
$$\frac{a-\Delta^2/2-E}{4i\alpha_+a}=-\frac{\sqrt{A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{2\sqrt{2}i|\Delta|}+o\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\right),\quad \frac{a+\Delta^2/2+E}{4i\alpha_-a}=-\frac{1}{2|\Delta|}+O(\varepsilon),\quad \frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{2\Delta}+O(\varepsilon),$$

запишем уравнение Липпмана–Швингера:

$$\begin{gathered}\psi_1(x)=e^{i\alpha_+x}+\frac{V_0}{i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}|\Delta|}\psi_1(0)e^{i\alpha_+|x|}-\frac{V_0}{2|\Delta|}\psi_1(0)e^{i\alpha_-|x|}+\\ +\frac{V_0}{2\Delta}\mathrm{sgn}(x)\psi_2(0)\left(e^{i\alpha_+|x|}-e^{i\alpha_-|x|}\right)+O\left(\varepsilon^l\right),\\ \psi_2(x)=-\frac{V_0}{2|\Delta|}\psi_2(0)e^{i\alpha_-|x|}+\frac{V_0}{2\Delta}\mathrm{sgn}(x)\psi_1(0)\left(e^{i\alpha_+|x|}-e^{i\alpha_-|x|}\right)+O\left(\varepsilon^l\right),\end{gathered}\tag{22}$$

где $l=\min\{1,\frac{m-1}{2}\}$. Из второго равенства (22) получим $\psi_2(0)=O\left(\varepsilon^l\right)$ при $V_0\neq-2|\Delta|+O(\varepsilon^l)$. Из

$$\left(1-\frac{V_0}{i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}|\Delta|}+\frac{V_0}{2|\Delta|}\right)\psi_1(0)=1+O\left(\varepsilon^l\right)$$

при $V_0\neq 0$ имеем

$$\psi_1(0)=-\frac{i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}|\Delta|}{V_0}+O\left(\varepsilon^l\right)=O\left(\varepsilon^l\right)\tag{23}$$

и $\psi_2(x)=O\left(\varepsilon^l\right)$, т. е. в этом случае рассеяние происходит в основном по первой компоненте. В силу (23) справедливо равенство

$$\psi_1(x)=e^{i\alpha_+x}+\frac{V_0}{i\sqrt{2A}\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}|\Delta|}\psi_1(0)e^{i\alpha_+|x|}+O\left(\varepsilon^l\right)=$$
$$=e^{i\alpha_+x}-e^{i\alpha_+|x|}+O\left(\varepsilon^l\right).$$

Тогда $a_-=-1+O\left(\varepsilon^l\right)$, и имеет место практически полное отражение по первой компоненте.

Теорема 4. *Пусть* $E = |\mu| + A\varepsilon^m$, *где* $m > 1$, $|\mu| = \varepsilon$, $A > 0$. *Тогда в случае тривиальной фазы* ($\mu < 0$) *рассеяние происходит только по первой компоненте, а в случае нетривиальной фазы* ($\mu > 0$) *— только по второй компоненте, причем в обоих случаях вероятность отражения равна* $P_- = |a_-|^2 = 1 + O\left(\varepsilon^l\right)$, $l = \min\{1, \frac{m-1}{2}\}$.

Замечание 2. Если $E = -|\mu| - A\varepsilon^m$, $|\mu| = \varepsilon$, $A > 0$, то в рассуждениях электроны и дырки поменяются местами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elliot S.R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // Rev. Mod. Phys. 2015. Vol. 87. Issue 1. P. 137–163. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Rep. Prog. Phys. 2012. Vol. 75. Issue 7. 076501. DOI: 10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors // Journal of the Physical Society of Japan. 2016. Vol. 85. No. 7. 072001. DOI: 10.7566/JPSJ.85.072001
4. Sarma S.D., Nag A., Sau J.D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires // Phys. Rev. B. 2016. Vol. 94. Issue 3. 035143. DOI: 10.1103/PhysRevB.94.035143
5. Chuburin Yu.P. Existence of Majorana bound states near impurities in the case of a small superconducting gap // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2017. Vol. 89. P. 130–133. DOI: 10.1016/j.physe.2017.02.017
6. Kitaev A.Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Phys.-Usp. 2001. Vol. 44. P. 131–136. DOI: 10.1070/1063-7869/44/10S/S29
7. Karzig T., Refael G., von Oppen F. Boosting Majorana zero modes // Phys. Rev. X. 2013. Vol. 3. Issue 4. 041017. DOI: 10.1103/PhysRevX.3.041017
8. Sarma S.D., Sau J.D., Stanescu T.D. Splitting of the zero-bias conductance peak as smoking gun evidence for the existence of the Majorana mode in a superconductor-semiconductor nanowire // Phys. Rev. B. 2012. Vol. 86. Issue 22. 220506. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.220506

Поступила в редакцию 10.05.2018

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru

T. S. Tinyukova

Majorana states in a p-wave superconducting nanowire

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 222–230 (in Russian).

Keywords: Bogolyubov–de Gennes Hamiltonian, Green's function, spectrum, eigenvalue, scattering problem, transmission probability, Majorana bounded states.

MSC2010: 81Q10, 81Q15

DOI: 10.20537/vm180208

At the present time, the Majorana bounded states (MBSs) and associated phenomena, such as the variation of the conductance, are being actively studied in the physical literature because of the highly probable use of MBSs in quantum computations. In spite of the urgency, a rigorous mathematical study of the spectral properties and scattering for the one-particle Bogolyubov–de Gennes operator H, commonly used for investigation of MBS's, has almost never been carried out. The methods proposed in the article allow one to obtain mathematically and physically interesting results. In this paper, we study the problem of the existence of MBSs (that is, the existence of a zero eigenvalue) for the Bogolyubov–de Gennes Hamiltonian in the case of an infinite one-dimensional superconducting structure in the presence of a potential. Conditions for the existence of MBSs are obtained. The scattering problem for the Bogolyubov–de Gennes operator with a potential is studied. The Green's function of the operator H used in solving these problems is also found.

REFERENCES

1. Elliot S.R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Rev. Mod. Phys.*, 2015, vol. 87, issue 1, pp. 137–163. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, *Rep. Prog. Phys.*, 2012, vol. 75, issue 7, 076501. DOI: 10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors, *Journal of the Physical Society of Japan*, 2016, vol. 85, no. 7, 072001. DOI: 10.7566/JPSJ.85.072001
4. Sarma S.D., Nag A., Sau J.D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires, *Phys. Rev. B.*, 2016, vol. 94, issue 3, 035143. DOI: 10.1103/PhysRevB.94.035143
5. Chuburin Yu.P. Existence of Majorana bound states near impurities in the case of a small superconducting gap, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2017, vol. 89, pp. 130–133. DOI: 10.1016/j.physe.2017.02.017
6. Kitaev A.Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Phys.-Usp.*, 2001, vol. 44, pp. 131–136. DOI: 10.1070/1063-7869/44/10S/S29
7. Karzig T., Refael G., von Oppen F. Boosting Majorana zero modes, *Phys. Rev. X.*, 2013, vol. 3, issue 4, 041017. DOI: 10.1103/PhysRevX.3.041017
8. Sarma S.D., Sau J.D., Stanescu T.D. Splitting of the zero-bias conductance peak as smoking gun evidence for the existence of the Majorana mode in a superconductor-semiconductor nanowire, *Phys. Rev. B.*, 2012, vol. 86, issue 22, 220506. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.220506

Received 10.05.2018

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru