МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 2

УДК 519.6

© *Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов*

ВОЛМЭНОВСКИЙ КОМПАКТИФИКАТОР И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ДОСТИЖИМОСТИ[1]

Рассматривается абстрактная задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера. Ограничения такого типа могут возникать при ослаблении стандартных (в теории управления) ограничений, таких как фазовые ограничения, краевые и промежуточные условия, которым должны удовлетворять траектории системы. Однако ограничения асимптотического характера могут возникать и изначально, характеризуя тенденции в части реализации желаемого поведения. Так, например, можно говорить о реализации достаточно мощных импульсов управления исчезающе малой длительности. В этом последнем случае трудно говорить об ослаблении каких-либо стандартных ограничений. Так или иначе, мы сталкиваемся с набором ужесточающихся требований, каждому из которых можно сопоставить некоторый аналог области достижимости в теории управления, а точнее образ подмножества пространства обычных решений (управлений) при действии заданного оператора. В работе исследуются вопросы структуры возникающего (как аналог области достижимости) множества притяжения. Схема исследования базируется на применении специального варианта расширения пространства решений, допускающего естественную аналогию с расширением Волмэна, используемого в общей топологии. В этой ситуации естественно полагать, что пространство обычных решений оснащено некоторой топологией (обычно в этом случае исследуется T_1-пространство). В этой связи обсуждаются вопросы, связанные с заменой множеств, формирующих ограничения асимптотического характера, замыканиями и внутренностями, а также (частично) вопросы, связанные с представлением внутренности множества допустимых обобщенных элементов, образующего вспомогательное множество притяжения.

Ключевые слова: ограничения асимптотического характера, расширение задачи, топология.

DOI: 10.20537/vm180206

Введение

Основным предметом исследования настоящей работы является вариант конструкции, называемой компактификатором (см., в частности, [1]) и применяемой для целей построения множества притяжения (МП) в абстрактной задаче о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Роль этой конструкции состоит в построении адекватного пространства обобщенных элементов (ОЭ), на которое затем можно было бы продолжить целевой оператор исследуемой задачи; данное продолжение должно быть непрерывным. В качестве ОЭ использовались, в частности, меры и ультрафильтры (у/ф). Оказалось, в частности, что для целей построения расширений прикладных по смыслу задач о достижимости можно, в принципе, использовать конструкции, применяемые в общей топологии (компактификация Стоуна–Чеха, расширение Волмэна и др.; см. [2, 3.6], [3, § 6]). В частности, как отмечено в [4, 5], при построении компактификатора удается применить схему, базирующуюся на идеях расширения Волмэна [2, 3.6]. Настоящая работа содержит развитие данного подхода. Рассматривается, в частности, вопрос о замене семейства, определяющего ОАХ исходной задачи, соответствующим семейством замыканий (при этом предполагается, что пространство обычных решений оснащено топологией, удовлетворяющей аксиоме T_1). Показано, что упомянутые два варианта ОАХ порождают одно и то же МП; следовательно, имеет место естественная эквивалентность по результату. Основным инструментом исследования является волмэновский компактификатор (компактификатор, построенный на идее использования расширения Волмэна).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 16–01–00505, 16–01–00649).

Заметим, что постановки, на идейном уровне связанные с достижимостью при ОАХ, возникают, в частности, в теории управления (см. [6–8] и др.) при исследовании вопросов, связанных с ослаблением типичных «стандартных» ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения). При построении расширений задач упомянутого типа обычно использовались обобщенные управления (аналоги ОЭ), определяемые в виде стратегических мер (на декартовых произведениях) или мерозначных функций на соответствующем промежутке времени. Такой подход является естественным для задач управления с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л. С. Понтрягиным; важную роль сыграли при этом работы Р. В. Гамкрелидзе (см. [7]). Отметим здесь же оригинальный подход Н. Н. Красовского, связанный с применением аппарата обобщенных функций в задачах импульсного управления; этот подход (см. [8]) послужил основой многих исследований в этой области.

Строго говоря, объектом использования расширений (см. также [6]) являлись задачи оптимального управления; однако применяемые для целей оптимизации в классе обобщенных управлений конструкции без особых затруднений могут быть распространены на (весьма важные для теории и приложений) задачи о достижимости.

Разумеется, у/ф едва ли могут конкурировать с управлениями-мерами (т. е. с обобщенными управлениями) при решении конкретных задач. Однако некоторые вопросы качественного характера могут, как представляется, исследоваться с привлечением конструкций, в которых у/ф использовались бы в качестве ОЭ, т. е. применялись бы в качестве аналогов обобщенных управлений. В аналогичном качестве ранее удалось использовать конечно-аддитивные меры (см. [9–12] и др.), что, помимо всего прочего, позволило установить эффективно проверяемые условия асимптотической нечувствительности по результату при ослаблении части ограничений. Естественным развитием данного направления стали работы [13–15], где удалось дать «конечномерное» описание МП для одной задачи о достижимости с ОАХ (более того, в [15] данное описание для частного случая задачи управления материальной точкой было доведено до компьютерной реализации).

Все же случаи постановок, где (как в [13–15]) достаточно «изощренные» конструкции расширения приводят к весьма конкретным результатам, являются достаточно редкими. Обращаясь к построениям на основе расширения Волмэна, мы стремимся поэтому к установлению положений качественного характера. В данном случае речь идет о возможности эквивалентной замены одних ОАХ другими. Соответствующее обоснование осуществляется с применением волмэновского компактификатора и сводится к проверке отождествимости вспомогательных МП (по сути, множеств допустимых ОЭ).

§ 1. Обозначения и определения общего характера

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.), def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем единственное множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов; $\{x;y\}$ — неупорядоченная пара объектов x, y. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, для которого $z \in \{z\}$. Множества — объекты, а потому $\{A;B\}$ определено для любых двух множеств A и B. Как следствие, имеем (см. [16, с. 87]) для произвольных объектов a и b в виде $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$ упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Каждой УП h сопоставляются соответственно ее первый и второй элементы $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$, однозначно определяемые условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Если X — множество, то $\mathcal{P}(X)$ есть def семейство всех подмножеств (п/м) X и $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м X); через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м X; $\mathrm{Fin}(X) \subset \mathcal{P}'(X)$. Тогда для всякого множества Y в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$

имеем семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(Y)$. Для всяких множеств U и V через V^U обозначаем, следуя [16], множество всех отображений (функций) из U в V (при $f \in V^U$ и $u \in U$ в виде $f(u) \in V$ имеем значение f в точке u); если $g \in V^U$ и $W \in \mathcal{P}(U)$, то $g^1(W) \triangleq \{g(u)\colon u \in W\} \in \mathcal{P}(V)$ есть образ W при действии отображения g. Если U и V — непустые множества, $g \in V^U$ и $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(U))$, то

$$g^1[\mathfrak{U}] \triangleq \{g^1(U)\colon U \in \mathfrak{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(V)).$$

Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство (множеств) и B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.1}$$

определяет след $\mathcal{A}$ на множество B. Обычно в (1.1) будет предполагаться, что $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ и $B \in \mathcal{P}(S)$, где S — некоторое множество. Для произвольных множества M и семейства $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))$ в виде

$$\mathbf{C}_M[\mathcal{M}] \triangleq \{M \setminus H\colon H \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) \tag{1.2}$$

имеем семейство п/м M, двойственное по отношению к $\mathcal{M}$. В дальнейшем (1.2) используется, в частности, в случаях, когда $\mathcal{M}$ — топология на M или семейство замкнутых множеств в топологическом пространстве (ТП). Если $\mathcal{S}$ — непустое семейство, то

$$(\{\cup\}(\mathcal{S}) \triangleq \{\bigcup_{S \in \chi} S\colon \chi \in \mathcal{P}(\mathcal{S})\})\ \&\ (\{\cap\}(\mathcal{S}) \triangleq \{\bigcap_{S \in \chi} S\colon \chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{S})\}).$$

Специальные семейства. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество I. Элементы семейства

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) | (\varnothing \in \mathcal{L}) \& (I \in \mathcal{L}) \& (A \cap B \in \mathcal{L}\ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L})\}$$

суть π-системы п/м I с «нулем» и «единицей». Тогда посредством

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] | I \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\},$$

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I] | \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}$$

введены соответственно алгебры п/м I и топологии на I, а в виде

$$(\mathrm{LAT})_0[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] | A \cup B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I}\}$$

имеем семейство всех решеток п/м I с «нулем» и «единицей». Отметим также, что

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] |\ \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists J \in \mathcal{I}\colon (x \in J)\ \&\ (J \cap L = \varnothing)\}$$

есть семейство отделимых π-систем, элементами которых являются п/м I. Отметим, что для

$$(\mathrm{LAT})^0[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[I] | \{x\} \in \mathcal{L}\ \forall x \in I\}$$

имеем очевидное вложение $(\mathrm{LAT})^0[I] \subset \tilde{\pi}^0[I]$. Полагаем, наконец, что

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) | \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}\ \forall \mathcal{L} \in \pi[I]; \tag{1.3}$$

в (1.3) определены непустые центрированные подсемейства соответствующей π-системы.

Фильтры π-систем. Фиксируем в пределах настоящего пункта непустое множество I и π-систему $\mathcal{I} \in \pi[E]$; в виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})|\ (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall\, A \in \mathcal{F}\ \forall\, B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall\, F \in \mathcal{F}\ \forall\, J \in \mathcal{I}\ (F \subset J) \Longrightarrow (J \in \mathcal{F}))\}$$

имеем семейство всех фильтров π-системы $\mathcal{I}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) &\stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})|\forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})|\forall\, L \in \mathcal{I}\ \ (L \cap U \neq \varnothing\ \forall\, U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]|\forall\, \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}\end{aligned}$$

есть семейство всех у/ф данной π-системы, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \varnothing$. При этом

$$((I, \mathcal{I}) - \mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{I}|x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \forall\, x \in I \tag{1.4}$$

(в (1.4) определены тривиальные или фиксированные фильтры π-системы $\mathcal{I}$). Известно [17], что

$$((I, \mathcal{I}) - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\ \forall\, x \in I) \Longleftrightarrow (\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]). \tag{1.5}$$

Полагаем также, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}|\mathcal{J}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})|\mathcal{J} \subset \mathcal{U}\}\ \forall\, \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}). \tag{1.6}$$

Частный случай. Поскольку $\mathcal{P}(I) \in \pi[I]$, где I — непустое множество, то определены семейства $\mathfrak{F}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(I))$ и $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(I))$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \neq \varnothing$. При этом, конечно (см. (1.5)),

$$(I - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} ((I, \mathcal{P}(I)) - \mathrm{triv})[x] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]\ \forall\, x \in I.$$

Наконец, в виде конкретизации (1.6) имеем, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I|\mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(I)|\mathcal{J}) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]|\mathcal{J} \subset \mathcal{U}\}\ \forall\, \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)).$$

Используемые в настоящем пункте у/ф будем называть стоун-чеховскими, имея в виду одну из наиболее естественных реализаций компактификации Стоуна–Чеха (см. [3, § 6]). Полагаем, что

$$\beta[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))|\forall\, B_1 \in \mathcal{B}\ \forall\, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\, B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\},$$

получая семейство непустых направленных подсемейств $\mathcal{P}(I)$; в виде

$$\beta_0[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta[I]|\varnothing \notin \mathcal{B}\}$$

имеем семейство всех баз фильтров (БФ) множества I. Ясно, что

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{P}(I)|\exists\, B \in \mathcal{B}\colon B \subset J\} \in \mathfrak{F}[I]\ \forall\, \mathcal{B} \in \beta_0[I].$$

При этом $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_0[I]$.

§ 2. Элементы топологии, 1

В пределах настоящего короткого раздела фиксируем непустое топологическое пространство (ТП) (X, τ): $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, где X — непустое множество; в частности, $\tau \in \pi[X]$. Если $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau|x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$, а

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(X)|\exists\, G \in N_\tau^0(x)\colon G \subset H\} \in \mathfrak{F}[X]$$

(фильтр окрестностей x в ТП (X,τ); см. [18, гл. I]); легко видеть, что $N^0_\tau(x) \in \beta_0[X]$ и $N_\tau(x) = (X - \mathbf{fi})[N^0_\tau(x)]$. Если $\mathfrak{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то (см. [18, гл. I])

$$(\mathfrak{B} \xrightarrow{\tau} x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (X - \mathbf{fi})[\mathfrak{B}]). \tag{2.1}$$

В (2.1) введена сходимость БФ и, в частности, фильтров в ТП (X,τ). Отметим следующее простое свойство: если Y — непустое семейство, $\mathfrak{B} \in \beta_0[X]$ и $f \in Y^X$, то $f^1[\mathfrak{B}] \in \beta_0[Y]$; если Y оснащено топологией, то можно говорить о сходимости БФ $f^1[\mathfrak{B}]$ к той или иной точке Y.

Если $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП (X,τ), а $(\tau - \mathrm{Int})[A] \triangleq \{x \in X | A \in N_\tau(x)\}$ (внутренность множества A в ТП (X,τ)). Наконец, в виде

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(X) | F = \mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Int})[F],\tau)\} = \{\mathrm{cl}(G,\tau) \colon G \in \tau\}$$

имеем семейство всех канонически замкнутых в (X,τ) п/м X.

§ 3. Элементы топологии, 2

В настоящем разделе фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$ и π-систему $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$. Полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}) | L \in \mathcal{U}\} \ \forall\, L \in \mathcal{J}. \tag{3.1}$$

Множества (3.1) образуют (открытую) базу топологии на непустом множестве $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})$:

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{I};\mathcal{J}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{J}}(J) \colon J \in \mathcal{J}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}))) \tag{3.2}$$

есть упомянутая открытая база, порождающая топологию

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[\mathbf{I};\mathcal{J}]) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})) | \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G}\ \exists\, U \in \mathcal{U} \colon \Phi_{\mathcal{J}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})],$$

$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}])$ — нульмерное T_2-пространство (см. [4, с. 62]). Пусть до конца настоящего раздела

$$\mathcal{J} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]. \tag{3.3}$$

Тогда [4, (6.7)] семейство (3.2) образует также замкнутую базу: в виде $\{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{I};\mathcal{J}])$ имеем семейство замкнутых множеств, отвечающих топологии

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})}(\{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{I};\mathcal{J}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})].$$

При этом (см. [4, § 4]) получаем в виде

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}]) \tag{3.4}$$

компактное T_1-пространство, причем согласно [5, предложение 4.1]

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}], \tag{3.5}$$

а потому получаем (см. (3.4), (3.5)) в виде

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{J}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}], \mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[\mathbf{I}])$$

битопологическое пространство. Пусть до конца настоящего раздела выполнено (в дополнение к (3.3)) следующее условие отделимости:

$$\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \tag{3.6}$$

(заметим, что условия (3.3) и (3.6) выполняются в случае $\mathcal{J} \in (\mathrm{LAT})^0[\mathbf{I}]$; в свою очередь, это последнее условие выполнено для $\mathcal{J} = \mathbf{C_I}[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I}, \tau)$ есть T_1-пространство, см. [4, (8.1)]). В силу (1.5) и (3.6) имеем, что

$$((\mathbf{I}, \mathcal{J}) - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\ \forall\, x \in \mathbf{I}.$$

С учетом этого (используя (3.3) и (3.6) в совокупности) получаем, что

$$w[\mathcal{J}] \overset{\triangle}{=} (((\mathbf{I}, \mathcal{J}) - \mathrm{triv})[x])_{x \in \mathbf{I}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})^{\mathbf{I}} \tag{3.7}$$

(в (3.7) имеем вариант погружения $\mathbf{I}$ в пространство у/ф отделимой решетки $\mathcal{J} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \cap \cap \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$). Напомним, что согласно [4, предложение 7.1]

$$\mathrm{cl}(w[\mathcal{J}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{I}]) = \Phi_{\mathcal{J}}(L)\ \forall\, L \in \mathcal{J}. \tag{3.8}$$

§ 4. Множества притяжения и компактификаторы

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E в качестве пространства обычных решений. Семейства из $\beta[E]$ будем использовать для построения ОАХ, что достаточно для всех наших целей (см. [17], [19, (2.4)]). Если (Y, τ), $Y \neq \varnothing$, есть ТП, $f \in Y^E$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то [19, (2.1),(2.2)]

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; f; \mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}]\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y\} \tag{4.1}$$

есть МП в задаче о достижимости с ОАХ, определяемыми посредством (направленного) семейства $\mathcal{E}$. Отметим, что в [4, определение 3.1] приведено эквивалентное представление МП на языке направленностей. В связи с условиями, обеспечивающими исчерпывающую секвенциальную реализацию МП, см. [17, с. 38]. Заметим в связи с (4.1), что

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; f; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau) \tag{4.2}$$

(здесь (Y, τ), f и $\mathcal{E}$ соответствуют (4.1)).

Всюду в дальнейшем полагаем для любых двух ТП (S, τ_1), $S \neq \varnothing$, и (T, τ_2), $T \neq \varnothing$, что

$$C(S, \tau_1, T, \tau_2) \overset{\triangle}{=} \{g \in T^S \mid g^{-1}(G) \in \tau_1\ \forall\, G \in \tau_2\},$$

получая множество всех непрерывных отображений из (S, τ_1) в (T, τ_2).

Если (Y, τ), $Y \neq \varnothing$, есть ТП и $f \in Y^E$, то для всяких ТП $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, $\mathbf{K} \neq \varnothing$, отображений $m \in \mathbf{K}^E$ и $g \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}, Y, \tau)$

$$(f = g \circ m) \Longrightarrow (g^1((\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}]) \subset (\mathbf{as})[E; Y; \tau; f; \mathcal{E}]\ \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E]);$$

здесь и ниже $\circ$ — символ композиции отображений.

Определение 4.1. Если (Y, τ), $Y \neq \varnothing$, есть ТП и $f \in Y^E$, то (Y, τ, f)-компактификатором называем всякий набор $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, m, g)$, для которого $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, $\mathbf{K} \neq \varnothing$, есть компактное ТП, $m \in \mathbf{K}^E$, $g \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}, Y, \tau)$ и при этом $f = g \circ m$.

Хорошо известно [10, предложение 5.2] свойство: если (Y, τ), $Y \neq \varnothing$, есть T_2-пространство, $f \in Y^E$, а $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, m, g)$ есть (Y, τ, f)-компактификатор, то

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; f; \mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}])\ \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E]; \tag{4.3}$$

при этом МП в левой части (4.3) рассматриваем в качестве основного, а МП $(\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}]$ — в качестве вспомогательного (по сути, это последнее МП есть множество допустимых ОЭ).

Условимся о следующих обозначениях: если $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$([\mathcal{E}]^{(\tau)}_{\mathrm{cl}} \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{cl}(\Sigma, \tau) : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\tau]))\&([\mathcal{E}]^{(\tau)}_{\mathrm{Int}} \overset{\triangle}{=} \{(\tau - \mathrm{Int})[\Sigma] : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\tau)); \tag{4.4}$$

при этом $[\mathcal{E}]^{(\tau)}_{\rm cl} \in \beta[E]$ и $[\mathcal{E}]^{(\tau)}_{\rm Int} \in \beta[E]$ (доказательства легко следуют из определений). Отметим простое свойство: если $\tau_1 \in (\mathrm{top})[E]$, (Y, τ_2) есть ТП, $Y \neq \varnothing$, $f \in C(E, \tau_1, Y, \tau_2)$ и $A \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathrm{cl}(f^1(A), \tau_2) = \mathrm{cl}(f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)), \tau_2). \tag{4.5}$$

Замечание 4.1. Проверим (4.5), учитывая, что в силу непрерывности f

$$f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)) \subset \mathrm{cl}(f^1(A), \tau_2). \tag{4.6}$$

Тогда в силу замкнутости множества в правой части (4.6) имеем вложение

$$\mathrm{cl}(f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)), \tau_2) \subset \mathrm{cl}(f^1(A), \tau_2). \tag{4.7}$$

С другой стороны, с учетом изотонности операции взятия образа имеем вложение

$$f^1(A) \subset f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)),$$

а тогда по аналогичному свойству оператора замыкания реализуется следующее вложение:

$$\mathrm{cl}(f^1(A), \tau_2) \subset \mathrm{cl}(f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)), \tau_2).$$

Используя (4.7), получаем требуемое равенство (4.5). □

Предложение 4.1. *Если* $\tau_1 \in (\mathrm{top})[E]$, (Y, τ_2) *есть ТП,* $Y \neq \varnothing$, $f \in C(E, \tau_1, Y, \tau_2)$ *и* $\mathcal{E} \in \beta[E]$, *то*

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; [\mathcal{E}]^{(\tau_1)}_{\rm cl}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть τ_1, (Y, τ_2), f и $\mathcal{E}$ удовлетворяют условиям предложения. Тогда согласно (4.2), (4.4) и (4.5)

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau_2) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\mathrm{cl}(\Sigma, \tau_1)), \tau_2) = \bigcap_{\Xi \in [\mathcal{E}]^{(\tau_1)}_{\rm cl}} \mathrm{cl}(f^1(\Xi), \tau_2) =$$
$$= (\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; [\mathcal{E}]^{(\tau_1)}_{\rm cl}].$$

Предложение доказано. □

Предложение 4.2. *Если* τ_1, (Y, τ_2), f *и* $\mathcal{E}$ *удовлетворяют условиям предложения* 4.1 *и, кроме того,* $\mathcal{E} \subset (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[E; \tau_1]$, *то*

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; [\mathcal{E}]^{(\tau_1)}_{\rm Int}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть τ_1, (Y, τ_2), f и $\mathcal{E}$ удовлетворяют условиям предложения 4.1, причем семейство $\mathcal{E}$ состоит только из канонически замкнутых множеств. Тогда

$$\Sigma = \mathrm{cl}((\tau_1 - \mathrm{Int})[\Sigma], \tau_1) \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{4.8}$$

Полагая для краткости $\tilde{\mathcal{E}} \triangleq [\mathcal{E}]^{(\tau_1)}_{\rm Int}$, получаем, в частности, что

$$\tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{P}'(\tau_1),$$

и согласно (4.8) $\mathcal{E} = [\tilde{\mathcal{E}}]^{(\tau_1)}_{\rm cl}$. Итак, $\tilde{\mathcal{E}} \in \beta[E]$ реализует последнее равенство, а тогда в силу предложения 4.1

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; [\mathcal{E}]^{(\tau_1)}_{\rm Int}] = (\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; \tilde{\mathcal{E}}] = (\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; [\tilde{\mathcal{E}}]^{(\tau_1)}_{\rm cl}] = (\mathbf{as})[E; Y; \tau_2; f; \mathcal{E}].$$

Предложение доказано. □

Итак, если направленное семейство $\mathcal{E}$ п/м E состоит только из канонически замкнутых множеств (т. е. $\mathcal{E} \subset (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[E; \tau_1]$), то внутренности множеств из $\mathcal{E}$ реализуют в (Y, τ_2) то же МП, что и $\mathcal{E}$; имеет место эквивалентность двух семейств по результату.

§ 5. Волмэновский компактификатор

Всюду в дальнейшем фиксируем топологию $\tilde{\tau}_1 \in (\mathrm{top})[E]$, превращающую множество E в T_1-пространство $(E, \tilde{\tau}_1)$, компакт (т. е. компактное T_2-пространство) $(\mathbf{H}, \tilde{\tau}_2)$ и отображение $\mathbf{r} \in C(E, \tilde{\tau}_1, \mathbf{H}, \tilde{\tau}_2)$. Рассматриваем вопросы, связанные с достижимостью элементов $\mathbf{H}$ на значениях $\mathbf{r}$ в условиях, когда тем или иным способом введены ОАХ на выбор обычных решений из E. При $\mathcal{E} \in \beta[E]$ рассматриваем МП $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}, \tilde{\tau}_2; \mathbf{r}; \mathcal{E}]$ в качестве (интересующего нас) решения задачи о достижимости с ОАХ. Для нахождения такого решения и исследования его свойств используем (4.3) при надлежащем выборе $(\mathbf{H}, \tilde{\tau}_2, \mathbf{r})$-компактификатора (см. [5, § 7]). Поскольку триплет $(\mathbf{H}, \tilde{\tau}_2, \mathbf{r})$ фиксирован в дальнейшем, будем опускать указание на данный триплет и использовать термин «компактификатор». В этой связи напомним, что

$$\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1] \in (\mathrm{LAT})^0[E]$$

(действительно, у нас $(E, \tilde{\tau}_1)$ есть T_1-пространство). Как следствие,

$$\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1] \in (\mathrm{LAT})_0[E] \cap \tilde{\pi}^0[E],$$

и реализуется следующий вариант компактного T_1-пространства:

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]). \tag{5.1}$$

Само множество E погружается в данное пространство посредством оператора

$$w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]] : \ E \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]). \tag{5.2}$$

Напомним теперь некоторые построения [5, §§ 5–7]. В этой связи отметим, что [5, (5.10)] определено непустое множество

$$\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]; \mathbf{H}; \tilde{\tau}_2] \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}^E),$$

причем (см. [5, (7.9)]) $\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]; \mathbf{H}; \tilde{\tau}_2]$. Это позволяет [5, (7.10)] определить отображение

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]] : \ \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]) \longrightarrow \mathbf{H},$$

для которого имеет место следующее свойство:

$$\mathbf{r}^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}_2}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]](\mathcal{U}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]).$$

При этом (см. [5, (7.14)] $\mathbf{r} = \varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]] \circ w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]$. Наконец, согласно [5, предложение 7.1]

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E], \mathbf{H}, \tilde{\tau}_2). \tag{5.3}$$

Таким образом (см. (5.1)–(5.3)), в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E], w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]], \varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]])$$

реализуется компактификатор (точнее, $(\mathbf{H}, \tilde{\tau}_2, \mathbf{r})$-компактификатор). Тогда согласно (4.3)

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}_2; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]); \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]; w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]; \mathcal{E}]) \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{5.4}$$

Данное представление используется в последующих построениях с целью сравнения МП при различных вариантах ОАХ. Следующее положение логически связано с [4, предложение 8.2]; однако сейчас представляется полезным дать независимое доказательство соответствующего утверждения.

Предложение 5.1. *Отображение* (5.2) *непрерывно:*

$$w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]] \in C(E, \tilde{\tau}_1, \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]). \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что открытая база, порождающая топологию $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]$, может быть определена [2, 3.6] следующим образом. Итак, полагаем

$$\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[\tilde{\tau}_1|G] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]) | \exists U \in \mathcal{U}: \ U \subset G\} \ \forall G \in \tilde{\tau}_1. \tag{5.6}$$

Тогда в виде семейства

$$\tilde{\mathfrak{F}} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[\tilde{\tau}_1|G]: \ G \in \tilde{\tau}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1])))$$

имеем требуемую открытую базу ТП (5.1):

$$\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E] = \{\cup\}(\tilde{\mathfrak{F}}). \tag{5.7}$$

Пусть $x_* \in E$. Рассмотрим тривиальный у/ф

$$\mathcal{U}_* \stackrel{\triangle}{=} w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]](x_*) = \{F \in \mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1] | x_* \in F\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]).$$

Пусть $\mathbb{G}_* \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]}(\mathcal{U}_*)$. С учетом (5.7) подберем $G_* \in \tilde{\tau}_1$ со свойствами

$$(\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[\tilde{\tau}_1|G_*]) \& (\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[\tilde{\tau}_1|G_*] \subset \mathbb{G}_*). \tag{5.8}$$

Из определения $\mathcal{U}_*$ имеем по свойствам T_1-пространств, что $x_* \in G_*$, т. е.

$$G_* \in N^0_{\tilde{\tau}_1}(x_*).$$

Пусть $x^* \in G_*$. Тогда имеем с очевидностью, что $\{x^*\} \in \mathcal{U}^*$, где

$$\mathcal{U}^* \stackrel{\triangle}{=} w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]](x^*);$$

при этом, конечно, $\{x^*\} \subset G_*$. Это означает, что (см. (5.6))

$$\mathcal{U}^* \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[\tilde{\tau}_1|G_*]$$

и тем более (см. (5.8)) $\mathcal{U}^* \in \mathbb{G}_*$. Поскольку выбор x^* был произвольным, установлено, что

$$w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]](x) \in \mathbb{G}_* \ \forall x \in G_*.$$

Иными словами, $w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(G_*) \subset \mathbb{G}_*$. Поскольку выбор $\mathbb{G}_*$ был произвольным, получили свойство

$$\forall \mathbb{G} \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]}(w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]](x_*)) \ \exists G \in N^0_{\tilde{\tau}_1}(x_*): \ w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(G) \subset \mathbb{G}.$$

Итак, отображение (5.2) непрерывно в точке x_* (относительно топологий, упоминаемых в (5.5)). Поскольку и выбор x_* был произвольным, установлено (5.5). □

Отметим, что из (4.5) и предложения 5.1 вытекает свойство: если $A \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathrm{cl}(w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]) = \mathrm{cl}(w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(\mathrm{cl}(A, \tilde{\tau}_1)), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]); \tag{5.9}$$

при этом $\mathrm{cl}(A, \tilde{\tau}_1) \in \mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]$. Поэтому с учетом (3.8) и (5.9) получаем, что

$$\Phi_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}(\mathrm{cl}(A, \tilde{\tau}_1)) = \mathrm{cl}(w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]) = \\ = \mathrm{cl}(w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(\mathrm{cl}(A, \tilde{\tau}_1)), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{5.10}$$

Свойство (5.9) может использоваться в конструкциях, подобных предложению 4.1. Отметим сейчас некоторые простые представления известных положений, связанные со свойством (5.10). Так, в частности, с учетом (1.6) и (3.1) определено при $\mathcal{E} \in \beta[E]$ следующее семейство:

$$\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1] | [\mathcal{E}]^{(\tilde{\tau}_1)}_{\mathrm{cl}}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]) | [\mathcal{E}]^{(\tilde{\tau}_1)}_{\mathrm{cl}} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Xi \in [\mathcal{E}]^{(\tilde{\tau}_1)}_{\mathrm{cl}}} \Phi_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}(\Xi)$$

(учитываем здесь, что $[\mathcal{E}]_{\rm cl}^{(\tilde{\tau}_1)} \subset \mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]$); при этом в силу (5.10), предложений 4.1 и 5.1 получаем цепочку равенств

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]);\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E];w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]];\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]);\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E];w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]];[\mathcal{E}]_{\rm cl}^{(\tilde{\tau}_1)}] =$$
$$= \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} {\rm cl}(w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]]^1(\Sigma),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Phi_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}({\rm cl}(\Sigma,\tilde{\tau}_1)) = \bigcap_{\Xi\in[\mathcal{E}]_{\rm cl}^{(\tilde{\tau}_1)}} \Phi_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}(\Xi) =$$
$$= \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]|[\mathcal{E}]_{\rm cl}^{(\tilde{\tau}_1)}).$$

Тем самым для вспомогательного МП, соответствующего ОАХ на основе $\mathcal{E}$, необязательно определяемым системой замкнутых множеств пространства обычных решений, получено конкретное представление в терминах замкнутых у/ф, содержащих семейство $[\mathcal{E}]_{\rm cl}^{(\tilde{\tau}_1)}$:

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]);\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E];w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]];\mathcal{E}] = \{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1])|{\rm cl}(\Sigma,\tilde{\tau}_1)\in\mathcal{U}\ \forall\,\Sigma\in\mathcal{E}\}. \tag{5.11}$$

Представление (5.11) может использоваться в (5.4).

§ 6. Некоторые вопросы, связанные с представлением внутренности множеств притяжения

В настоящем разделе мы коснемся некоторых следствий положений [20]. Мы рассматриваем T_1-пространство $(E,\tilde{\tau}_1)$, где E — непустое множество. Относительно $\mathcal{E}\in\beta[E]$ будем предполагать, что $\mathcal{E}\subset\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]$ ([20, замечание 6.1]). Тогда по свойствам замкнутых множеств имеем, что

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\in\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1].$$

Таким образом, в рассматриваемом случае выполнено условие [20, (6.1)]. Напомним, что (см. [20, § 1])

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]|\mathcal{E}) = \{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1])|\mathcal{E}\subset\mathcal{U}\}.$$

Элементы данного множества исполняют роль допустимых ОЭ в задаче о достижимости с ОАХ в виде семейства $\mathcal{E}$. Тогда (см. [20, теорема 6.1])

$$(\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E]-{\rm Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]|\mathcal{E})] = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma). \tag{6.1}$$

Напомним, что согласно [5, (7.3)] имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]|\mathcal{E}) = (\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]);\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E];w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]];\mathcal{E}] =\\ = (\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]);\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]}[E];w[\mathbf{C}_E[\tilde{\tau}_1]];\mathcal{E}].\end{gathered} \tag{6.2}$$

Итак, в силу (6.2) мы получаем, что посредством (6.1) определена внутренность (вспомогательного) МП, которая в существенной части определяется действием точных решений, которыми являются точки пересечения всех множеств из $\mathcal{E}$ (здесь следует, конечно, учесть (3.8) и [5, (4.10)]). Возникает естественный вопрос: а не является ли такое представление общим свойством всех МП? Оказывается, что это, вообще говоря, не так.

Пример. Рассмотрим (см. также [21]) простейшую скалярную управляемую систему на промежутке $[0,1]$:

$$\dot{x}(t) = u(t);$$

здесь $u(\cdot) = (u(t))_{t\in[0,1[}\in\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ есть множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа функций из $[0,1[$ в двоеточие $\{-1;1\}$. Итак, по смыслу мы имеем тумблер с двумя состояниями. Полагаем, что $x(0)=0$ (начальное состояние фиксировано). Кроме того, имеются фазовые ограничения:

$$x(t) = 0 \quad \forall\, t\in[0,\frac{1}{2}]. \tag{6.3}$$

Рассматриваем область достижимости системы в момент $t = 1$ и соответствующее МП. Легко видеть, что точное соблюдение фазовых ограничений здесь невозможно. Поэтому область достижимости пуста, в то время как МП при естественном ослаблении фазовых ограничений является отрезком $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Рассмотрим последнее положение более подробно.

Пусть (в данном примере) $E = \mathfrak{U}$, (Y, τ) есть вещественная прямая с обычной $|\cdot|$-топологией,

$$f(u(\cdot)) \triangleq \int_0^1 u(t)\,dt \quad \forall u(\cdot) \in E \tag{6.4}$$

(терминальное состояние системы, находящейся под воздействием программного управления из E). В дополнение к (6.4) введем при каждом $u(\cdot) \in E$ траекторию $\mathbf{x}(u(\cdot))$, определенную на отрезке $[0, 1]$ правилом

$$\mathbf{x}(u(\cdot))(\xi) \triangleq \int_0^\xi u(t)\,dt;$$

ясно, что $f(u(\cdot)) = \mathbf{x}(u(\cdot))(1)$. Тогда в виде (6.3) имеем следующее условие на выбор $u(\cdot) \in E$:

$$\mathbf{x}(u(\cdot))(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Данное условие невыполнимо, и мы рассматриваем ослабленные условия

$$|\mathbf{x}(u(\cdot))(t)| \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in [0, \frac{1}{2}];$$

здесь $\varepsilon \in]0, \infty[$ — варьируемый параметр, полагаемый на содержательном уровне исчезающе малым. Мы сопоставляем каждому $\varepsilon \in]0, \infty[$ множество

$$E_0[\varepsilon] \triangleq \{u(\cdot) \in E \,|\, |\mathbf{x}(u(\cdot))(t)| \leqslant \varepsilon \;\; \forall t \in [0, \frac{1}{2}]\}.$$

Определяем теперь семейство $\mathcal{E}$ условием

$$\mathcal{E} \triangleq \{E_0[\varepsilon] \colon \varepsilon \in]0, \infty[\};$$

ясно, что $\mathcal{E} \in \beta[E]$. Тогда имеем, что

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} E_0[\varepsilon] = \varnothing.$$

Таким образом, управлений, соблюдающих фазовые ограничения точно, у нас не существует, что отражено и в последнем условии в терминах семейства (направленного) $\mathcal{E}$. Между тем, используя (4.2), можно построить МП при ОАХ, определяемых посредством $\mathcal{E}$. Дело в том, что при всяком $\varepsilon \in]0, \infty[$ существует «пилообразное» управление $u_\varepsilon(\cdot) \in E$, для которого

$$|\mathbf{x}(u_\varepsilon(\cdot))(t)| \leqslant \varepsilon \;\; \forall t \in [0, \frac{1}{2}]$$

(в частности, можно через равные и малые промежутки переключать управление с -1 на $+1$). Итак, $E_0[\varepsilon] \neq \varnothing$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$; кроме того, при $u(\cdot) \in E_0[\varepsilon]$ и $\tilde{u}(\cdot) \in E$ имеем с очевидностью, что

$$(u(t) = \tilde{u}(t) \;\; \forall t \in [0, \frac{1}{2}]) \Longrightarrow (\tilde{u}(\cdot) \in E_0[\varepsilon]).$$

С учетом простейшего варианта полугруппового свойства получаем, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$f^1(E_0[\varepsilon]) = [-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon].$$

Теперь с учетом (4.2) и определения семейства $\mathcal{E}$ в нашем конкретном случае получаем требуемое равенство

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; f; \mathcal{E}] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Данное множество имеет непустую внутренность в виде интервала $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, хотя пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ пусто. Таким образом, в данном примере ситуация существенно отличается от (6.1), а само свойство, отмеченное в [20] и приводящее к (6.1), в сочетании с (6.2) касается весьма специального варианта МП, рассматриваемого в [20] в связи с представлением внутренности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 294–309.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир. 1986. 752 с.
3. Архангельский А.В. Компактность // Общая топология — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
4. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. DOI: 10.20537/vm110112
5. Ченцов А.Г., Пыткеев Е.Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312–329.
6. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
7. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1975. 230 с.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
9. Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York: Springer US, 1996. XII+244 p.
10. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. XIV, 322 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0805-0
11. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 133. No. 2. P. 1045–1206. DOI: 10.1007/s10958-006-0030-0
12. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. XIV, 408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
13. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 309–323.
14. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 292–311. DOI: 10.1134/S0371968515040226
15. Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И. Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2016. Вып. 1 (47). С. 54–118.
16. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
17. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Матем. 2013. № 11. С. 33–50.
18. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
19. Ченцов А.Г. К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 212–229. DOI: 10.20537/vm150206
20. Ченцов А.Г. К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 90–109. DOI: 10.20537/vm140309
21. Бродская Л.И., Ченцов А.Г. Некоторые примеры неустойчивых задач управления. Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2014. 101 с.

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 2

Поступила в редакцию 19.03.2018

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Пыткеев Евгений Георгиевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: pyt@imm.uran.ru

E. G. Pytkeev, A. G. Chentsov

The Wallman compactifier and its application for investigation of the abstract attainability problem

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 199–212 (in Russian).

Keywords: asymptotic constraints, extension of a problem, topology.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/vm180206

The attainability problem with asymptotic constraints is considered. Such constraints can arise under weakening of constraints that are standard in control theory: phase constraints, boundary and intermediate conditions; trajectories of a system must satisfy these constraints. But asymptotic constraints can arise from the beginning as a characterization of trends in the implementation of desired behavior. For example, one can speak of implementation of powerful control impulses with vanishingly small duration. In this case, it is hard to tell whether any standard constraints are weakened. So, we have a set of complicating conditions with each of which we can juxtapose some analog of the attainability domain in control theory and (more precisely) the image of a subset of the usual solution space under the action of a given operator. In this paper, we investigate questions concerning the structure of an attraction set arising as an analog of the attainability domain. The investigation scheme is based on the application of a special way of extending solution space which admits a natural analogy with Wallman extension used in general topology. Then it is natural to suppose that the space of usual solutions is endowed with a topology (usually, it is a T_1-space that is explored in this case). In this connection, questions concerning the replacement of sets forming asymptotic constraints by closures and interiors are addressed. Partially, questions associated with representation of the interior of the set of admissible generalized elements that form an auxiliary attraction set are discussed.

REFERENCES

1. Chentsov A.G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 102–118. DOI: 10.1134/S0081543817020109
2. Engelking R. *General topology*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986, 752 p.
3. Arhangel'skii A.V. Compactness, *General Topology II, Encyclopaedia Math. Sci.,* vol. 50, Berlin: Springer-Verlag, 1996, pp. 1–117.
4. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110112
5. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. DOI: 10.1134/S0081543816020048

6. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972, 546 p. DOI: 10.1016/C2013-0-11669-8
Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
7. Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya* (Foundations of optimal control), Tbilisi: Tbilisi University, 1975, 230 p.
8. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
9. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, New York: Springer US, 1996, XII, 244 p.
10. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht: Springer Netherlands, 1997, XIV, 322 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0805-0
11. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206. DOI: 10.1007/s10958-006-0030-0
12. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht: Springer Netherlands, 2002, XIV, 408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
13. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On the question of construction of an attraction set under constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 40–55. DOI: 10.1134/S0081543815090035
14. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, issue 1, pp. 279–298. DOI: 10.1134/S0081543815080222
15. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. A problem of reachability with asymptotic constraints, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2016, issue 1 (47), pp. 54–118 (in Russian).
16. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Warszawa: PWN, 1967, vii, 417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
17. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 28–44. DOI: 10.3103/S1066369X13110030
18. Bourbaki N. *Topologie Generale*, Paris: Hermann, 1961, 263 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
19. Chentsov A.G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 212–229 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150206
20. Chentsov A.G. To the validity of constraints in the class of generalized elements, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 3, pp. 90–109 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140309
21. Brodskaya L.I., Chentsov A.G. *Nekotorye primery neustoichivyh zadach upravleniya* (Some examples of unstable control problems), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2014, 101 p.

Received 19.03.2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Pytkeev Evgenii Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: pyt@imm.uran.ru